

Weight function의 광탄성 측정

주 석 재

기계공학과

(1984. 3. 7 접수)

〈요 약〉

Green's function이란 일반적으로 위치한 점하중이 얼마만큼의 응력확대계수를 발생시키는가 알려주는 것이다. weight function은 균열이 있는 물체에 대한 Green's function의 한 형태라 생각할 수 있다. weight function만 알려지면 응력확대계수를 계산하는 것은 간단한 적분이 되고 균열이 없었을 때 균열선 상에서의 응력만 구하는 것이 필요하다.

weight function을 광탄성적으로 측정하는 방법을 제시하였다. 하중은 강선을 통하여 균열면에 가했다. 광탄성적으로 응력확대계수를 측정하는데 Smith의 방법을 이용하였다.

Photoelastic Determination of Weight Function

Chu, Seok Jae

Dept. of Mechanical Engineering

(Received March 7, 1984)

〈Abstract〉

A Green's function contains information on the effect on K of a generally positioned point force. A weight function may be thought of as a form of the Green's function for a cracked body. When the weight function is known, the calculation of K is reduced to a very simple integral and requires only the calculation of the stress along the crack line in the uncracked body.

A photoelastic determination method of the weight function is shown. Loads are applied through steel wires on the crack surface. The Smith method is used to determine photoelastically the stress intensity factor K .

I. 서 론

응력확대계수(stress intensity factor)란 균열을 가진 구조 부품의 정적 강도, 균열의 임계 길이, 피로에 있어 균열의 성장률을 계산하는데 이용되는 변수다. 실제적인 문제에 있어 구조 형태나 하중이 종종 복잡하여 핸드북에서 얻을 수 있는 응력확대계수의 해에는 한계가 있다. 이 때는 Green's function이나 weight function을 이용하는 것이 효과적인 수가 있다. Green's function 방법이란 균열면에

분포하중이 작용하는 문제를 균열면에 점하중이 작용한 결과를 종합하여 푸는 것이다. weight function은 Green's function의 한 형태라고 생각할 수 있다. weight function은 균열의 진전에 대한 스트레인 에너지 방출률(strain energy release rate)이 응력확대계수와 관련이 있는 것을 이용하여 구해진다. 균열의 진전에 대한 균열면 변위의 변동과 응력확대계수만 구하면 같은 구조 형태에 대하여는 하중이 어떻게 작용하는 것이든지 응력확대계수를 구하는 것은 간단한 적분에 귀착된다.

균열을 가진 구조 형태에 각각의 다른 하중, 즉

균열 인장, 순수 굽힘, 3점 굽힘 등등, 이 작용할 때 각각의 응력확대계수의 해 사이에 어떤 관련성이 있는지 파악하기가 어려웠다. 바로 각각의 응력확대계수 사이를 관련짓는 것이 weight function 인 것이다. weight function 은 구조 형태에만 의존하고 하중과는 무관하다.

Green's function 이나 weight function 이 균열면에 하중이 작용하는 경우에만 한정되지는 않는다. 실제로 균열면에 하중이 작용하지 않는 경우도 중첩법을 이용하여 균열면에 하중이 작용하는 경우로 바꿀 수 있다.⁽¹⁾ 단 응력확대계수를 구하는 것에 관한다.

1970년경 Bueckner⁽²⁾는 weight function 을 이용하여 응력확대계수를 구하는 방법을 제안하였다. 1976년 Labbens 등⁽³⁾은 유한요소법을 사용하여 유한폭을 가진 평판이나 원통에 대하여 weight function 의 실제적인 계산 방법을 제안하였다. 1978년 Petroski 등⁽⁴⁾은 커꾸로 응력확대계수의 해가 알려진 것에 대하여 적당한 변위장을 정하여 weight function 을 계산하는 방법을 제안하였다. 1981년 Bar-Tikva 등⁽⁵⁾은 레이저 간섭제로 균열의 길이에 대한 균열면 변위의 변동을 측정하여 weight function 을 구하였다.

본 논문에서는 응력확대계수의 평탄성 측정법⁽⁶⁾을 이용하여 weight function 의 평탄성 측정을 시도하였다.

II. 이 론

1. 중첩법

중첩법을 이용하여 Fig.1에서 c)를 a)와 b)로 나

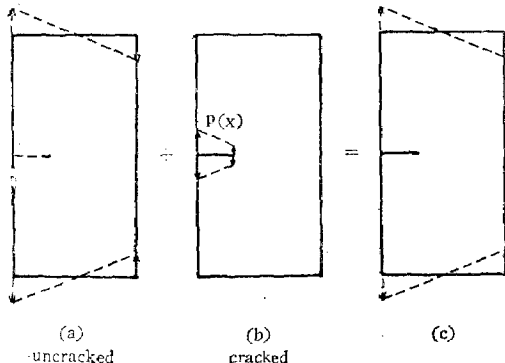


Fig.1 Superposition for an edge-strip in bending

누어 생각할 수 있다. a)는 균열이 없는 것이고 b)는 균열이 없었을 때 존재했던 응력, 즉 a)의 응력과 같은 압력 $p(x)$ 가 균열면에 작용하는 것이다. 그런데, a)는 균열선단에 응력의 특이성이 없어 응력확대계수는 0이다. 따라서 응력확대계수에 관하여 b)와 c)는 같다.

2. Green's function

Fig.2와 같이 한 쌍의 하중 F 가 좌표 x 인 곳에서 작용하여 응력확대계수 $K_1(x, a)$ 를 발생시킨다. Green's function $g(x, a)$ 는 단위두께 단의 하중 F/t 가 얼마만큼의 응력확대계수 $K_1(x, a)$ 를 발생시키는가를 뜻한다.

$$g(x, a) = \frac{K_1(x, a)}{(F/t)} \quad (1)$$

따라서 Fig.1 b)의 응력확대계수는 Green's function $g(x, a)$ 를 넣어 표시하여

$$K_1(a) = \int_0^a g(x, a) p(x) dx \quad (2)$$

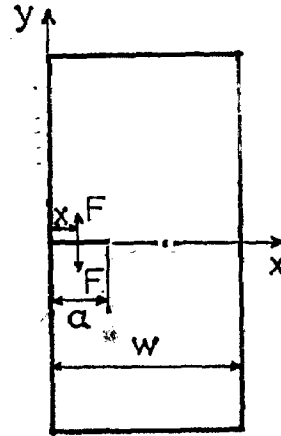


Fig.2 Plane body with a straight crack

3. weight function

응력확대계수 K_1 과 스트레인 에너지 방출률 G 와의 관계는

$$K_1 = (HG)^{1/2} \quad (3)$$

여기서

$$H = \begin{cases} E, & \text{plane stress} \\ E/(1-\nu^2), & \text{plane strain} \end{cases}$$

Fig.1 b)의 스트레인 에너지 U 는

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a p(x) v(x, a) dx \quad (4)$$

여기서 v 는 균열면의 y 방향으로의 변위다.

균열의 전진에 대한 스트레인 에너지 방출률 G 는

$$G = \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{1}{2} \int_0^a p(x) \frac{\partial v(x, a)}{\partial a} dx \quad (5)$$

(3)식을 (5)식에 대입하여

$$K_1 = \int_0^a p(x) h(x, a) dx \quad (6)$$

여기서

$$h(x, a) = \frac{H}{2K_1} \frac{\partial v(x, a)}{\partial a} \quad (7)$$

$h(x, a)$ 가 weight function이다.

(7)식과 (2)식을 비교하여 보면 $h(x, a)$ 가 $g(x, a)$ 와 역할이 같은 것을 알 수 있다.

III. 실험장치 및 방법

광탄성 실험장치로는 보편적인 산광 polariscope를 사용하였다. 광탄성 모형은 polycarbonate 평판, 두께 $\frac{1}{8}$ in 짜리로 만들었다. 광탄성 모형의 균열은 얇은 톱과 번도칼로써 되도록 균열의 폭은 좁고 균열선단은 날카롭게 하였다. 균열면에 하중을 가하기 위하여 가는 강선 직경 0.8mm 짜리를 이용하였다. 강선이 균열면에 걸칠 여유로서 직경 2mm 내의 구멍을 뚫는데 구멍은 변의상 5mm의 간격을 두었다. (Fig. 3 참조) 하중은 5kg 짜리 추 2~3개

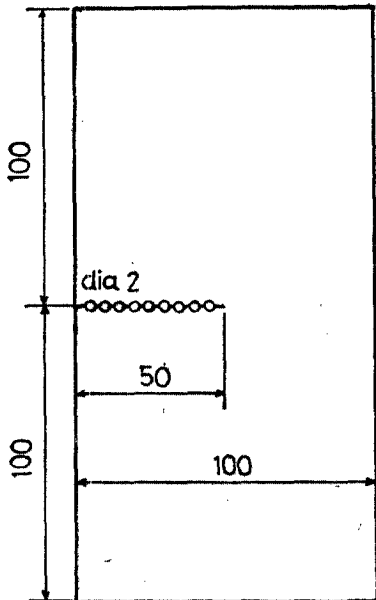


Fig. 3 Details of the photelastic model (mm)

로 가하였다. 단색광을 만들기 위하여 사용한 필터는 red filter 인데 polycarbonate의 fringe value를 측정하였더니 43.5 lb/in 였다.

균열길이는 20mm에서 50mm까지 10mm씩 늘려갔다. 각각의 균열길이에 대하여 균열면 위에서 하중을 옮겨가며 그때그때 균열선단 부근의 fringe pattern을 촬영하였다.

광탄성 fringe pattern을 가지고 응력확대계수 구하는 방법은 Smith⁽⁶⁾의 방법을 따랐다. 이 방법의 특징은 측정점을 여러 점 취하여 균열선단에 extrapolate하여 응력확대계수를 얻는 것이다. 이 방법을 약속하면 균열선단부근의 응력장으로부터 주응력의 차, $\sigma_1 - \sigma_2$ 를 구해 보면 식(8)과 같이 응력확대계수의 항과 비특이응력(nonsingular stress)이 포함된 항으로 이루어졌다. 즉, $\theta = 90^\circ$ 일 때

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sqrt{8\pi r} = K_1 + B\sqrt{8\pi r} \quad (8)$$

여기서 K_1 는 응력확대계수 B 는 비특이응력을 포함한 상수다.

광탄성 fringe의 차수 N 과 균열선단으로부터의 반경 r 을 측정하여 $\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sqrt{8\pi r}$ 을 $\sqrt{8\pi r}$ 에 대하여 plot한 뒤 $r=0$ 에서의 값을 읽으면 비특이응력이 포함된 항은 없어지고 응력확대계수만 남는다. 여기서 주응력의 차는 광탄성 관계식 $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_s}{t}$ 를 이용해 계산한다. f_s 는 fringe value, t 는 모형의 두께다.

IV. 실험결과 및 고찰

균열면에 하중을 가했을 때의 광탄성 fringe pattern은 Fig. 4와 같다. 하중점에서 상하로 뻗은 굵은 직선은 하중을 전달하는 강선이다. 균열선단의 바로 옆 구멍에 하중을 가했을 때는 균열선단 부근의 fringe pattern이 심하게 찌그러져 응력확대계수의 측정이 곤란하였다. 참고문헌(3)의 유한요소에 의한 방법에서도 균열선단 부근에서는 weight function의 특이성때문에 계산이 곤란하다고 언급하였다.

응력확대계수를 구하기 위해 Fig. 5와 같이 $\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sqrt{8\pi r}$ 을 $\sqrt{8\pi r}$ 에 대하여 plot한 뒤 $r=0$ 에 extrapolate하였다. fringe order가 높아질수록 fringe의 반경 r 이 작아져 측정하기가 곤란하고 부정확하여 진다. 이런 정도가 떨어지는 측정점,

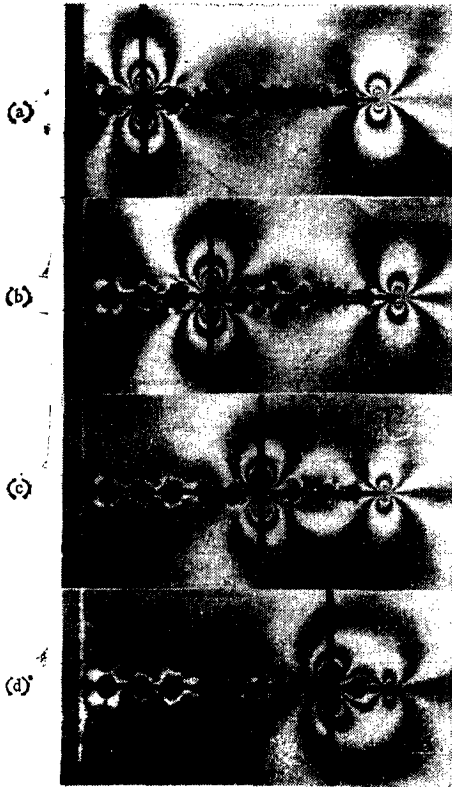


Fig. 4 Photoelastic fringe patterns $a=50\text{mm}$
 $F=10\text{kg}$

- a) $x=10\text{mm}$
- b) 20
- c) 30
- d) 40

즉 균열선단에 최고 가까운 측정점은 extrapolate 할 때 비중을 적게 두었다.

weight function은 응력확대계수를 단위두께 당의 하중으로 나누어 계산하였다. 따라서 weight function의 단위는 $\text{in}^{-1/2}$ 이다. weight function은 위치와 균열길이에 따라 Fig. 6과 같이 변하였다. 여기서 실선은 Bueckner의 근사해⁽¹⁾⁽²⁾(오차 1% 내)다. 광탄성 측정값은 Bueckner의 근사해와 비교하여 10%의 비교적 고된 오차를 보였다. 일반적으로 응력확대계수의 광탄성 측정은 정도는 떨어진다.

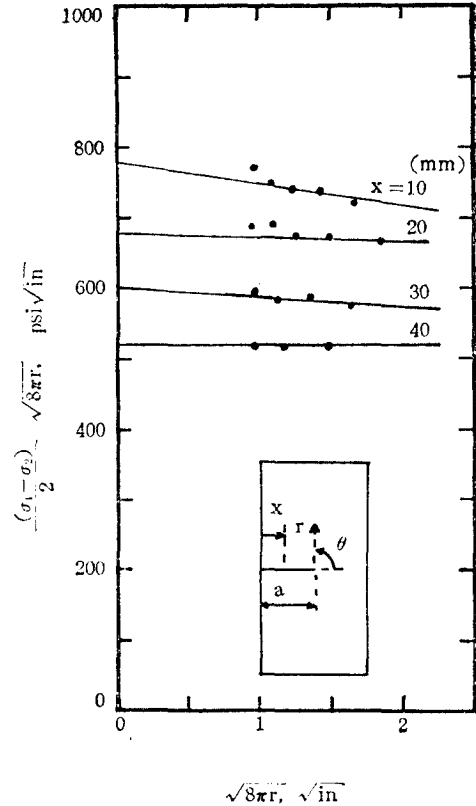


Fig. 5 Examples of extrapolation $a=50\text{mm}$
 $F=10\text{kg}$

Fig. 7과 같이 편이가 각각 다른 균열의 선단을 일치시켜 균열선단으로부터의 거리 d 와 균열길이 a 의 영향을 보기쉽게 하였다. weight function의 작은 균열선단 부근의 특이 영역 밖에서는 균열선단에서 멀어질수록 대체적으로 선형적인 증가를 보였다. 또 균열선단으로부터의 거리가 같은 점에 있어서는 균열길이가 길수록 weight function의 값도 증가하였다. 균열길이가 50mm인 것에 대한 weight function의 값은 균열길이가 30mm인 것에 비해 20%정도 증가하였다.

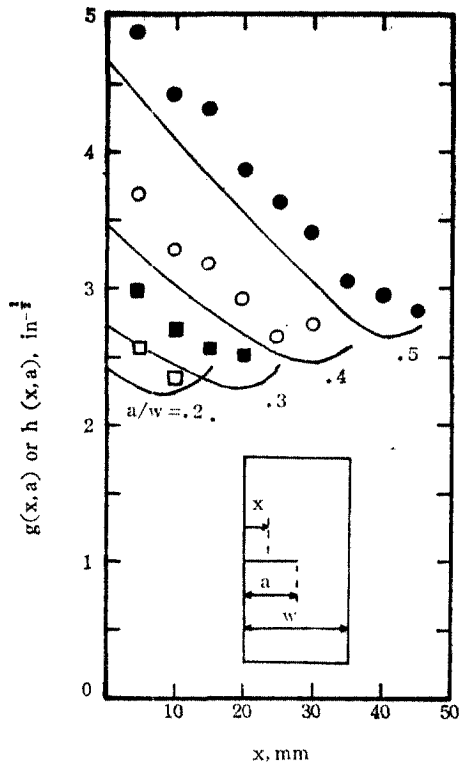


Fig. 6 Weight functions

- a=50mm
- 40
- 30
- 20
- ref. (2)

V. 결 론

균열을 가진 구조 형태에 하중이 다양하게 작용하는 문제를 다루기에 편리한 weight function을 구하는 실제적인 방법으로 광탄성 측정을 시도하여 다음의 결론을 얻었다.

1. 광탄성 측정의 실험적인 방법으로 weight function을 구하였다. 측정값은 10%정도의 고분오차를 보였다. weight function은 균열선단 부근에서 특이성이 있는데 이것의 광탄성 측정은 곤란하였다.

2. weight function의 값은 균열선단부근의 특이 영역 밖에서는 균열선단에서 멀어질수록 대체적으로 선형적인 증가를 보였다. 또 균열선단으로부터

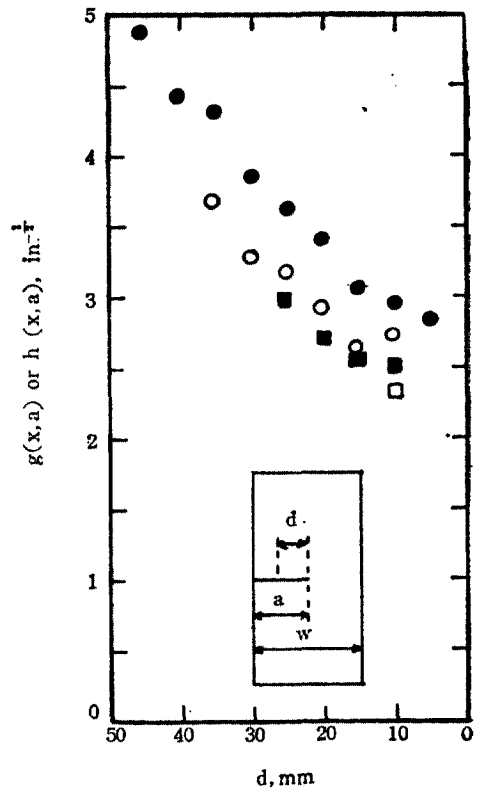


Fig. 7 Weight functions

- a=50mm
- 40
- 30
- 20

부터의 거리가 같은 점에 있어서는 균열길이가 길수록 weight function의 값도 증가하여다.

참 고 문 헌

1. Parker, A.P., The Mechanics of Fracture and Fatigue, E. & F.N. SPON LTD, 1981.
2. Bueckner, H.F., Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Chapter V., G. C. Sih, Ed., Noordhoff International Publishing, Leydn, The Netherlands, 1973.
3. Labbens, R., Pellissier-Tanon, A., and Heliot, J., "Practical Methods for calculating Stress intensity Factors Through Weight Functions," Mechanics of Crack Growth,

- ASTM STP 590, pp. 368—384, 1976.
4. Petroski, H. I., and Achenbach, J. D., "Computation of the Weight Function from a Stress Intensity Factor," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 10, pp. 257—266, 1978.
 5. Bar-Tikva, D., Grandt, A.F., Jr. and Palazotto, A.N., "An Experimental Weight Function for Stress intensity Factor Calibrations," *Experimental Mechanics*, pp. 371—378, 1981.
 6. Smith, C.W., Jolles, M. and Peters, W. H., "Stress Intensities for Cracks Emanating From Pin-loaded Holes", *Flaw Growth and Fracture*, ASTM STP 631, pp. 190—201, 1977.

부 록

Buecker⁽²⁾는 edge crack에 대한 weight function을 다음의 근사적인 간편한 형태로 나타냈다. (오차 1%내)

$$h(d) = d^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + m_1 \left(\frac{d}{a} \right) + m_2 \left(\frac{d}{a} \right)^2 \right\}$$

여기서 m_1 과 m_2 는 계수로서 상수다.

즉, $\left(\frac{d}{a} \right)$ 와 무관하다.

$$m_1 = A_1 + B_1 \left(\frac{a}{w} \right)^2 + C_1 \left(\frac{a}{w} \right)^6$$

$$m_2 = A_2 + B_2 \left(\frac{a}{w} \right)^2 + C_2 \left(\frac{a}{w} \right)^6$$

여기서 $A_1 = 0.6147$ $B_1 = 17.1844$ $C_1 = 8.7822$

$A_2 = 0.2502$ $B_2 = 3.2889$ $C_2 = 70.0444$

위의 근사는 $0 \leq \frac{a}{w} \leq 0.5$ 에 대하여 유용하다.