울산대학교 사회과학 논집 제2권 제2호 pp. 127~143, 1992.
Journal of social Science Vol.2. No.1, pp.127~143, 1992.
University of Ulsan.

네트워크 問題의 雙對解法에 관한 硏究*

이영덕
경영학과

〈요 약〉

네트워크 문제는 산업전반에 걸쳐 발생하는 현상으로 여러가지 유형의 문제에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 최근에 와서는 쌍대구조에 바탕을 둔 쌍대해법에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 이를 크게 두가지로 나누어 보면, 하나는 원문제를 선형계획문제로 완화하여 쌍대문제로 바꾼 후 쌍대문제의 구조를 이용하여 쌍대향상 방법으로 해를 구하는 방법이고, 나머지 하나는 네트워크문제의 제약식 일부를 라그란지안 쌍대변수를 이용하여 목적함수식으로 올린 후, 비교적 간단해진 구조를 이용하여 해를 구하는 방법이다. 본 연구에서는 여러가지 형태의 네트워크 문제들을 살펴보고 이들의 해법에 관하여 조사연구하였다.

Dual Algorithms for Network Problems(Asurvey)

Young - Duck Lee
Dept. of Management

〈Abstracts〉

There are many studies about the network design problems that are applied to numerous areas of industry. Recently dual algorithms that are based on the structure of the dual problem are studied for numerous types of network problem. There are two types of dual algorithms. First, the dual ascent algorithm is based on the dual structure of primal problem, second, the Lagrangian relaxation method dualize the complicate constraints with the Lagrangian dual multipliers, and adjust the multipliers with the subgradient method or the dual ascent method.

* 본 연구는 1991년도 교육부 학술연구조성비의 지원에 의한 것임.

We studied the numerous types of network problems and the dual algorithms of network problems.

---

1. 序 論

네트워크는 노드(Node)들과 아크(Arc)들로 이루어져 있으며, 네트워크에 관련되는 현상들은 産業전반에서 찾아볼 수 있는데 通信網, 道路網, 輸送網등의 문제는 대표적인 네트워크 문제이다.

네트워크 문제를 분석하는 방법의 하나로 數理的인 模型에 의한 분석이 있는데, 이는 네트워크 현상을 整數計劃模型(주로 0-1정수계획모형)으로 모형화하여 數理的解法을 이용하여 대안을 찾는 방법이다.

1980년 이후로 네트워크문제의 해법에 관한 연구로 雙對해법에 관한 연구가 활발히 진행되고 있는데, 이를 크게 둘로 나누면 雙對向上解法(Dual Ascent Algorithm : 최소화 문제의 경우)과 라그랑지안 쌍대해법(Lagrangian Dual Algorithm)으로 나눌 수 있다. 전자는 네트워크문제의 정수계획모형을 선형계획모형으로 緩和하여 쌍대문제를 구한 후 이 쌍대문제의 특수한 구조를 이용하여 네트워크문제 정수계획모형의 해를 구하는 것으로 Erlenkolter [7]가 單純立地選定문제(Simple Plant Location Problem)의 쌍대향상해법(Dual Ascent Algorithm)을 연구한 이후 네트워크문제에도 적용되어 많은 연구가 이루어 지고 있다.

라그랑지안 쌍대해법은 정수계획모형에서 복잡한 구조를 갖는 制約式을 라그랑지안 쌍대변수(Lagrangian Multipliers)를 이용하여 목적함수로 올려서 비교적 간단한 정수계획모형으로 바꾼 후 라그랑지안쌍대변수를 바꾸어가면서 최적해를 찾게 되는데 라그랑지안 쌍대변수를 향상 시키는 방법으로는 Subgradient 방법이나 쌍대향상(Dual Ascent)방법을 이용한다.

본 연구에서는 최근에 연구되고 있는 여러가지 형태의 네트워크모형과 이에 대한 쌍대해법과 라그랑지안쌍대해법을 이용한 해법들을 조사연구하여 산업전반에 걸친 네트워크문제를 분석하는데 이용할 수 있도록 하고자 한다.

2. 네트워크모형의 쌍대향상해법

네트워크모형의 쌍대향상해법은 네트워크모형을 정수계획모형으로 定式化 한 후 이를 선형계획문제로 완화하여 쌍대모형을 구한다. 이때 쌍대모형에서는 독특한 특성이 나타나게 되는데, 이 특성과 원래정수계획모형이 갖은 특성을 이용하여 쌍대변수를 향상시켜가면서 해를 구하게 되며, 대개는 分斷探索法(Branch and Bound Method)을 이용하여 最適解를 구하거나, 휴리스틱방법으로 近似解를 구하게 된다.

1) 스타이너 트리 문제 (The steiner Tree Problem)

노드集合 N과 아크집합 A를 갖는 그래프 G=(N, A)가 있을 때, 노드집합 N은 반드시 루트노드(Root Note)와 연결이 되어야 하는 노드집합 V와 루트노드와 연결이 안되어도 상관없는 노드집합 S로 나누어진다. 스타이너 트리문제는 총 연결비용을 최소화 시키면서 노드집합 V의 모든 노드들을 루트노드에 연결시키는 문제로, 노드집합 S에 있는 노드들은 총 연결비용을 줄일 수 있으면 연결시킬 수 있다. 이 문제는 중앙에 데이타베이스 등을 포함한 중앙컴퓨터가 있고 각 지역에서 중앙컴퓨터로 연결하는 경우에 적용될 수 있다. 스타이너문제는 Wong[13]이 쌍대향상해법을 이용하여 연구하였는데 Wong이 이용한 정수계획모형과 해법에 관한 내용은 다음과 같다.

$$(P1)\quad \text{Min} \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, y_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{h\in N} x^k_{ih} - \sum_{j\in N} x^k_{ji} = \begin{cases} -1, & i = 1 \\ 1, & i = k \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \forall k\in V \qquad (1)$$

$$x^k_{ij} \le y_{ij} \qquad \forall (i,j)\in E,\ k\in V \qquad (2)$$

$$x^k_{ij} \ge 0, \text{ and } y_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall (i,j)\in E,\ k\in V \qquad (3)$$

여기에서 y_{ij}는 아크(i, j)를 연결시키냐 여부를 결정하는 변수이고, c_{ij}는 아크(i, j)를 연결시킬 때 드는 비용이다. 제약식 (1)은 노드집합 V에 속한 모든 노드에서 루트노드 (i=1)로 흐름(Flow)이 있을 수 있어야 함을 나타내며, 제약식 (2)는 모든 흐름은 연결된 아크로만 흐를 수 있음을 나타낸다. 위 모형을 선형계획모형으로 완화하여 쌍대모형을 구하면 다음과 같다.

$$(D1)\quad \text{Max} \sum_{k\in V} \left(v^k_k - v^k_1 \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \upsilon^k_j - \upsilon^k_i - w^k_{ij} \le 0 \qquad \forall k\in V,\ i, j\in N \qquad (1)$$

$$\sum_{k\in V} w^k_{ij} \le c_{ij} \qquad \forall \{i, j\}\in E \qquad (2)$$

$$w^k_{ij} \ge 0 \qquad \forall k\in V,\ (j, j)\in E \qquad (3)$$

쌍대변수 V_i^k는 정수계획모형 (P1)의 제약식 (1)과 관계가 있는데 이 제약식의 하나는 중복되는 식이므로, 위 모형의 목적함수식을 max ΣV_k^k로 바꿀 수 있다. 이 문제의 쌍대향상방법은 제약식 (3)을 만족시켜 가면서 V_k^k의 값을 올려서 ΣV_k^k의 값을 최대로 하게 되는데, 여기서 구한 쌍대변수의 정보를 이용하여 원래정수계획문제의 실현가능해를 구한다. 즉 $\Sigma W_{ij}^k - C_{ij} = 0$ 인 (i, j) 중에서 아크를 설치하게 된다.

Liu[8]는 스타이너 트리에 대한 새로운 모형을 제시하여 쌍대모형을 구한 후 쌍대향상(Dual Ascent) 방법을 바탕으로 새로운 해법을 연구하였다. 이 연구에서는 Wong [13]의 쌍대향상해법을 Subroutine으로 사용하였는데, Projection 방법을 이용하여 해를 향상시키는 방향을 구한 후 쌍대변수의 값들을 한꺼번에 개선하게 하였다.

2) 容量制限이 없는 네트워크 디자인 문제 (Uncapacitated Network Design Problem)

Balakrishnan, Magniti, Wong[3]은 容量制限이 없는 네트워크 디자인 문제를 연구하였다. 이 문제에서는 각각의 노드간에 흐름이 있게 되며 이 흐름은 연결되어 있는 아크들을 통해 흐르게 된다. 이때 아크를 통과할 때 발생하는 변동비의 총합을 최소화하는 네트워크 디자인을 구하게 된다. 이 문제는 情報通信문제등에 응용이 되는데, 예로써 각 지역 전화국간에 통화(혹은 정보통신)가 필요하며 이를 위하여 통신케이블(이 문제에서는 용량제한이 없기 때문에 주로 광케이블)을 어떻게 설치하며 각 지역전화국은 어떤 아크들을 이용한 경로를 이용하여 통화를 시키냐를 결정하는 문제등에 응용이 된다. 이 문제를 정수계획모형으로 모형화하면 다음과 같다.

$$(\mathrm{P2})\quad \mathrm{Min} \sum_{k\in K}\sum_{\{i,j\}\in A}\left(c_{ij}^k x_{ij}^k + c_{ji}^k x_{ji}^k\right) + \sum_{\{i,j\}\in A} F_{ij}\, y_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j\in N} x_{ji}^k - \sum_{l\in N} x_{il}^k = \begin{cases} -1, & i = O(k) \\ 1, & i = D(k) \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \forall i\in N,\ k\in K \qquad (1)$$

$$x_{ij}^k \le y_{ij},\ \text{and}\ x_{ji}^k \le y_{ij}, \qquad \forall\{i,j\}\in A,\ k\in K \qquad (2)$$

$$x_{ij}^k,\ x_{ji}^k \ge 0,\ \text{and}\ y_{ij}\in\{0,1\}, \qquad \forall\{i,j\}\in A,\ k\in K \qquad (3)$$

제약식 (1)은 각 노드간에 흐름이 흐를 수 있음을 나타내며, 제약식 (2)는 설치된 아크를 통해거만 흐름이 흐를 수 있음을 나타낸다. 이 모형을 선형계획모형으로 완화하여 쌍대모형을 구하면 다음과 같다.

$$(\mathrm{D2})\quad \mathrm{Max} \sum_{k\in K} \upsilon_{D(k)}^k$$

$$\text{s.t.}\quad v_j^k - v_i^k \le c_{ij}^k + w_{ij}^k$$

$$v_i^k - v_j^k \le c_{ji}^k + w_{ji}^k \qquad \forall k\in K,\ \{i,j\}\in A$$

$$\sum_{k\in K} w_{ij}^k + \sum_{k\in K} w_{ji}^k \le F_{ij} \qquad \forall\{i,j\}\in A$$

$$w_{ij}^k,\ w_{ji}^k \ge 0 \qquad \forall k\in K,\ \{i,j\}\in A$$

위 모형은 실현가능성을 보장하는 일정한 W = {W_{ij}^k, W_i^k}값이 주어졌을 때, k에 따라 分解(decompose)될 수 있는데 분해된 문제는 다음과 같다.

$$\text{Max} \quad v_{D(k)}^k$$

$$\text{s.t.} \quad v_j^k - v_i^k \le \overline{c_{ij}^k}$$

$$v_i^k - v_j^k \le \overline{c_{ji}^k} \qquad \forall k \in K, \{i, j\} \in A$$

$$\text{where} \quad \overline{c_{ij}^k} = c_{ij}^k + w_{ij}^k \text{ and } \overline{c_{ji}^k} = c_{ji}^k + w_{ji}^k \qquad \forall k \in K, \{i, j\} \in A$$

이 문제는 최단경로문제(Shortest Path Problem)의 쌍대모형과 같은 것이며, $V^k_{D(k)}$는 노드쌍의 흐름 k의 최단길이(비용상의 길이)를 나타내게 된다. 따라서 이 문제의 쌍대향상방법은 제약식 (3)을 만족시키는 범위에서 $V^k_{D(k)}$를 증가시켜 가면서 ΣV_k^k의 값을 최대화 하게 되는데, 이를 꼬리표법(Labeling Method)이라 하여 정리 하였다.

3) 2階位 階層구조의 네트워크 문제 (Two-level Hierarchical Network Problem)

네트워크가 2階位 階層構造를 가질 때, 즉 특정 노드집합들이 특정한 연결구조를 가질때의 네트워크 구조가 연구되고 있다. Chung, Tcha [6]는 특정노드들은 中軸네트워크(Back-Bone Network)를 형성하고 다른 노드들은 이들 노드중의 하나와 별모양(Star Type)의 네트워크를 형성할 때의 네트워크 디자인 문제를 연구하였다.

이 문제는 정보통신망등에 응용되는데 중요도시(각국의 수도나 중요도시)들은 완전그물망(Full-Mesh Network)을 형성하고, 그 도시권에 속하는 다른 도시들은 별모양(Star Type)의 네트워크를 형성하는 경우이다. 이 문제는 다음과 같이 2차방정계획 모형(Quadratic Programming)으로 모형화 된다.

$$\text{(P3)} \quad \text{Min} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \sum_{l \in I} d_{il} y_i y_l$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in J \qquad (1)$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad i \in I, j \in J \qquad (2)$$

$$z_{il} \ge 0, \qquad i, l \in K \qquad (3)$$

$$x_{ij} \text{ and } y_i = 0 \text{ or } 1, \qquad i \in I, j \in J \qquad (4)$$

위 문제를 정수계획모형으로 바꾸기 위해 $y_i y_l$을 Z_{il}로 치환하고, 모든 $1 \le i \le l \le m$에 대해 $y_i + y_l \le Z_{il} + 1$, $Z_{il} \le y_i$, $Z_{il} \le y_l$ $Z_{il} \ge 0$ 식을 추가한다. 그런데 위의 제약식들을 추가하면 문제

가 복잡성을 띄게 되므로, 위 제약식의 Integer Polytope Facet(Facet에 관한 설명은 Nehmhouser and Wolsey [9]를 참조)을 구하여 위의 추가되는 식들을 대체하는데 이 Facet은 다음과 같다.

$$\sum_{i\in I^k} y_i \le \sum_{i\in I^k} \sum_{\substack{l\in I^k \\ i<l}} z_{il} + 1, k\in K \qquad (5)$$

위와 같이 정수계획모형을 구한 후 이를 선형계획모형으로 완화하여 쌍대모형을 구하면 다음과 같다.

$$\text{(D3)} \quad \text{Max} \sum_{j\in J} v_j - \sum_{k\in K} \gamma_k$$

$$\text{s.t.} \quad v_j - w_{ij} \le c_{ij}, \qquad i\in I, j\in J$$

$$\sum_{j\in J} w_{ij} - \sum_{k\in K(i)} r_k \le f_i, \qquad i\in I$$

$$\sum_{k\in K(i,l)} r_k \le d_{il}, \qquad i, l\in I, i<l$$

$$w_{ij}, r_k \ge 0, \qquad i\in I, j\in J, k\in K$$

여기서 $W_{ij} = \max\{0, V_j - C_{ij}\}$로 치환하면 윗 식은 다음과 같이 간략화 된다.

$$\text{Max} \sum_{j\in J} v_j - \sum_{k\in K} r_k$$

$$\text{s.t.} \quad s_i = f_i - \sum_{j\in J} \max\{0, v_j - c_{ij}\} + \sum_{k\in K(i)} r_k \ge 0, \qquad i\in I$$

$$s_{il} = d_{il} - \sum_{k\in K(i,l)} r_k \ge 0, \qquad i, l\in I, i<l$$

$$r_k \ge 0, \qquad k\in K$$

윗 식에서 r_k가 고정되어 있으면 위 문제는 단순입지선정문제(Uncapacitated Facility Location Problem)의 쌍대모형이 된다. r_k를 증가시키면 $S_i(i\in I^k)$의 증가를 가져오고 이는 V_j를 올릴 수 있게 한다. r_k의 증가는 목적함수 값의 감소를 가져오므로, r_k의 증가보다 더 많이 V_j들을 증가시킬 수 있도록 하면서 Erlenkotter의 쌍대향상방법을 적용하게 된다.

4) 生存度가 강화된 네트워크 디자인 문제 (Survival Network Design Problem)

통신망을 구성하는 케이블이 동케이블에서 광케이블로 발전함에 따라 케이블의 容量은 급속히 증가 하였다. 따라서 광케이블로 형성하는 네트워크에서는 생존성(Survivality)이 중요 관심과제가 되고 있다.

조용철 등[14]은 二重연결성(Two-connectivity)이 보장되는 네트워크 디자인 문제를 연구하였는데 이 문제의 정수계획모형은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
(\text{P4})\quad & \text{Min} \sum_{(i,j)\in E} F_{ij} y_{ij} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j\in N} x_{ji}^{kp} - \sum_{r\in N} x_{ir}^{kp} = \begin{cases} -1, & i = O(k) \\ 1, & i = D(k) \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} && \forall i\in N,\ k\in K,\ p\in P \\
& \sum_{p\in P} (x_{ij}^{kp} + x_{ji}^{kp}) \le y_{ij} && \forall (i,j)\in E,\ k\in K \\
& \sum_{(i,j)\in E} (x_{ij}^{kl} + x_{ji}^{kl}) \le h_k && \forall k\in K \\
& x_{ij}^{kp},\ x_{ji}^{kp} \ge 0, \text{ and } y_{ij} \in \{0,1\}, && \forall (i,j)\in E,\ k\in E,\ p\in P
\end{aligned}
$$

윗 문제에서는 각 노드쌍간의 흐름은 주경로(Primary Path)를 통한 흐름과 보조경로(Secondary Path)를 통한 흐름의 두가지가 있어, 이 두가지 흐름은 같은 아크를 통과할 수 없도록 하여 한가지 經路가 손상되었을 때 다른 경로를 통하여 흐름(정보통신)이 가능토록 한다. 이 문제를 선형계획모형으로 완화하여 쌍대모형을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
(\text{D4})\quad & \text{Max} \sum_{k\in K}\sum_{p\in P} v_{D(k)}^{kp} + \sum_{k\in K} h_k u_k - \sum_{(i,j)\in E} R_{ij} \\
\text{s.t.}\quad & v_j^{kl} - v_i^{kl} \le w_{ij}^k + u_k \\
& v_i^{kl} - v_j^{kl} \le w_{ij}^k + u_k && \forall k \in K,\ (i,j)\in E \\
& v_j^{k2} - v_i^{k2} \le w_{ij}^k \\
& v_i^{k2} - v_j^{k2} \le w_{ij}^k && \forall k\in K,\ (i,j)\in E \\
& \sum_{k\in K} w_{ij}^k \le F_{ij} + R_{ij} && \forall (i,j)\in E && \text{(a)} \\
& w_{ij}^k,\ w_{ji}^k \ge 0 && \forall k\in K,\ (i,j)\in E \\
& u_k \ge 0 && \forall k\in K \\
& R_{ij} \ge 0 && \forall (i,j)\in E
\end{aligned}
$$

이 모형에서는 제약식 (a)를 만족시키는 범위에서 W_{ij}^{k}를 증가시키면서 $V^{kp}_{D(k)}$를 증가시켜 목적함수의 값을 증가시킨다. W_{ij}^{k}를 고정시키면 이 문제는 다음과 같이 k에 대한 部問題(Subproblem)로 나누어 지는데, 이는 主經路에 대한 부문제와 補助經路에 대한 부문제로 나누어진다.

○ 주경로에 대한 부문제

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & v_{l}^{kl} - h_k u_k \\
\text{s.t.} \quad & v_{j}^{kl} - v_{i}^{kl} \le w_{ij}^{k} + u_k \\
& v_{i}^{kl} - v_{j}^{kl} \le w_{ij}^{k} + u_k \qquad \forall (i,j) \in E
\end{aligned}
$$

○ 보조경로에 대한 부문제

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & v_{l}^{k2} - h_k u_k \\
\text{s.t.} \quad & v_{j}^{k2} - v_{i}^{k2} \le w_{ij}^{k} \\
& v_{i}^{k2} - v_{j}^{k2} \le w_{ij}^{k} \qquad \forall (i,j) \in E
\end{aligned}
$$

보조경로에 대한 부문제는 최단경로문제(Shortest Path Problem)의 쌍대문제와 같고, 주경로도에 대한문제도 U_k가 고정되면 최단경로문제의 쌍대문제와 같다.

이 문제에서는 1단계로 U_k가 고정시킨 상태에서 꼬리표법(Labeling Method)을 이용하여 W_{ij}^{k}를 증가시키며, 2단계로 U_k의 증가는 목적함수식의 감소를 가져오므로 목적함수에서의 감소분 이상으로 $V_{D(k)}^{kp}$를 증가시킬 수 있는 U_k를 증가시킨다. 3단계로 P_{ij}에 대해서는 P_{ij}의 증가도 목적함수 값의 감소를 가져오므로, 최단경로의 길이의 증가량의 합이 P_{ij}의 증가량보다 큰 경우를 택하여 P_{ij}를 증가시킨다.

5) 多段階 네트워크 디자인 문제의 쌍대해법 (A Dual-based Algorthm for Multi-level Network Design)

노드의 성격에 따라 여러단계의 級數를 주고, 각 노드들은 그 노드의 급수이상인 노드들의 아크연결방법에 의해 연결되어지는 경우의 문제이다. Balakrishnan과 Mirchandani[4]는 단계가 2인 경우를 연구하였는데 노드들은 1급 노드(Primary Node)와 2급노드(Secondary Node)로 나뉘어 진다. 1급 노드들은 1급 아크들에 의해 연결되어야 하고 2급노드들은 1급 아크, 혹은 2급 아크들에 의해 연결된다. 이 문제를 정수계획모형으로 모형화하면 다음과 같다.

$$\text{(P5)}\quad \text{Min} \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} b_{ij}y_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i\in N} f_{ij}^{k} - \sum_{i\in N} f_{ji}^{k} = \begin{cases} -1, i=1 \\ 1, j=k \\ 0, j=k, \end{cases} \qquad \forall j\in N,\ k\in K\cup S$$

$$f_{ij}^{k} \le x_{ij}, \qquad \forall (i,j)\in A,\ k\in S$$

$$f_{ij}^{k} \le x_{ij} + y_{ij}, \qquad \forall (i,j)\in A,\ k\in S$$

$$x_{ij}^{k}, y_{ij} = 0 \text{ or } 1, \qquad \forall (i,j)\in A$$

$$f_{ij}^{k} \ge 0, \qquad \forall (i,j)\in A,\ k\in K\cup S$$

여기에서 X_{ij}는 1급 아크를 설치하느냐에 관련된 0,1변수이고 Y_{ij}는 2급 아크를 설치하느냐에 관련된 0,1 변수이다. P는 1급 노드의 집합이며, S는 2급 노드의 집합이다.

이 문제에서는 우선 이 문제가 가지고 있는 특성을 이용하여(6개의 특성을 이용하였음) 문제를 簡略化 시킨다음 다음과 같은 쌍대문제를 구하게 된다.

$$\text{(D5)}\quad \text{Max} \sum \pi_k^k$$

$$\text{s.t.}\quad \pi_j^k - \pi_i^k \le \alpha_{ij}^k \qquad \forall (i,j)\in A,\ k\in P$$

$$\pi_j^k - \pi_i^k \le \beta_{ij}^k \qquad \forall (i,j)\in A,\ k\in S$$

$$\sum_{k\in P} \alpha_{ij}^k + \sum_{k\in S} \beta_{ij}^k \le a_{ij} \qquad \forall (i,j)\in A$$

$$\sum_{k\in S} \beta_{ij}^k \le b_{ij} \qquad \forall (i,j)\in A$$

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij} \ge 0, \qquad \forall (i,j)\in A,\ k\in P\cup S$$

위의 쌍대문제를 푸는 해법으로는 Balakristian, Magniti, Wong[3]의 꼬리표법(Labeling method)을 변형하여 풀이하였으며, 添加過程(Add Procedure)과 脫落過程(Drop Procedure)을 이용하여 휴리스틱(Heuristic) 방법을 이용하여 改善된 해를 구하였다.

6) 純粹 네트워크문제의 쌍대해법 (Dual Algorithms for Pure Network Problems)

Ali, Padman, Thiagarajan[1]은 容量이 있는 최소비용 네트워크 문제(The Capacitated Minimum Cost Network Flow Problem)의 쌍대단체법을 연구하였다. 아울러 그들은 아크의 용량이 변했을 경우와 비용이 변화하는 경우의 쌍대 再最適化過程(Dual Reoptimization Procedure) 해법을 연구하였다. 이들은 雙對團體法에서 進入變數(Entering Variable)의 결정과 脫落變數(Leaving Variable)를 결정하는데 cut-sets의 概念을 이용하여 효율적으로 처리하였다. 이들이 다룬 일반적 형태의 네트워크 모형은 다음과

같다.

$$\{\min CX \mid AX = r,\ 0 \le X \le U\}$$

여기에서 A:노드와 아크의 연결관계를 나타내는 인시던스 매트릭스(Incidence Matrix)
이때 윗문제의 쌍대문제는 다음과 같다.

$$\{\max r\pi - u\lambda \mid \pi A - \lambda \le C,\ \lambda = 0\}$$

이들은 이처럼 일반적 형태의 네트워크 모형을 설정하였으며 Cut-Sets의 개념을 도입하여 쌍대단체법의 진입변수, 탈락변수를 결정하는 과정을 개발하였고, 이 문제에 효율적으로 적용되는 쌍대단체법을 연구하였다. 더불어 r,u,c등의 계수가 변화되었을 때 再最適化(Reoptimization)를 하게되는데,容量(u)이 변화하는 경우와 비용(c)이 변화하는 경우에 적용되는 재최적화해법(Reoptimization Algorithns)을 연구하였다.

3. 네트워크 모형의 라그랑지안 쌍대향상 해법 (Lagrangian Dual-Ascent Algorithms for Network Design Problems)

라그랑지안 쌍대향상 방법에서는 특정한 제약식이 문제구조를 복잡하게 만들 때 이 제약식에 라그랑지안 쌍대변수를 곱하여 목적식으로 올린 상태에서 좀 더 간단한 제약식 구조에서 문제를 풀면서 라그랑지안 쌍대변수를 調整해 간다.
즉 原問題를 (P)라 할 때

$$(P)\ \min\ \{fx \mid Ax \ge b,\ Cx \ge d,\ x_i = 0 \text{ or } 1,\ \forall i\}$$

이 문제에서 ($x \ge d$)로 표시되는 제약식 때문에 전체 제약식의 구조가 복잡해지면 일단 이 제약식을 다음과 같이 목적함수식으로 올린다.

$$(LR_w)\ L(w) = \min_x\ \{fx \mid w(d-Cx) \mid Ax \ge b,\ x_i = 0 \text{ or } 1,\ \forall i\}$$

이때 라그랑지안 쌍대문제는 다음과 같이 된다.

$$(LD_w)\ \max_{w \ge 0}\ L(w)$$

w를 조정하는 방법으로는 Subgradient 방법이나 쌍대향상방법을 주로 쓰게 되는데, 주어진 w에 대해 L(w)를 푼다음 최적해를 통해 w를 향상시키는 방향을 구한 후 그다음 w값을 구하는 방법을 되풀이 하여, 더 이상 W를 향상시킬 수 없을 때까지 반복하여 (LD_w)를 풀게 된다.

1) 디그리가 제약된 최소걸침나무의 해법 (The Degree-constrained Minimum Spanning Tree Problem)

이 문제는 널리 알려진 최소걸침나무의 문제에 한 노드에서 다른 노드들로 연결하는 아크의 수를 제한하는 것으로 Volgenanti[11]가 연구하였다. 이 문제의 정수계획모형은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\text{(P6)}\quad & \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} & & \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j\in J} x_{ij} \le b_i, & i\in I \quad & (1)\\
& \sum_{j\in J} x_{ij} \ge 1, & i\in I \quad & (2)\\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ij} = 1, & \forall N\subset V \quad & (3)\\
& x_{ij} = 0 \text{ or } 1, & i\in I, j\in J \quad & (4)
\end{aligned}
$$

여기서 제약식 (2), (3)은 전통적인 최소걸침나무의 제약식을 나타내며, 제약식 (1)은 한 노드에서 다른 노드들로 연결되어 있는 아크의 수가 제한되어 있음을 나타낸다. 제약식 (1)을 라그랑지안 쌍대변수를 이용하여 목적함수로 올리면 다음과 같은 문제가 구해진다.

$$
\begin{aligned}
\text{(L6)}\quad & \text{Max} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} (c_{ij}+\pi_i)x_{ij} - \sum_{i\in I} \pi_i b_i & \\
\text{s.t.}\quad & \pi_i \ge 0, & i\in I,\\
& \text{and (2), (3) and (4)} &
\end{aligned}
$$

이 문제는 π_i가 고정되어 있을 때 전통적인 최소걸침나무문제를 나타낸다. 따라서 이 문제에서는 π_i를 향상시켜가면서 최소걸침나무문제를 푸는데, π_i를 향상시키는 방법으로는 Volgenant와 Jonker[12]의 방법을 이용하였으며, 최종적으로 分段探索法(Branch and Bound Method)을 이용하여 최적해를 구하였다.

2) 최소걸침나무문제를 이용한 스타이너 트리문제의 해법 (An SST-Based Algorithm for the Steiner Problem)

Beasley[5]는 스타이너 트리문제를 최소걸침나무 문제를 이용하여 모형화 하였다.

이 과정을 설명하기 위해 기호부터 살펴보면, V는 전체 노드집합을 나타내며 K는 연결되어야 할 노드집합을 나타내고, V-K는 스타이너 노드집합을 나타낸다. E는 方向性이 없는 아크 집합을 나타낸다. 모형화 하는 과정을 살펴보면 다음과 같다.

(a) 人爲노드(Artificial node) 0를 추가한다.
(b) V-K에 속하는 모든 노드 i에 0비용을 갖는 아크 (0, i)를 추가한다.
(c) K에 속하는 노드 1에 0비용을 갖는 아크 (0, 1)을 추가한다.
(d) 아크 (0, i)로 연결되는 V-K에 속한 모든 노드 i는 디그리(Degree)가 1이라는 조건을 추가한다.

이상과 같은 절차를 걸쳐 최소걸침나무의 모형을 설정하면 스타이너 트리문제의 모형이 되는데, 이의 정수계획모형은 다음과 같다.

$$\text{(P7)}\quad \text{Min} \sum_{(i,j)\in E_0} c_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad [x_{ij}] \quad \text{forms a spanning tree on} \quad (V_0, E_0)$$

$$x_{ij} + x_{pq} \le 1 \qquad \forall (p,q)\in P_i \quad \forall i \in V-K \quad \text{(a)}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in E_0$$

위 문제의 제약식 (a)를 목적함수로 올리면 다음과 같은 라그랑지안 문제가 구해진다.

$$\text{(L7)}\quad \text{Min} \sum_{(i,j)\in E_0} c_{ij} y_{ij} - \sum_{i\in V\text{-}K} \sum_{(p,q)\in P} s_{ipq}$$

$$\text{s.t.}\quad [x_{ij}] \quad \text{forms a spanning tree on} \quad (V_0, E_0)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in E_0$$

where

$$C_{ij} = \begin{cases} \sum_{(p,q)\in P} s_{jpq} & \text{if } i=0 \text{ and } j\in V\text{-}K \\ = c_{ij} + s_{iij} & \text{if } (i,j)\in E \text{ and } i\in V\text{-}K \text{ and } j\in K \\ = c_{ij} + s_{jij} & \text{if } (i,j)\in E \text{ and } i\in K \text{ and } j\in V\text{-}K \\ = c_{ij} + s_{iij} + s_{jij} & \text{if } (i,j)\in E \text{ and } i\in V\text{-}K \text{ and } j\in V\text{-}K \\ = c_{ij} & \text{otherwise} \end{cases}$$

위의 문제는 Subgradient 방법을 이용하여 S_{ipq}를 변화시켜가면서 최적해를 구하게 된다.

3) 노드에 加重値가 있는 스타이너트리문제 (The Node-Weight Steiner Tree Problem)

일반적인 스타이너 트리문제에 노드에 관련된 加重値를 주어 특수한 형태의 스타이너 트리문제를 Segev[10]가 연구하였다. Segev는 이 문제를 트리형태의 모형과 흐름중심의 모형의 두가지로 모형화 하였는데, 그 중 트리형태의 모형을 정수계획모형으로 살펴보면 다음과 같다.

$$(P8)\ \text{Min}\ \sum_{i\in I} c_i X_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} Y_{ij}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i\in I} Y_{ij} = X_j, \qquad j\in T \qquad (1)$$

$$\sum_{i\in N} f_{ij} - \sum_{i\in T} f_{ji} = X_j \qquad j\in J \qquad (2)$$

$$f_{ij} \le (|N| - 1) Y_{ij} \qquad i\in N, j\in T \quad (3)$$

$$f_{ij} \ge 0,\ Y_{ij},\ X_j \in \{0,\ 1\} \qquad i\in N,\ j\in T \quad (4)$$

여기에서 G(N,E) : 전체 노드 N과 아크들의 그래프〔N=S∪T, S : 스타이너 노드의 집합, E : 방향성없는 아크의 집합〕

$E' \le E$

$N' = S\cup T\ (T' \le T)$

$A' \le A$ (A : 방향성 있는 아크의 집합)

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i\in N \\ 0, & \text{O/W} \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if}(i,j)\in A' \\ 0, & \text{O/W} \end{cases}$$

f_{ij} : 아크 (i,j)의 흐름의 양

목적함수식은 아크설치비용과 노드설치비용의 합을 최소화함을 나타낸다. 제약식 (1)은 노드가 트리에 속할 때 정확히 한개의 아크만 그 노드에 들어가야 함을 나타낸다.(방향성을 고려하는 상황임) 제약식 (2), (3)은 사이클을 방지하는 작용을 한다. 위 모형의 제약식 (2)를 목적함수으로 올리면 라그랑지안 문제는 다음과 같이 된다.

$$(L8)\ \text{Min}\ \sum_{i\in T} a_i X_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in T} c_{ij} Y_{ij} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} f_{ij}$$

s.t. (1), (3), and (4).

여기에서

$$a_i = c_i - \lambda_i$$

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda_j - \lambda_i, & \text{if } i\in T,\ j\in T \\ \lambda_j, & \text{if } i=1,\ j\in T \end{cases}$$

Y_{ij}^*를 위 문제의 Y_{ij}의 최적해라 할 때 f_{ij}의 최적해는 다음과 같다.

$$f_{ij}^* = \begin{cases} 0 & \text{if } Y_{ij}^* = 0 \\ 0 & \text{if } Y_{ij}^* = 1 \text{ and } d_{ij} \ge 0 \qquad (a) \\ |N-1| & \text{if } Y_{ij}^* = 1 \text{ and } d_{ij} < 0 \end{cases}$$

따라서 위 모형에서 f_{ij}를 대체하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\text{(L8.1)} \quad \text{Min} \sum_{i\in T} a_i X_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} f_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in I} Y_{ij} = X_j, \qquad j\in T$$

$$Y_{ij},\ X_j \in \{0, 1\} \qquad i\in N, j\in T$$

위 문제의 최적해를 구하는 과정은 다음과 같다.

Algorithm

1. For every $j\in T$ do steps 2-3
2. h_{ij} = Min $\{h_{ij}\}$
3. if $(a_j + h_{ij}) \geq 0$ then,

   $X_j = 0$ and $Y_{ij} = 0$, $i\in N$

   else

   $X_j = 1$

   $Y_{ij} = 1$

   $Y_{ij} = 0$, $i\in N$, $i\neq j$

여기에서 f_{ij}값은 식 (a)의 관계를 이용하여 구한다. 이후로는 Subgradient 방법과 分段探索法을 이용하여 최적해를 구한다.

4) 오목 費用函數를 갖는 네트워크 흐름문제 (The Concave Cost Network Flow Problem)

각 노드쌍간의 흐름이 여럿(Multiple Commodities) 있으며, 아크의 총흐름에 따라 발생하는 變動費가 부분적 線形오목함수(Piecewise Linear Concave Function)의 형태를 취하게 되는 경우이다. 이 문제는 Balakrishnan과 Graves[2]가 연구하였는데, 정수계획모형은 다음과 같다.

$$\text{(P9)} \quad \text{Min} \sum_{(i,j)}\sum_{r=1}^{R} c_{ij}^{r}\left(\sum_{k=1}^{K} x_{ij}^{kr}\right) + \sum_{(i,j)}\sum_{r=1}^{R} F_{ij}^{r} y_{ij}^{r}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j}\left(\sum_{r} x_{ij}^{kr}\right) - \sum_{j}\left(\sum_{r} x_{ji}^{kr}\right) = \begin{cases} +d_k & \text{if } i=O(k) \\ -d_k & \text{if } i=D(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \forall k, i \qquad (1)$$

$$x_{ij}^{kr} \leq d_k y_{ij}^{r} \qquad \forall (i, j), r, k \qquad (2)$$

$$\sum_{k} x_{ij}^{kr} \geq M_{ij}^{r-1} y_{ij}^{r} \qquad \forall (i, j), r \qquad (3)$$

$$\sum_{k} x_{ij}^{kr} \leq M_{ij}^{r} y_{ij}^{r} \qquad \forall (i, j), r \qquad (4)$$

$$\sum_r y_{ij}^r \le 1 \qquad \forall(i,j), \text{ and} \qquad (5)$$

$$y_{ij}^r \in \{0,1\}, x_{ij}^{kr} \ge 0 \qquad \forall(i,j), r, k \qquad (6)$$

목적함수는 부분적 선형함수임을 나타낸다. 제약식 (2)는 $X_{ij}^{kr}>0$인 경우의 r번째 領域에서 固定費 F_{ij}^r이 발생함을 나타내고, 제약식 (3), (4)는 r번째 영역의 上限과 下限을 나타낸다. 제약식 (5)는 한 영역만 선택되어짐을 나타낸다. 흐름維持式(Flow Conservation Equation)인 제약식 (1)을 라그랑지안 쌍대변수 V_i^k를 이용하여 목적함수식으로 올리면 라그랑지안 문제는 다음과 같다.

$$\text{(L9)} \quad \text{Min} \sum_{(i,j)}\sum_i\sum_k \left(c_{ij}^r + v_i^k - v_j^k\right)x_{ij}^{kr} + \sum_{(i,j)}\sum_r F_{ij}^r y_{ij}^r + \sum_k d_k v_{D(k)}^k$$

$$\text{s.t} \quad (2)-(6)$$

이때 윗문제는 아크에 따라 독립적인 문제로 분해할 수 있는데, 각 아크에서는 한개 이하의 領域 r이 선택되어야 한다. r이 선택되면 $Y_{ij}=1$, $Y_{ij}^{r}=X_{ij}^{kr}=0(r\neq r)$이 되며 X_{ij}^{kr}을 구하는 문제는 다음과 같이 된다.

$$z_{ij}^r(V) = \min \sum_k c_{ij}^{kr} x_{ij}^{kr} + F_{ij}^r$$

$$\text{s.t.} \quad x_{ij}^{kr} \le d_k \qquad \forall k$$

$$\sum_k x_{ij}^{kr} \le M_{ij}^r$$

$$\sum_k x_{ij}^{kr} \ge M_{ij}^{r-1}$$

$$x_{ij}^{kr} \ge 0 \qquad \forall k$$

여기에서 $C_{ij}^{kr} = C_{ij}^r + V_i^k - V_j^k$

이 문제는 상한과 하한이 있는 배낭문제(Knapsack Problem)가 되어 쉽게 풀어진다.

Balakrishnan과 Graves[2]는 쌍대향상방법과 Subgradient 방법을 이용하여 복합적 해법을 개발하였다. 이 해법에서는 첫번째로 $g_{ij} = C_{ij}^R + (F_{ij}^R/M_{ij}^R)$(R:r의 마지막 영역)의 값을 이용하여 노드쌍간의 최단거리를 구한다. 이때 최초의 하한(Initial Lower Bound)은 $Z(V) = \Sigma d_k\ V_{D(k)}^K$ ($V_{D(k)}^K$:최단거리)가 된다. 쌍대향상과정에서는 이 최초하한을 향상시키는데 $Z_{ij}(V)$값은 변화하지 않게하면서 $V_{D(k)}^k$의 값들을 증가시킨다. 이때 V_i^k값들을 라그랑지안 목적함수 $Z(V)$가 더 이상 증가되지 않을 때까지 반복하여 증가시킨다.

4. 結 論

네트워크 문제는 산업전반에 걸쳐 일어나는 현상으로 수많은 학자들이 여러 대상을 상대로 연구하고 있다. 네트워크 문제들은 대개 그 문제의 크기가 상당히 커서문제를 푸는데 많은 노력이 소요되며, 문제에 알맞는 해법을 구하는 노력이 계속되고 있다.

최근에는 쌍대구조를 이용한 해법연구가 활발히 진행되고 있는데, 그 방법으로는 원문제 전체를 쌍대문제로 바꾸어 쌍대문제의 구조를 이용하여 해를 구하는 방법과, 원문제의 제약식 일부를 라그란지안 쌍대변수를 이용하여 목적함수를 올리고 비교적 간단해진 제약식 구조를 이용하여 해를 구하는 방법이 있다. 쌍대해법을 적용한 대표적인 연구의 요약된 형태는 표1과 같다. 표1에서와 같이 많은 문제를 대상으로 연구가 되어지고 있으나 아직까지 현실문제 모두를 연구하지는 못한 상태이며, 앞으로 연구되어야 할 문제들을 더욱 복잡한 구조를 지니고 있다. 따라서 보다 복잡한 현실문제를 위하여 본 조사연구에서 다룬 여러가지 연구를 바탕으로 하여 보다 많은 확대연구가 필요하다 하겠다.

문 제	연 구 자	Relaxation	쌍대향상방법
스타이너 트리(Steiner Tree)	Wong[13] Liu[8]	L.P L.P	Dual Ascent Dual Ascent (Projection)
최소걸침나무이용 스타이너 트리 (SST-based Steiner Tree)	Beasley[5]	L.P	Subgradient
노드 가중치 스타이너 트리 (Node-weight Steiner Tree)	Segev[10]	Lagrangian	Subgradient
디그리제약 최소걸침나무 (Degree-constrained MST)	Volgenanti[11]	Lagrangian	Dual Ascent
네트워크 디자인(Network Design)			
용량제한 없음(Uncapacitated)	Balakrishnan, Magniti, Wong[13]	L.P	Dual Ascent
2階位 계층구조 (Two level Hierachical:Full Mesh)	Chung, Tcha[6]	L.P	Dual Ascent
生存度 강화(Survival)	조용철[14]	L.P	Dual Ascent
多段階(Multi-level)	Balakrishnan, Mirchandani[4]	L.P	Dual Ascent
오목비용함수(Concave Cost)	Balakrishnan, Graves[2]	Lagrangian	Subgradient
순수 네트워크(Pure Network)	Ali, Padman, Thiagarajan[1]		

〈표 1〉. 요 약

참 고 문 헌

1. A.I.Ali, R. Radman and H. Thiagarajan, "Dual algorithms for Pure network Problems", Opns. Res. 37(1988), 159-171.
2. A. Balakrishnan and S.C. Graves, "A Composite Algorithm for a Concave-Cost Network Flow Problem", Networks 19(1989), 175-202.
3. A. Balakrishnan and T.L. Magnanti, and R.T. Wong, "A Dual-Ascent Procedure for Large-Scale Uncapacitated Network Design", Opns. Res. 37(1989), 716-740.
4. A. Balakrishnan and R. Mirchandani, "A dual-based algorithms for multi-level network Design", Working Paper(1991).
5. J.E. Beasley, "An SST-based Algorithm for the Steiner Problem in Graphs", Networks 19(1989), 1-16.
6. S.H. Chung, Y.S. Myung and D.W. Tcha, "Simultaneous Design of a Network with a Two-Level Hierarchical Structure", To appear in Europ. J. Opnl. Res.
7. D.Erlenkotter, "A Dual-based Procedure for Uncapacitated Facility Location", Opns. Res. 26(1978), 992-1009.
8. W. Liu, "A Lower Bound for the Steiner Tree Problem in Directed Graphs", Networks 20(1990), 765-778.
9. G.L. Nehmhouser and L.A. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization John Wiley & Sons, 1988.
10. A.Segev, "The Node-weighted Steiner Tree Problem", Networks 17, 1-17, 1987.
11. A. Volgenant, "A Lagrangean Approach to the Degree-Constrained Minimum Spanning Tree Problem", Europ. J. Opnl. Res. 39, 325-331, 1989.
12. A. Volgenant, and R. Jonker, "The Symmentric Traveling Salesman Problem and Edge Exchange in Minimal 1-Trees", Europ. J. Opnl. Res. 12, 394-403, 1983.
13. R.T. Wong, "A Dual Ascent Approach for Steiner Tree Problems on a Directed Graph, Math. Prog. 28, 271-287, 1984.
14. 조용철, "생존도가 강화된 중앙집중형 망의 설계에 관한 연구", 한국과학기술원 석사 학위논문(1991).