

유한한 접촉면적이 서로 미끄럼운동을 하고 있는 두 물체의 TEI에 미치는 영향

여태인
자동차공학과

<요 약>

반무한 강체위에서 미끄러지고 있는 반무한 스트립의 열탄성적 불안정성을 선형 섭동법을 사용하여 조사하였다. 마찰열 및 물체내에서의 열전달, 그 결과 생기는 접촉 압력의 변화등을 고려하였다. 스트립에 관한 Papkovitch-Fadle의 고유함수 및 열응력에 대한 특별해 등을 사용하여 섭동을 급수해의 형태로 표현하였다. 시간에 따라 지수적으로 증가하는 섭동형태를 가정하여 얻어지는 등차연립방정식에서 시스템이 불안정하게 되는 임계미끄럼속도를 구할 수 있었다. 수치적 결과를 두 반무한 평판 모델의 경우와 비교하였으며 유한한 접촉면적은 임계속도의 크기에 상당한 영향을 미친다는 것을 보였다.

The effect of finite contact area on the thermoelastic instability of sliding bodies

Taein Yeo
Dept. of Automotive Engineering

<Abstract>

The instability of a semi-infinite strip in sliding contact with a rigid half-plane is investigated using linear perturbation methods. Frictional heating and transient heat transfer in the bodies are treated along with the pressure produced on the contact area by these. Possible perturbations are expressed in the form of an eigenfunction series, using the Papkovitch-Fadle eigenfunctions for the strip and related eigenfunctions for the thermoelastic particular solution. Selection of perturbations that

can grow exponentially in time lead to a simultaneous homogeneous system of equations for the coefficient of the series with the sliding velocity involved. Numerical results are compared with those from the two half-planes model to demonstrate that the finite contact area has comparatively large effects on the critical sliding speed.

1 서 론

두 물체가 서로 미끄러지고 있을때 생성되는 마찰열 및 그에 의한 열변형과 접촉압력의 상호간섭은 정상상태에서 미끄러지고 있는 물체사이에 불균일한 접촉압력의 변화를 가져 올 수 있다. 이러한 불안정성은 일반적으로 TEL(Frictionally-excited thermoelastic instability)로 알려져 있으며 일반적으로 국부적인 고온을 일으켜 자동차의 브레이크, 클러치등의 표면균열을 일으키거나, 재질을 변화시켜 성능을 저하시킨다(Anderson & Knapp, 1989). 이현상은 또한 저주파 진동을 일으키는 원인이 된다(Kreitlow *et al*, 1985).

열탄성적인 불안정에 대한 이론적인 해석은 관련된 두 물체의 탄성문제와 열전달문제를 연계시켜야 가능하므로 매우 복잡하다. 따라서 초기의 연구는 시스템의 형상을 매우 이상화된 것으로 가정하여 이차원 해석을 하였다. 예를 들면 Lee와 Barber(1993)는 자동차용 디스크 브레이크의 TEI해석을 위해 두 반무한 평면 사이에서 미끄러지고 있는 무한 길이의 층(Layer)을 모델로 사용하였다. 또한 Dow와 Burton(1972)은 베인 펌프에 사용되는 블레이드의 TEI해석을 위해 균일한 접촉압력으로 서로 미끄러지고 있는 두 반무한 평면들에 작은 sine파 형태의 섭동(Sinusoidal Perturbation)을 가하여 미끄럼속도가 임계속도보다 클때는 전체 계가 불안정하고 임계속도는 가한 섭동의 파장과 관계가 있다는 것을 보였다. 이 때의 접촉선은 미끄럼속도에 직각이고 그 길이가 유한하므로 두 무한 평면으로 해석하

는 것은 임계속도의 차수정도를 구하는 것에 그쳤다.

열탄성적인 불안정성은 서로 정지하고 있는 두 물체가 열전달을하고 있을때에도 나타난다. 이 때는 접촉면에서 압력에 따라 변화하는 열접촉저항에 의해 탄성문제와 열전달 문제의 상호 영향에 의해 시스템이 불안정하게 될 수 있다. 이러한 현상은 열교환기의 이중파이프(Barber, 1986), 캐스팅시의 응고(Richmond & huang, 1977)등에 나타난다.

스텝의 유한한 길이가 열탄성적 불안정성에 미치는 효과는 Yeo와 Barber(1991)의 반무한 평면에 놓인 층의 이론적 해석에 의해 시작되었으며 그들은 접촉면에 수직인 방향의 유한한 길이가 열탄성적 불안정성에 미치는 영향을 보았다. 또한 강제인벽과 접촉하고 있는 반무한 스트립의 선형 섭동형을 이용한 이론적 해석을 통해 Yeo와 Barber(1995)는 유한한 길이의 접촉면이 열탄성적 불안정에 미치는 영향을 보였다. 그들은 시간에 따라 지수적으로 변화하는 섭동된 온도를 가정하여 연관된 탄성문제를 스트립에 관한 Papkovitch-Fadle의 고유함수들의 급수로 표시하였다. 그 결과 시간 상수 b 에 대한 선형 고유치 문제를 얻을 수 있었으며, 시스템의 불안정성은 정상상태의 열전달량이 증가함에 따라 b 의 실수부가 양의 값을 가질때에 일어난다.

본 연구에서는 유한한 접촉면적을 가진 미끄럼 접촉문제의 불안정성을 판별하기 위해 스트립에 대한 Yeo와 Barber(1995)의 해석방법을 도입하였다.

2 경계조건

그림 1에 해석하고자 하는 시스템이 보여져 있다. 반무한 스트립 $\Omega: \{y \geq 0, |x| \leq h\}$ 의 양 가장자리 $x = \pm h$ 는 단열되어 있고 자유표면이며, 반무한 강체에 균일한 압력으로 접촉하여 미끄럼속도 V 로 움직이고 있다. 선형 섭동법을 사용하여 열탄성적 안정성을 판정하기 위해 정상상태에 시간에 따라 지수적으로 증가하는 작은 온도 섭동 T 를 가한다. 따라서 스트립에 고정된 좌표계를 사용하면 연관된 다른 섭동량은 다음의 경계조건을 만족시킨다.

1. 가장자리 $x = \pm h$ 는 자유표면이고 단열되어 있으므로

$$\sigma_{xx} = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad (1)$$

$$q_x = -K \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

이다. 여기서 K 는 스트립의 열전도 계수이다.

2. 접촉면 $y=0$ 에서는 강체인 반무한 물체와 접촉하여 미끄럼 운동을 하고 있으므로

$$u_y = 0 \quad (3)$$

3. 마찰에 의해 발생하는 열은 스트립과 반무한 물체로 방출된다. 이때 두께 Z 가 얇고 미끄럼속도가 클 때에는 반무한 물체 내에서 가로 방향의 열전달을 무시할 수 있으므로 Dow와 Burton(1972)의 결과에 따라 접촉면에서 반무한 물체로의 열유동은 다음과 같다.

$$q_y = \frac{2K^h T \sqrt{V}}{\sqrt{\pi k^h Z}} \quad (4)$$

여기서 K^h, k^h 는 각각 반무한 물체의 열전도 계수, 열확산계수이며, Z 는 스트립의

두께이다. 따라서 $y=0$ 에서의 경계조건은

$$q_y = fVp - \frac{2K^h T \sqrt{V}}{\sqrt{\pi k^h Z}} \quad (5)$$

이다. 여기서 p 는 접촉압력이다.

3 온도 섭동

정상상태에 가한 섭동된 온도장 $T(x, y, t)$ 는 열에 관한 경계조건을 만족시키면서 스트립에 나타날 수 있는 모든 온도를 표현할 수 있어야 한다. 따라서 다음과 같은 변수분리 형태의 온도장을 생각한다.

$$T(x, y, t) = f(x)e^{ay}e^{bt} \quad (6)$$

온도분포는 열전달방정식

$$\nabla^2 T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

을 만족시켜야 하므로 식(6)을 식(7)에 대입하여 얻어지는 $f(x)$ 에 관한 상미분방정식을 풀면 다음을 얻는다.

$$f(x) = A_s(a, b) \cos(\gamma x) + A_a(a, b) \sin(\gamma x) \quad (8)$$

여기서

$$\gamma^2 = a^2 - \frac{b}{k} \quad (9)$$

여기서 k 는 스트립의 열확산계수이다. 식(8)은 우함수와 기함수를 포함하고 있다. 주어진 시스템의 기하학적 형상은 대칭이므로 해석은 두 부분을 각각 독립적으로 하여도 가능하다.

한편 본 문제와 같은 기하학적 형상을

가진 두 물체사이의 경계면으로 열전달을 하고 있는 시스템의 열탄성적 안정성 문제를 다룬 Yeo와 Barber(1995)의 결과에 의하면 불안정시의 섭동된 온도의 모우드 형태는 접촉면에 따라 대칭이고 그 형태는 cosine과 형태와 근사하고, 임계 열전달량은 기본 주파수를 가진 모우드 형태에 의해 결정된다는 것을 보였다. 따라서 본 문제에서도 대칭인 부분만 취하여 해석을 하기로 한다.

식(8)의 대칭인 항을 취하여 열에 관한 경계조건인 식(2)에 대입하면

$$A_s(a, b) \sin(\gamma h) = 0 \quad (10)$$

이다. non-trivial 온도장이 되기위해

$$\gamma h = n\pi \quad (11)$$

이며 여기서 n 은 정수이다.

그러므로 일반적으로 섭동된 온도장은 다음과 같이 급수형태로 표현될 수 있다.

$$T(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(b) \cos(\gamma_n x) e^{a_n y} e^{b t}, \quad (12)$$

여기서

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{h} \quad (13)$$

이고 섭동량이 접촉면에서 멀어질수록 사라지기 위해 a_n 은 다음 값 중 음의 실수부를 가진 근이다.

$$a = (\gamma_n^2 + b/k)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

4 열탄성 문제

식(12)로 주어지는 온도장에 해당하는 열유동량과 경계조건을 만족시키는 열응력 즉, 접촉압력을 구해 이를 식 (5)에 대입하면 b 에 관한 고유치 문제를 얻는다. 이때 고유함수는 상수 A_n 이 될것이다. 미끄럼속도 V 가 점점 커져서 고유치 b 가 복소평면에서 처음으로 허수축을 좌측에서 우측으로 넘어갈때 시스템은 불안정하게 된다.

현재까지의 열탄성적 불안정성에 관한 연구보고(Barber, 1987)에 의하면 한쪽의 재료가 강체일때는 b 가 항상 실수값을 가진다. 따라서 불안정성을 일으키는 임계속도는 b 가 복소수 평면에서 원점을 지나갈 때 결정된다. $b=0$ 일때

$$a_n = -\gamma_n = -n\pi/h \quad (15)$$

이고 식(12)의 온도분포는 다음과 같다.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\gamma_n x) e^{-\gamma_n y} \quad (16)$$

4.1 자유열팽창에 의한 변형

접촉압력을 구하기위해 열탄성 문제를 두 부분으로 나눈다. 먼저 자유 열팽창에 의한 스트립의 변형을 구한다음 $y=0$ 에서 강체와 접촉을 유지하기 위한 압력분포를 구한다.

$b=0$ 일때 섭동된 온도장은 시간에 무관하므로 라플라스식을 만족시킨다. 따라서 자유열팽창에 의해 내부응력은 발생하지 않고 이때의 경계면의 곡률은 국부적인 열유동에 비례한다. 즉(Barber, 1992),

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\alpha(1+\nu)q_y}{K} \quad (17)$$

여기서 $\delta = \alpha(1+\nu)/K$ 는 열변형성(thermal distortivity)이고, α, ν 는 각각 열팽창계수, 포와송비이다.

$y=0$ 에서 스트립으로의 열 유동량은 식(16)에서 다음과 같이 구해진다.

$$q_y = -K \frac{\partial T}{\partial y} = K \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n \cos(\gamma_n x) \quad (18)$$

식(18)을 식(17)에 대입하여 적분하면 다음과 같다.

$$u_y \Big|_{y=0} = u_0 = -\alpha(1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos(\gamma_n x)}{\gamma_n} \quad (19)$$

이때의 스트립의 강체로서의 변위($n=0$)는 없다고 하였다.

4.2 접촉압력의 계산

자유 열팽창에 의한 변형—식(19)—에도 스트립의 끝단($y=0$)이 강체와 접촉을 유지하기 위한 조건인 식(3)을 만족하기 위해서는 다음의 고전적인 탄성문제를 생각한다.

즉, 반무한 스트립 $\Omega: \{y \geq 0, |x| \leq h\}$ 이 다음의 경계조건을 가진다.

$$\left. \begin{aligned} u_y = -u_0 = -\alpha(1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos(\gamma_n x)}{\gamma_n} \\ \sigma_{xy} = 0 \end{aligned} \right\}; y=0 \quad (20)$$

그리고

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{aligned} \right\}; x = \pm h \quad (21)$$

반무한 스트립의 해는 Airy의 응력함수를 이용해 풀 수 있으며 그해는 Papkovitch와 Fadle의 고유함수로 표현할 수 있다. 본 연구에서는 Yeo와 Barber(1985)가 구한 Green과 Zerna(1954)의 조화변형을 포텐셜 A 및 D를 사용한 다음의 해를 이용한다.

$$\sigma_{yy} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{C_m}{h^2}\right) \varphi_m^{(\sigma)} \quad (22)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{C_m}{h^2}\right) \varphi_m^{(\tau)} \quad (23)$$

$$2\mu u_y = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{C_m}{h}\right) \varphi_m^{(u)} \quad (24)$$

$$2\mu u_x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{C_m}{h}\right) \varphi_m^{(v)} \quad (25)$$

여기서 μ 는 전단 탄성계수이다. 또한

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(\sigma)}(\lambda_m x) = & (\lambda_m h)^2 \cos(\lambda_m x) + k_m \{ 2\nu \lambda_m h \\ & \cos(\lambda_m x) - \lambda_m^2 h x \sin(\lambda_m x) \} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(u)}(\lambda_m x) = & \lambda_m h \cos(\lambda_m x) - \\ & k_m \lambda_m x \sin(\lambda_m x) \end{aligned} \quad (27)$$

이고

$$k_m \equiv k(\lambda_m h) = \frac{\lambda_m h}{2(1-\nu) - \sin^2(\lambda_m h)} \quad (28)$$

이다. 또한 λ_m 은 λ_m 의 공액복소수를 나타낸다.

4.3 C_m 의 결정

일반적으로 상수 $\{C_m\}$ 은 $y=0$ 에서의 경계조건에서 구해진다. 즉, 식(22-25)의 무한급수항을 절단하여 얻어진 해가 스트립의 끝단에서 주어진 두개의 경계조건을 모든 x 에 대해 만족시켜야 하므로 이때 얻어진 $\{C_m\}$ 에 관한 선형연립방정식을 이용하여 푼다. 그러나 해의 수렴성에 문제가 있으며, 이는 Spence(1983)가 깊이 있게 다루었으며 그해결 방법을 제시하고 있으나 매우 복잡한 계산과정을 필요로 한다. 그러나 다행히도 혼합경계 조건일때는 다음과 같은 상호직교성(Biorthogonality Condition)에 의해 $\{C_m\}$ 을 쉽게 구할 수 있다.

$$\int_0^h (\varphi_l^{(u)} \varphi_m^{(o)} - \varphi_l^{(v)} \varphi_m^{(v)}) dx = 0, \quad l \neq m \quad (29)$$

양변에 C_l 을 곱하고 l 에 관해 $(-\infty, +\infty)$ 범위에 대해 합하여 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\int_0^h (2\mu h u_y(0, x) \varphi_m^{(o)} - h^2 \sigma_{xy}(0, x) \varphi_m^{(v)}) dx = \frac{2(1-\nu)C_m(\lambda_m h)^3 h \cos^2(\lambda_m h)}{(2(1-\nu) - \sin^2(\lambda_m h))^2} \quad (30)$$

여기서 u_y , σ_{xy} 는 스트립 끝단에서 주어진 경계조건들이다.

식(20)을 식(30)에 대입하면 C_m 은 다음과 같다.

$$C_m = 2\mu\alpha(1+\nu)h^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} A_n \quad (31)$$

여기서

$$C_{mm} = \frac{(2(1-\nu) - \sin^2(\lambda_m h))^2}{2(1-\nu)(\lambda_m h)^3 h^2 \cos^2(\lambda_m h)} \int_0^h \frac{\cos(\gamma_n x) \varphi_m^{(o)}}{\gamma_n} dx \quad (32)$$

그러므로 접촉면에서의 수직장력은 다음으로 주어진다.

$$\sigma_{yy} = 2\mu\alpha(1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m^{(o)} C_{mn} A_n \quad (33)$$

4.4 열탄성적 경계조건

마지막 남은 경계조건인 식(5)에 식(18,33)을 대입하면 다음과 같다.

$$K \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(\gamma_n x) A_n = -2\mu\alpha(1+\nu)fV \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m^{(o)}(x) C_{mn} A_n - \frac{2K^h \sqrt{V}}{\sqrt{\pi k^h Z}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\gamma_n x) A_n \quad (34)$$

이 식은 $0 \leq x \leq h$ 인 범위에서 항상 성립해야 한다. 파라메타의 수를 줄이기 위해 다음의 재료 상수를 정의한다.

$$J_1 = \frac{2\mu\alpha(1+\nu)f}{K} \quad (35)$$

$$J_2 = \frac{2K^h}{K\sqrt{\pi k^h}} \quad (36)$$

또한 다음의 무차원 수를 정의한다.

$$r = \frac{h}{Z} \quad (37)$$

$$X = \frac{x}{h} \quad (38)$$

$$\Gamma_n = \gamma_n h \quad (39)$$

$$\Lambda_m = \lambda_m h \quad (40)$$

그러면 식 (34)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \cos(\Gamma_n X) A_n = \\ & -J_1 Vh \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Psi_m^{(o)}(X) C_{mn}^* A_n \\ & -J_2 \sqrt{rVh} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\Gamma_n X) A_n \end{aligned} \quad (41)$$

여기서 $\Psi_m^{(o)}(X)$ 및 C_{mn}^* 는 각각 $\varphi_m^{(o)}(x)$ 및 C_{mn} 을 의에서 정의한 변수로 무차원화한 것이다. 또한 Λ_m, Γ_n 은 다음과 같이 주어진다.

$$2\Lambda_m + \sin(2\Lambda_m) = 0 \quad (42)$$

$$\Gamma_n = n\pi \quad (43)$$

식(42)의 근은 초기값이 주어지면 반복법에 의해 구할 수 있다. 점근법(Asymptotic method)에 의해 초기값은 다음과 같이 주어진다.

$$\Gamma_n = -\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{i}{2} \ln(4n\pi) \quad (44)$$

모든 x 에 대해 식(41)를 만족시키는 V 가 시스템이 불안정하게 되기 시작하는 임계속도이다. 이를 구하는 방법으로 1)Direct Collocation Method 2)Galerkin Method가 있는데 여기서는 보다 나은 수렴성을 위해 2)의 방법을 사용하였으며 그때의 가중치(Weighting Function)로는

$$W_i = \cos(\Gamma_i X) \quad (45)$$

을 사용하였다.

수치해석을 위해 급수를 m 에 대해 $-M$ 에서 M 까지, 그리고 n 에 대해 1에서 M 까지 취하면 다음과 같은 Vh 에 관한 고유치 문제를 얻는다.

$$HA = -J_1 Vh FA - J_2 \sqrt{rVh} GA \quad (46)$$

여기서

$$H_{in} = \Gamma_n \int_0^1 \cos(\Gamma_i X) \cos(\Gamma_n X) dX \quad (47)$$

$$F_{in} = \sum_{m=-M}^M \int_0^1 \cos(\Gamma_i X) \Psi_m^{(o)}(X) C_{mn}^* dX \quad (48)$$

$$G_{in} = \int_0^1 \cos(\Gamma_i X) \cos(\Gamma_n X) dX \quad (49)$$

이다.

5 결과 및 토론

위에서 논의한 해석 방법과 Dow와 Burton(1972)의 결과를 비교하기 위해 수치적인 계산을 하였다. 임계속도를 구하기 위해 속도를 증가시킴에 따라 식(46)에서 $\{A_n\}$ 의 계수 행렬의 determinant가 영이 되는 V 의 값을 구하였다. 표1에 수치적 계산에 사용된 재료의 성질이 나타나 있으며, 동일한 재료의 스트립과 반무한 물체를 사용하였다. 또한 모든 계산은 형상비 $r=10.0$, 폭 $2h=20.0\text{mm}$ 를 사용하였다. 표2에 계산결과에서 V_1, V_2 는 1,2차 모드에 대한 각각의 임계미끄럼속도이다.

알루미늄인 경우에 시스템이 불안정하게 되는 임계속도는 3.51m/s 인데 이것은 두 무한 평판으로 해석한 Dow와 Burton

(1972)의 결과에 비해 10%의 증가를 하였고 주철인 경우에는 68%의 증가를 보여 주었다. 이것은 스트립의 경우에 양쪽 가장자리의 경계조건에 의해서 섭동온도의 자유도가 제한을 받기 때문에 예상된 결과이다. 따라서 유한한 접촉면적을 가지고 서로 미끄러지고 있는 두 물체의 열탄성적인 불안정성의 해석은 두 반무한 물체로 가정할때 많은 오차를 가져올수 있다는 것을 보여준다.

또한 위에서 구한 속도 차수의 범위내에서 식 (46)의 좌측항에 비해 우측항의 매트릭스의 요소들은 매우 크다. 따라서 좌측항을 무시하여 간단히 하면 식(46)은

$$GA = \frac{J_1}{J_2} \sqrt{VZ} FA \quad (50)$$

의 고유치 문제로 되어 임계속도는 스트립의 두께 Z 에 반비례한다는 것을 알 수 있다. 표2에는 1차 모우드와 2차 모우드에 대한 임계속도가 나타나 있다.

그림2에는 해의 수렴성을 조사하기 위해 수치 해석시 취한 급수항의 갯수에 대해 임계속도의 변화를 보였다. 그림에서 보여지듯 13항을 취하면 충분히 정확한 값을 얻을 수 있었다.

그림3은 Aluminum의 경우에 접촉면에서의 1차 및 2차 모우드 형태를 보여준다. 시스템의 불안정성을 결정하는 1차 모우드의 형태는 스트립의 폭을 한 주기로 하는 cosine파 형태와는 많은 차이가 있다. 이러한 현상은 정적인 상태에서 열전달을 하고 있는 경우와는 매우 다르다. 이때는 섭동온도의 1차 모우드 형태가 cosine파와 매우 유사하였다. 그림4는 접촉압력의 분포를 나타낸다.

6 결 론

서로 미끄러지고 있는 두물체의 TEI에

대한 유한한 접촉면적의 영향을 알아보기 위해 스트립과 반무한 평면에 대한 해석을 하였다. 이를 위해 Yeo와 Barber(1995)의 스트립에 관한 해석방법을 도입하여 성공적으로 임계속도를 산출하였다.

그 결과 유한한 접촉면적의 영향은 열탄성적인 불안정성을 일으키는 미끄럼속도에 많은 영향을 미칠 수 있으므로 섭동온도를 순수한 cosine파 형태로 가정하고 해석한 Dow와 Burton(1972)의 결과는 정확한 값과는 많은 오차가 있다는 것을 보였다.

참고문헌

- (1) A.E.Anderson and R.A.Knapp, 1989, "Hot spotings in automotive brake systems," *Intl. Conf. on Wear of Materials*, Vol. 2, pp. 673-680.
- (2) J.R.Barber, 1986, "Non-uniqueness and stability for heat conduction through a duplex heat exchanger tube," *J. Thermal Stresses*, Vol. 9, pp. 69-78.
- (3) J.R.Barber, 1987, "Stability of thermoelastic contact," *Institution of Mechanical Engineers, International Congress on Tribology*, London, pp. 981-986.
- (4) J.R.Barber, 1992, *Elasticity*, kluwer Academic Publishers.
- (5) T.A. Dow and R.A.Burton, 1972, "Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear," *Wear*, Vol. 19, pp. 315-328.
- (6) A.E.Green and W.Zerna, 1954, *Theoretical elasticity*, Clarendon press, pp. 174-178.
- (7) W.Kreitlow, F.Schrödter and H.matthäi, 1985, "Vibration and hum of disc brakes under load," *SAE*, 850079.

- (8) O.Richmond and N.C.Huang, 1977, "Interface stability during uni-directional solidification of a pure metal," Proc. 6th. Canadian Congress of Applied Mechanics, Vancouver., pp. 453-454.
- (9) D.A. Spence, 1983, "A class of biharmonic end-strip problem arising in elasticity and stokes flow," *IMA J.Appl. Mech.*, Vol. 30, pp. 107-139.
- (10) Lee, Kwangjin, and J.R.Barber, 1993, "Frictionally-excited thermoelastic instability in automotive disk brakes," *ASME J.Tribology*, in press.
- (11) Taein Yeo and J.R.Barber, 1991, "Stability of thermoelastic contact of a layer and a half-plane," *J.Thermal Stresses*, Vol. 14, pp. 371-388.
- (12) Taein Yeo and J.R.Barber, 1995, "Stability of a semi-infinite strip in thermoelastic contact with a rigid wall," *Int. J. Solids and Structures*, Vol.32, No.3/4, pp. 553-567.

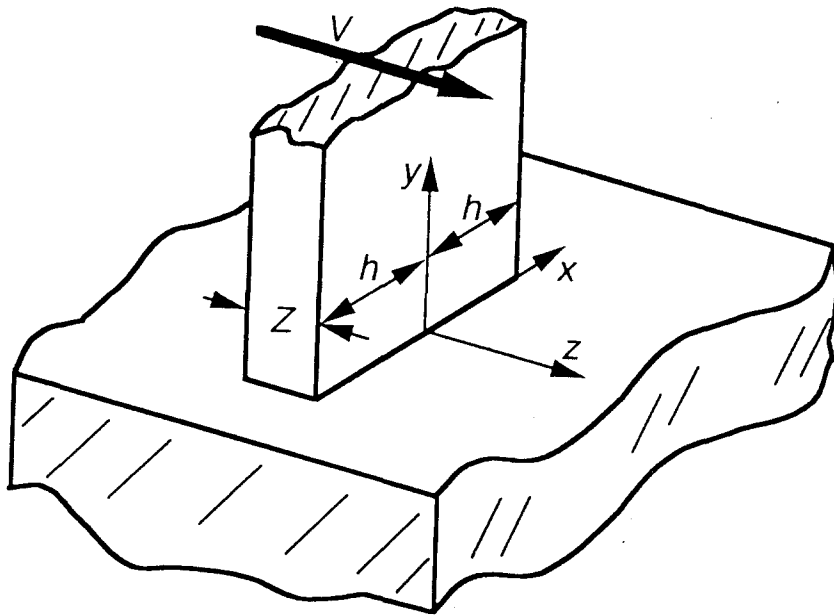


Fig.1 The model of sliding contact

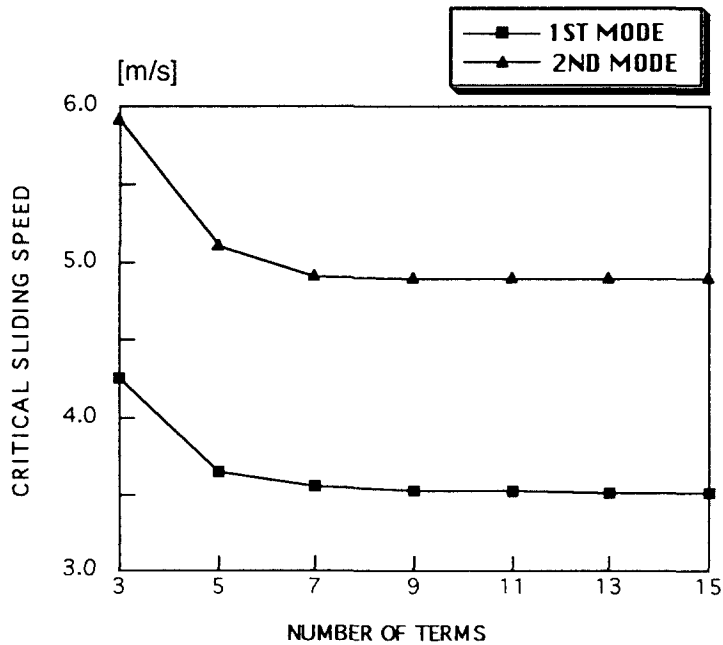


Fig.2 Convergence of sliding speed with increasing N for a sliding Aluminum pair.
 $r=10.0$, $h=10.0$

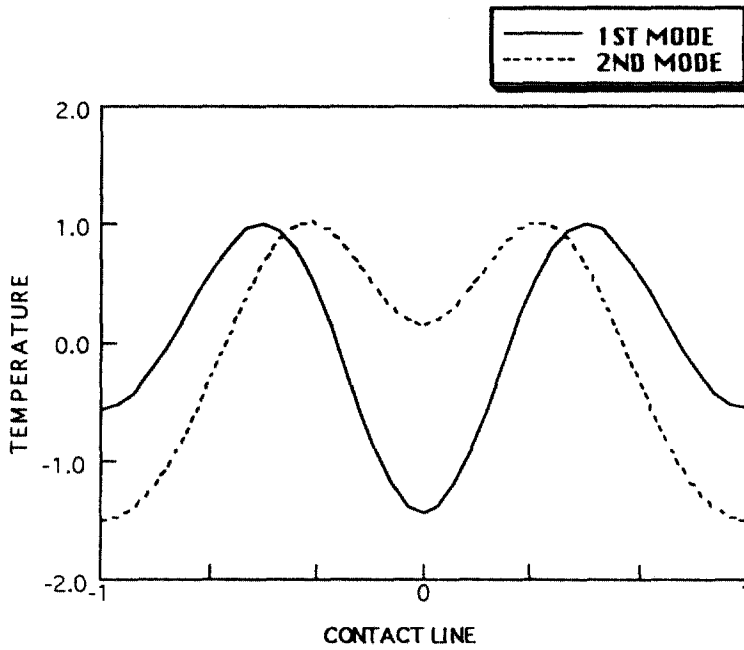


Fig.3 Mode shape of perturbational temperature

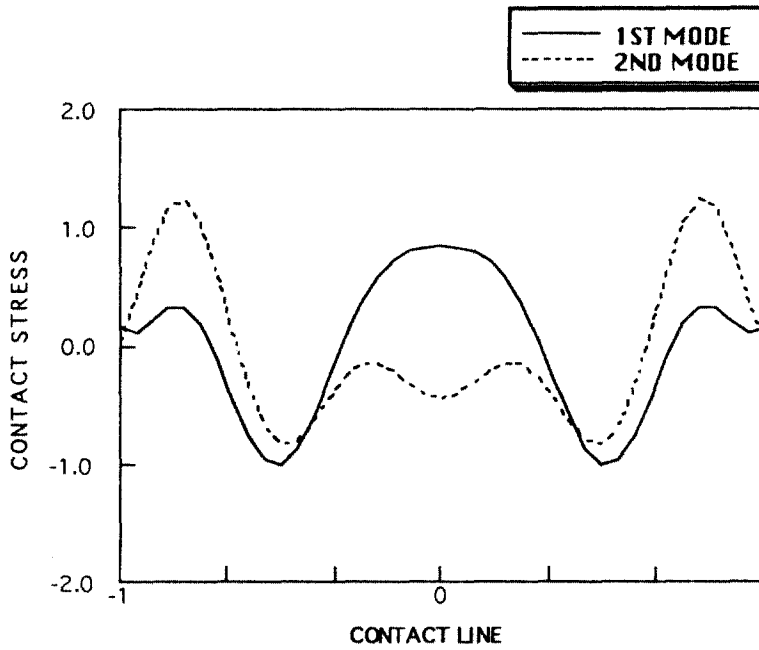


Fig.4 Mode shapes of perturbational contact stress

TABLE 1

Properties of representative single-material sliding pairs

Material	f	E Nm ² × 10 ⁹	ν	K W m ⁻¹ °C ⁻¹	k m ² s ⁻¹ × 10 ⁶	α °C × 10 ⁻⁶
Aluminum	0.5	68	0.32	227	83	17
Cast iron	0.23	103	0.26	50	12.86	12

TABLE 2

Critical speed for representative single-material sliding pairs.

 $r=10.0$, $h=10.0$ mm

Material	V_1 m/s	V_2 m/s
Aluminum	3.51	4.85
Cast iron	6.60	9.13