

球形物體에서의 응력파전달

이 기 수
기계공학과
(1980. 11. 7 접수)

<요 약>

球形物體가 충돌하는 경우에 그 내부에서 발생하는 응력파를 유한요소법을 사용하여 계산했다. 충돌지점에서 발생한 압축력은 파동형태로 전파되며 球의 중심부에서 가장 큰 인장응력이 발생함을 계산으로 확인했다. 이러한 결과는 인장응력에 약한 유리로 만들어진 球가 충돌후 그 중심부에서 부터 파괴가 시작되는 실험결과와 같다.

Stress Wave in a Sphere

Lee Kisu

Dept. of Mechanical Eng.

(Received November 7, 1980)

<Abstract>

The Problem of stress wave propagation in a sphere is solved by Finite Element Method. The Compressive stress which occurs at collision point is reflected on the surface of the sphere and the maximum tensile stress is formed near the center of the sphere. So if the sphere is made of glass which is fragile in tensile stress, Fracture begins to develop near center.

I. 서 론

물체에 빠른 속도로 힘을 가하면 응력파가 발생하여 전파되어 가는데 이러한 동적응력은 정적인 응력파는 그 크기나 양상이 다르다.

한편 球는 그 고유진동수가 대단히 높으며 대개의 경우 다른 물체에 비하여 강제처럼 취급이 된다.

그러나 球에 그 고유진동수보다 변화가 큰 힘이 작용하는 경우에는 球내부에서의 응력전파문제가 중요하게 된다.

그런데 球내부에서의 응력전파문제에 대한 운동방정식은 해석적인 해가 아직 알려져 있지 않다. [5]

한편 참고문헌 [4]에는 球에 충격력을 가하는 경우의 응력전파 문제를 정성적으로 설명하고 있다.

본 논문에서는 같은 크기의 두개의 球가 충돌하는 경우의 응력파 문제를 유한 요소법을 사용하여 풀기로 한다.

II. 이 론

같은 크기의 두개의 구가 충돌하는 경우 그 내부에서 발생하는 응력은 구의 중심축을 포함하는 모든 단면이 동일한 형태의 응력상태를 이루게 된다.

따라서 그림 1과 같은 반원단면을 이용하여 응력상태를 표시하기로 하며 A점을 구의 충돌위치로 잡는다.

절대좌표 X-Y의 원점은 구가 충돌하기 시작한 순간의 O점의 위치로 한다. 한편 그림 1과같이 α 와 β 를 반경방향, 원주방향의 좌표로 잡는다.

\vec{r}_0 : 점 O의 위치벡터(u_0j)

\vec{r}_p : 점 P의 점 O에 대한 상대위치벡터

s: 점 P의 위치벡터라고 하면

$s(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_p(t, \alpha, \beta)$ 이 된다.

$s(t)$ 는 또 다음과 같이 표시된다.

$$s(t) = u_0j + ue_\alpha + ve_\beta \dots\dots\dots(1)$$
$$= u'e_\alpha + v'e_\beta$$

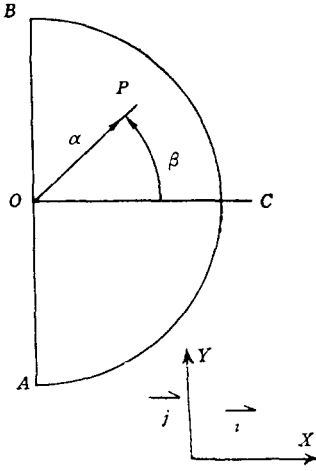


그림 1 : 단면의 기본 좌표

$s(\theta)$ 와 $s(t)$ 에서 탄성변형 전후의 Metric Tensor를 이용하여 Strain Tensor를 구하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \epsilon_{\beta\beta} &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{\alpha} \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{\alpha} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ \epsilon_{rr} &= \frac{u}{\alpha} + \frac{v \tan \theta}{\alpha} \left(\theta : \frac{\beta}{\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

유한요소법을 이용한 응력과 전달에서는 요소표면에서의 반사, 굴절의 영향 및 진동수변화에 따른 전달속도의 차이가 중요한 영향을 주게된다. [6], [7]

본 논문에서는 표면에서의 응력과 반사, 굴절의 영향을 최대한 정확히 하기 위하여 그림 1의 단면을 그림 2와 같은 요소로 구분한다.

또 그림 2의 각각의 요소에 대해서 그림 3과 같은 형태로 지방좌표(r, θ)를 잡기로 한다.

한편 요소내부에서의 변위의 방향을 그림 1의 α, β 와 같은 방향으로 표시하기로하면 변위 u', v' 를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_2 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

여기에서

$$A_1 T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r}{\Delta r} \\ \frac{-\theta_3}{\theta_2 - \theta_3} \frac{r}{\Delta r} + \frac{\theta}{\theta_2 - \theta_3} \\ \frac{-\theta}{\theta_2 - \theta_3} + \frac{\theta_2}{\theta_2 - \theta_3} \frac{r}{\Delta r} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \sin \theta$$

$$A_3 = \cos \theta$$

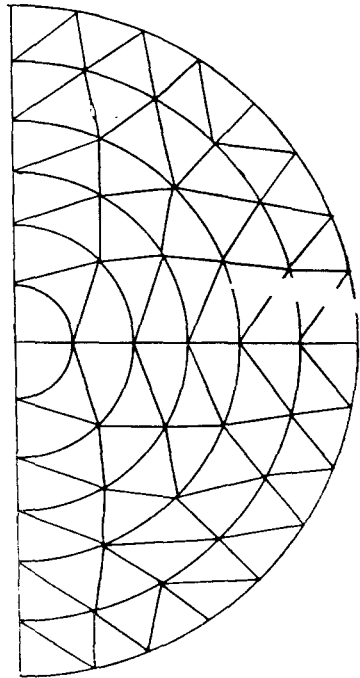


그림 2 : 단면의 요소구분

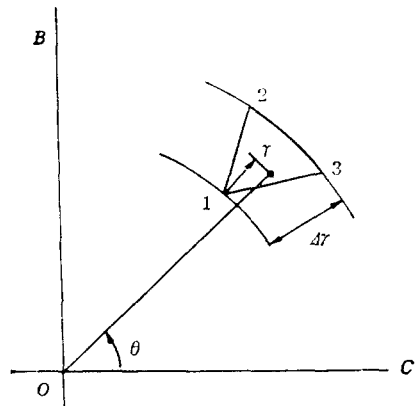


그림 3 : 요소의 지방좌표

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 변형율이 얻어진다.

$$[V]T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ u_0] \text{라 하면}$$

$$[\epsilon] = [B] [V],$$

$$[\sigma] = [D] [\epsilon] \text{의 형태로}$$

변형율 ϵ 및 응력 σ 를 변위 V 를 사용하여 표시할 수 있다.

달랑베르 정리 및 가상변위법의 원리를 요소에 적용하면 다음 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$[K] [V] + [M] [V] = [P] \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{여기에서 } [\phi] = \begin{bmatrix} A_1 & O & A_2 \\ O & A_1 & A_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d(\text{volume})$$

$$[M] = \int \rho [\phi]^T [\phi] d(\text{volume})$$

$$[P] = \int [\phi]^T P' d(\text{volume}) \text{이다.}$$

위에서 $d(\text{volume})$ 은 그림 3의 부채꼴 요소가 축 OB 를 중심으로 한바퀴 회전했을 때의 부피이다.

전체 요소에 대하여 식 (4)를 모두 더하면 球 전체의 운동방정식을 다음의 형태로 얻게된다.

$$[K] [V] + [M] [V] = [P] \dots\dots\dots(5)$$

식 (5)의 해법으로는 모오드 중첩법과 시간에 대한 직접 적분법의 2가지가 있는데 응력과 문제를 해결하는 데에는 직접 적분법이 좀더 효과적이라고 알려져 있으므로 [1] 본 논문에서는 직접 적분법을 쓰기로 한다.

또 구는 강체운동 및 탄성운동이 동시에 일어나므로 Well Conditioned Matrix를 얻기 곤란하므로 Implicit Method를 쓰기 어렵다.

그러므로 Explicit Method로 식 (5)를 적분하기로 하며 그중에서 Central Difference Method를 쓰기로 한다.

한편 식 (5)의 $[M]$ 은 Consistant Mass Matrix인데 계산 편의상 Lumped Mass Matrix로 바꿀수 있으므로 [5] 본 논문에서도 $[M]$ 은 Lumped Mass Matrix를 쓰기로 한다.

Explicit Method에서는 안정성이 제일 큰 문제가 된다.

계산에 필요한 최대 시간간격 Δt 의 크기는 요소의 종류, 계산 방법등에 따라서 변한다고 알려져 있다.

평면응력 상태이고 삼각형 일정변형율요소를 사용한 경우 $\Delta t < C\sqrt{\Delta x \Delta y}/3$ 이고 [2] 유한차분법인 경우는 $\Delta t < 1/f_{min}$ 이다. [3]

구의 경우 Δt 의 범위는 명확하게 알려져 있지 않으나 강성도가 평면응력 상태보다 크므로 Δt 의 범위는 참고문헌 [2], [3]의 값보다 적어야 된다고 보여진다.

한편 $\Delta t < 1/f_{min}$ 이면 정확성은 보장된다고 알려져 있다. [1]

그래서 본 논문에서는 $\Delta t = R/6\sqrt{\rho/E}/15$ 로 선정하였으며 계산결과 안정함을 확인할 수 있었다. 여기에서 R 은 구의 반경). 그리고 점 A 에서의 경계 조건은.

$$\left. \begin{aligned} |u'_A| < R \text{이면 } [\bar{P}_A] &= 0 \\ |u'_A| > R \text{ 이면 } u_A &= u_0 + R \end{aligned} \right) \dots\dots\dots(6)$$

이다.

III. 모델계산 및 결과

반경 3cm, 종탄성계수 $69 \times 10^6 \text{KN/m}^2$, 포아송비 0.35, 비중 2.4인 두개의 유리로 된 球가 200cm/sec의 속도로 정면 충돌하는 경우의 문제를 위와같은 유한요소법으로 계산한 결과 그내부의 응력분포는 그림 4,5와 같다.

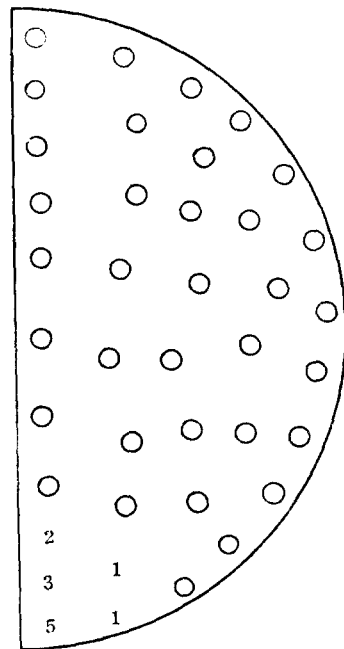


그림 4: $t = 2.8 \times 10^{-6} \text{SEC}$

표면에서 반사된후 중앙에 인장력으로 집중하여 파괴가 진행되었다고 보여진다.

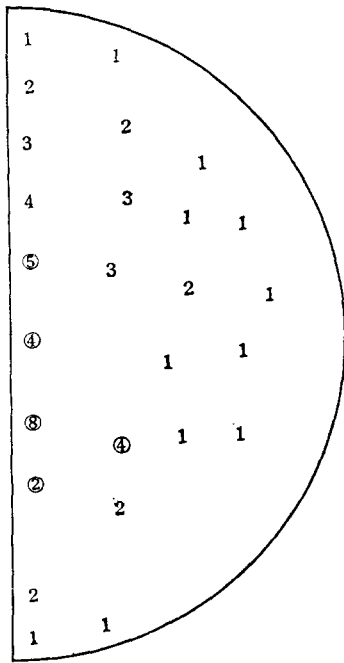


그림 5: $t=1.4 \times 10^{-4} \text{SEC}$

그림 4,5에서 시간 t 는 충돌한 순간을 0으로 하여 계산한 결과이다.

O마크는 인장력을 나타내고 O마크가 없으면 압축력을 나타낸다.

숫자는 $2.4 \times 10^8 \text{N/cm}^2$ 단위이고 그 위치에서의 응력의 최대치를 표시한다.

그림 (4)에서 보는 것처럼 초기에는 충돌지점에 압축력이 발생하나 시간이 지나면 즉 응력파가 표면에서 반사된 후에는 그림 (5)와 같이 구의 중앙부근에서 최대 인장력이 발생한다.

따라서 유리처럼 인장력에 약한 물체는 충돌후 중심부에서부터 파괴가 일어나기 시작하리라고 예상할수 있다.

참고문헌 [4]에 구의 표면에 폭약으로 충격력을 가한 경우의 실험 결과가 발표되어 있다.

그림 6은 직경 3.5인치인 유리구슬의 표면에 폭약을 터뜨리 충격력을 가한 경우의 사진이다. [4]

그런데 사용한 폭약이 유리구슬에 가하는 힘의 시간에 따른 변화가 표시되어 있지 않으므로 본 논문의 방법처럼 계산으로 확인할 수는 없다.

그러나 그림 6도 유리구슬에 갑작스런 충격력이 가해진 경우이므로 충돌의 경우와 같이 응력파가

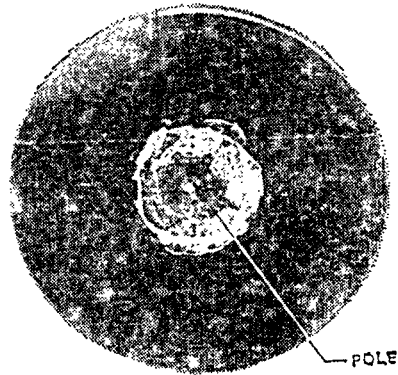


그림 6: 유리구슬에 대한 실험 결과

IV. 결 론

구의 표면에 충격력이 작용하는 경우의 응력전파 문제를 유한요소법, 직접 적분법을 사용하여 풀어 보았다.

구의 표면에서의 반사, 굴절의 영향을 최대한 정확히 하기 위하여 통상적인 삼각형 요소를 사용하지 않고 부채꼴 요소를 사용하였으며 전체좌표계와 지방좌표계가 동일한 방향이 되도록 선정했다.

계산 결과 구의 표면에 가해진 압축응력은 구의 중앙에 인장응력으로 집중되었다.

이 계산 결과는 참고문헌 [4]의 유사한 실험 결과와 일치한다.

참 고 문 헌

1. Klaus-Jürgen Bathe, "Finite Element Formulation Modeling and Solutions of Nonlinear Dynamic Problems", in "Numerical Methods for Partial Differential Equations", Academic Press, 1979.
2. C. C. Fu, "On the Stability of Explicit Methods for the Numerical Integration of the Equations of Motion in Finite Element Methods, Int. J. for Numerical Methods in Eng. Vol.4, 95-107, 1972.

3. Jacob Aboudi, "Numerical Methods in Elastodynamics", in "Modern Problems in Elastic Wave Propagation," Wiley Interscience, 1978.
4. S.T.S. Al Hassan, W. Johnson, "Fracture in Solid Spheres and Circular Disks due to a point Explosive on the surface", Int. J. Mech. Sci. Vo..16, 193-199, 1974.
5. Karl F. Graff, "Wave Motion in Elastic Solids", Clarendon Press, 1975.
6. R.D. Krieg and S.W. Key, "Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design", J.T. oden et al., eds., (UAH Press, Huntsville, Ala, 1972)
7. G.L. Goudreau, Report 69-15, Dept of Civil Eng. University of California, Berkely, June 1970.