

壓縮板의 復合非線形 解析

李 榕 才
土木工學科

〈要 約〉

初期 치짐은 가진 단순지지된 평판이 일축 압축을 받은 때의 非線形 解析을 遂行하기 위하여 増分形 有限帶板法을 公式化하고 이에 따라 진산 프로그램을 작성하였다.

curvature effect를 고려하여 面外變位函數로부터 유도한 식을 참고로 하여 새로운 面內變位函數를 가정하였다.

外力을 가하는 方法으로 荷重増分 方式과 變位増分 方式을 使用하여 계산한 결과 變位増分 方式이 荷重増分 方式보다 수렴이 빨랐으며, 새로운 變位函數를 使用한 有限帶板法은 해석적 方法이나 다른 有限要素法과 잘 일치하는 결과를 주었다.

Combined Nonlinear Analysis of Compressed Plate

Yong Jae Lec.
Dept. of Civil Eng

〈Abstract〉

For the finite deflection analysis of plates and stiffened plates with initial deflections subjected to uniaxial compression, the formulation of incremental finite strip method is made and has been incorporated into a computer program.

A new in-plane displacement function varying along the load direction has been derived from the out-of-plane displacement function by considering the curvature effect of a plate.

Either incremental load type analysis or incremental displacement type analysis may be selected to solve incremental equilibrium equations in the program.

The following results have been obtained:

1. Incremental displacement type analysis is superior to incremental load type analysis in that the former converges more rapidly than the latter.

2. The finite strip method using the new displacement function gives as accurate results as analytical method and other finite element method.

I. 序 論

1969년 11월 오스트리아 비엔나의 Fourth Danube Bridge가 시공중 파괴되어 많은 피해를 내기전까지엔 실로 수 백 개의 鋼箱桁橋(steel box-girder bridge)가 시공적으로 건립되었다.¹⁰⁾

그러나 그후⁹⁾ 1970년 6월 영국 Wales의 Milford Haven Road Bridge, 同年 10월 오스트랄리아 Melbourne의 West Gate Bridge, 1971년 11월 독일 Koblenz의 Rhine River Bridge 등의 鋼箱桁橋의 大사고가 연달아 일어났고 이 사고의 중요한 원인 중의 하나가 壓縮 flange의 捩屈이었음이 밝혀졌다.

즉 箱桁(box-girder)과 길은 熔接構造部材에는 初期처짐(initial deflection)이나 殘留應力(residual stress)과 같은 初期不整(initial imperfection)이 불가피하게 존재한다.

그러나 종래의 挫屈理論에서는 이러한 初期不整이 없는 理想的인 構造物을 대상으로 해 왔으며 따라서 이 理論이 構造物의 참된 耐荷力을 주지 못하리라는 것은 明白하다.

그런데도 불구하고 DIN 4114의 規定을 비롯한 여러 나라의 교량에 관한 설계시방서의 규정들은 모두 이 彈性挫屈理論에 의한 解析 結果에 근거를 두고 있었다.

따라서 여러 나라에서는 flange에 대한 理論的 및 實驗的 研究와 箱桁橋의 壓縮 flange에 관한 示方書規定의 개정작업이 활발히 進行되어 왔다.

英國에서는 Milford Haven Bridge와 West Gate Bridge 사고 이후 鋼箱桁橋의 설계기준과 設計방법을 검토하고 새로운 설계기준을 마련하기 위해 Merrison을 위원장으로 하는 Merrison Committee가 構成되어 1973년 箱桁橋의 설계와 제작에 관한 잠정규정인 소위 "Merrison Rules"을 내어 놓았다.

西獨에서는 Rhine River Bridge 사고 이후 挫屈에 관한 示方書인 DIN 4114의 판挫屈에 관한 規定을 검토하기 위해 "Unterausschuss für Plattens-tabilität"가 構成되고 잠정規定을 내어 놓았다.¹²⁾

또 鋼板의 설계기준을 마련하기 위한 유럽전체의 委員會로서 1973년 ECCS (European Convention of Constructional Steel Work)의 Commission VIII(不安定部分) 안에 Task Group VIII-3이 構成되어 연구중에 있다.¹³⁾

한편 美國에서는 ASCE(美國 土木學會)와 AASHTO(美國 州道路運輸 技師協會)의 합동위원회의 하나로서 1971년 12월 箱桁의 극한강도에 관한 위원회가 설립되어 1974년 그의 첫 보고서를 내어 놓았다.⁹⁾

理論的인 研究로서는 먼저 고전적 방법에 의한 解析의 연구는 1951년 Coan의 初期처짐을 가진 壓縮板의 大變形理論을 비롯하여⁸⁾ 1972년 Dawson¹⁹⁾, 1976년 Rhodes²⁰⁾ 등은 初期처짐을 가진 平板의 거동을 살폈다.

한편 有限要素法의 發達과 大型 Computer의 출현은 이러한 構造物의 解析을 더욱 용이하게 하였으며 代表的인 것으로 1975년 Crisfield²⁷⁾는 4각형 요

소를 使用하여 壓縮板을, 解析하였으며 同年 小松定夫³¹⁾는 같은 문제를 푸는데 3각형 요소를 使用하였고 1978년³²⁾에는 같은 프로그램은 使用하여 平板의 거동을 자세히 살피고 있고, 上田은 1975년²⁹⁾ 삼각형 요소를 使用하였다.

實驗的인 研究로서 最近의 代表的인 것으로 1975년 上田³⁰⁾은 平板의 壓縮實驗을 行하였다.

本 研究에서는 非線形 문제의 解析에 가장 有望한 方法으로 評價 받고 있는 増分理論과 有限帶板法을 結合하고 合理的인 變位한수들 유도하여 壓縮을 받는 단순지지된 平板의 非線形 解析을 수행하여 이의 거동을 살피고 壓縮耐荷力을 求한다.

II. 増分理論

増分理論은 有限要素法에 結付되어 많은 學者들^{23)~25, 27~32)}에 의해 非線形 問題의 解析에 쓰여왔으며 앞으로도 계속 쓰일 것으로 展望된다.

増分理論을 公式化 하기 위해서는 우선 荷重增加 經路를 여러 단계의 平衡狀態로 나누어 $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2, \dots, \Omega^N, \Omega^{N+1}, \dots, \Omega^f$ 로 表示한다. 여기서 Ω^0 및 Ω^f 는 처음 및 마지막 상태(initial and final state)이고 Ω^N 은 임의의 중간상태로 이것은 基準狀態(reference state), Ω^{N+1} 은 現在狀態(current state)라 하고 Ω^N 상태에서 Ω^{N+1} 로 변하는 과정을 $(N+1)$ 단계라 한다.

Ω^{N+1} 상태는 Ω^N 상태에 매우 가까우며 따라서 支配方程式이 増分量에 대해 線形으로 表示될 수 있다는 가정하에 Ω^N 상태까지의 모든 변수, 즉 應力, 變形度 및 變位를 알고 Ω^{N+1} 상태에서의 모든 變數를 求하는 増分理論을 가상일의 원리에 의해 公式化 할 수 있다.

Ω^N 및 Ω^{N+1} 상태에서의 Green strain tensor를 各各 e_{ij} 및 $e_{ij} + \Delta e_{ij}$ 로 表示하고 그 사이의 變形度 増分을 Δe_{ij} 라 하면 이들은 다음과 같이 定義된다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (2.1)$$

$$e_{ij} + \Delta e_{ij} = \frac{1}{2} ((u_i + \Delta u_i)_{,j} + (u_j + \Delta u_j)_{,i} + (u_k + \Delta u_k)_{,i} (u_k + \Delta u_k)_{,j}) \quad (2.2)$$

여기서 u_i 및 $u_i + \Delta u_i$; $i=1, 2, 3$ 은 각각 Ω^N 및 Ω^{N+1} 상태에서의 變位成分을, Δu_i ; $i=1, 2, 3$ 은 $(N+1)$ 번째 단계의 變位増分을 表示하고, $(\)_{,i}$ 는 x_i 에 관한 微分 $\partial(\)/\partial x_i$ 를 表示한다. 重複添字에 대

해서는 總和(summation) 規約를 적용한다.

變形增分 Δe_{ij} 는 Lagrange 表示의 경우에는 Ω^{N+1} 상태에서의 變形度($e_{ij} + \Delta e_{ij}$)와 Ω^N 상태에서의 變形度 e_{ij} 와의 差로 表示되던 위의 두 식으로부터 곧

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{K,i} \Delta u_{K,j} + u_{K,j} \Delta u_{K,i} + \Delta u_{K,i} \Delta u_{K,j}) \quad (2.3)$$

이 식을 線形化하기 위해 마지막항을 생략하고 Δe_{ij} 기호를 使用하면

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{K,i} \Delta u_{K,j} + u_{K,j} \Delta u_{K,i}) \quad (2.4)$$

$$\Delta e_{ij} = \Delta e_{ij} + \frac{1}{2} \Delta u_{K,i} \Delta u_{K,j} \quad (2.5)$$

Ω^N 및 Ω^{N+1} 상태에서의 Kirchhoff 應力 및 表面力을 각각 σ_{ij} , f_i 및 $\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}$, $f_i + \Delta f_i$ 로 表示하고 應力增分과 表面力增分을 $\Delta \sigma_{ij}$, Δf_i 로 表示하면 Ω^{N+1} 상태에서의 假想일의 原理는 다음과 같이 된다.⁶⁾

$$\int (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \delta \Delta e_{ij} dV - \int (f_i + \Delta f_i) \delta \Delta u_i dS = 0 \quad (2.6)$$

여기서 $\delta \Delta u_i$ 는 假想變位增分을 $\delta \Delta e_{ij}$ 는 假想變位增分 $\delta \Delta u_i$ 로 일어나는 假想變形度를 表示하고, 첫째 項은 内部假想일 (internal virtual work)을 둘째 項은 外部假想일 (external virtual work)을 表示한다.

또 應力 tensor σ_{ij} , $\Delta \sigma_{ij}$ 와 表面力 tensor f_i , Δf_i 는 Ω^0 상태에서의 單位면적에 대해 정의된 것이니 dV 및 dS 는 각각 Ω^0 상태에서의 體적요소 및 面적요소를 表示한다.

(2.6)식은 고차항을 무시하고 다시 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\int \Delta \sigma_{ij} \delta \Delta e_{ij} dV + \int \sigma_{ij} \delta \left(-\frac{1}{2} \Delta u_{K,i} \Delta u_{K,j} \right) dV = \int \Delta f_i \delta \Delta u_i dS + \delta w_r \quad (2.7)$$

여기서

$$\delta w_r = \int f_i \delta \Delta u_i dS - \int \sigma_{ij} \delta \Delta e_{ij} dV \quad (2.8)$$

δw_r 는 Ω^N 상태에서 應力 σ_{ij} 와 表面力 f_i 가 完全平衡狀態에 있다면 零이되나 微小高次項의 생략과 수치계산의 부정확으로 일반적으로 完全平衡狀態에 있지 않으며 따라서 零이 아니다. 이것은 Newton-Raphson法의 反復回數를 一回한 것과 마찬가지이다.

III. 變位函數와 剛度行列

1. 平板의 有限變形理論과 增分

Kármán에 의한 平板의 有限變形理論은 다음과 같은 假定에서부터 出發한다.⁶⁾

가정 1: 變形前의 中立面에 수직한 線素는 變形後에도 中立面에 수직한 직선이며 길이에 變化가 없다(kirchhoff 가정).

가정 2. 平板의 저질은 그 두께에 비해서는 작지 않으나 폭이나 길이에 비해 아주 작다.

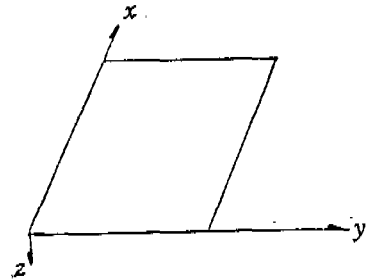


Fig. 3-1.

좌표축은 Fig 3-1과 같이 잡으면 가정 1에 의해 임의점의 변위는 다음과 같이 表示된다.

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.1)$$

여기서 $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ 는 임의점 $P(x, y, z)$ 의 x, y, z 方向의 變位이고, $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ 는 中立面上的의 환경 $q(x, y, 0)$ 의 x, y, z 方向의 變位이다.

(2.1)식의 變形度의 一般式은 平板의 경우 미소항 생략 및 앞의 가정에 의해 잘 아는 바와 같이 다음과 식으로 表示된다.

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2)$$

變形度增분에 대한 식도 같은 方法으로 유도할 수 있다. 이때 (3.1)식에 대응하는 變位增分은 다음과 같이 된다.

$$\Delta U = \Delta u(x, y) - z \frac{\partial \Delta w(x, y)}{\partial x}$$

$$\Delta V = \Delta v(x, y) - z \frac{\partial \Delta w(x, y)}{\partial y}$$

$$\Delta W = \Delta w(x, y) \quad (3.3)$$

(2.4)식의 變形度増分은 平板의 경우 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta \epsilon_x = \frac{\partial \Delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x}$$

$$\Delta \epsilon_y = \frac{\partial \Delta v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \quad (3.4)$$

위의 變形度増分에 대한 應力増分은 $\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy}$ 라 하면 이들 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$[\Delta \sigma] = [D] \{\Delta \epsilon\} = [D^e] \{\Delta \epsilon\} : \text{彈性}$$

$$= [D^p] \{\Delta \epsilon\} : \text{塑性} \quad (3.5)$$

여기서

$$\{\Delta \sigma\} = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta \epsilon\} = \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

[D]는 板剛度行列로 탄성의 경우에는

$$[D^e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

이고 塑性的의 경우에는 다음과 같이 된다.⁸⁹⁾

$$[D^p] = [D^e] - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 & S_1 S_6 \\ & S_2^2 & S_2 S_6 \\ \text{sym} & & S_6^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

여기서

$$S = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H' + S_1 \sigma_x' + S_2 \sigma_y' + 2S_6 \tau_{xy}'$$

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma_x' + \sigma_y')$$

$$S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma_x' + \sigma_y')$$

$$S_6 = \frac{E}{1+\nu} \tau_{xy}'$$

$$\sigma_x' = \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{3}$$

$$\sigma_y' = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{3}$$

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy}$$

$$\bar{\sigma} = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$H' = \frac{\Delta \bar{\sigma}}{\Delta \epsilon^p}$$

$$\Delta \epsilon^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\Delta \epsilon_x^p{}^2 + \Delta \epsilon_y^p{}^2 + \Delta \epsilon_y^p{}^2 + \frac{1}{4} \Delta \gamma_{xy}^p{}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

$\Delta \epsilon^p$ 는 塑性변형도 増分이다.

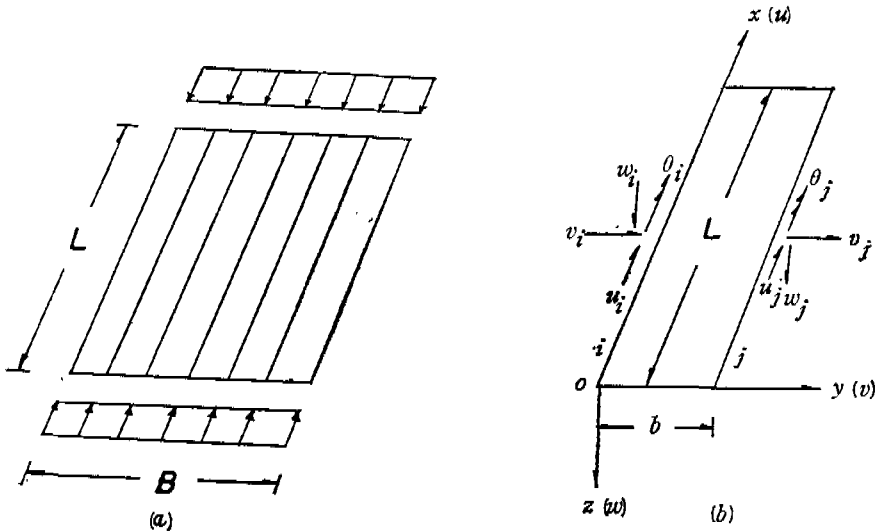


Fig. 3.2. 帶板要素

2. 帶板要素의 變位函數

Fig. 3-2a와 같이 面內荷重(in-plane forces)을 받고 있는 폭이 B 이고, 길이 L 인 平板을 帶板要素(strip elements)로 나누고 한 要素에 대한 座標系를 Fig. 3-2b와 같이 板의 中立面에 잡는다.

要素의 한 변을 i 변, 다른 변을 j 변으로 表示하면 한 要素의 j 변은 인접한 다른 要素의 i 변이 되고 이때 i, j 는 양변의 결선 번호와 같다. 節線上에서는 인접한 要素의 변위가 연속이 되도록 節線上의 變位가 定義되어야 한다.

節線上의 變位를 Fig. 3-2b와 같이 u, v, w, θ 의 4成分으로 잡는다. 여기서 u, v, w 는 各方向의 變位를 θ 는 x 축주위의 同轉角을 表示한다.

다음에 이들은 面外變位와 面內變位로 나누어 설명한다.

i) 面外變位函數

x 方向의 變位 $w(x, y)$ 의 境界조건은 다음과 같다.

$x=0$ 와 $x=L$ 에서 : $w=0$

$y=0$ 에서 : $w=w_1, \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_1$

$y=b$ 에서 : $w=w_2, \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_2$ (3.10)

위의 조건을 만족시키는 變位函數를 다음과 같이 쓸 수 있다.¹⁶⁾

$$\begin{aligned} w &= [N_{\delta 1}] \{\delta_{\delta 1}\} + [N_{\delta 2}] \{\delta_{\delta 2}\} + \\ &= [N_{\delta 1} \ N_{\delta 2} \dots] \begin{bmatrix} \delta_{\delta 1} \\ \delta_{\delta 2} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= [N_{\delta}] \{\delta_{\delta}\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

여기서

$[N_{\delta}] = W_n [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]$

$f_1 = 1 - \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3}$

$f_2 = \frac{y}{b} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3}$

$f_3 = \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3}$

$f_4 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3}$

$W_n = \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} x; \ n=1, 2, 3, \dots$

$[N_b] = [N_{b1} \ N_{b2} \dots]$

$\{\delta_{bn}\} = [w_{in} \ b\theta_{in} \ w_{jn} \ b\theta_{jn}]^T$

$\{\delta_b\} = [\delta_{b1} \ \delta_{b2} \dots]^T$ (3.12)

ii) 面內變位函數

x 方向의 變位 u 및 y 方向 變位 v 에 대한 境界조

건은 다음과 같다.

$y=0$ 에서 : $u=u_1, \ v=v_1$

$y=b$ 에서 : $u=u_2, \ v=v_2$

$x=0$ 와 $x=L$ 에서 : $u \neq 0$

$x = \frac{L}{2}$: $u=0$ (3.13)

위의 境界조건을 만족시키는 變位函數를 다음과 같이 쓸 수 있다.¹⁷⁾

$u = U_1 [f_5 \ f_6] \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} + U_2 [f_5 \ f_6] \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} + \dots$ (3.14)

$v = V_1 [f_5 \ f_6] \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} + V_2 [f_5 \ f_6] \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} + \dots$ (3.15)

여기서

$f_5 = 1 - \frac{y}{b}$

$f_6 = \frac{y}{b}$ (3.16)

x 方向의 積계함수 U_n, V_n 에 대해서는 學者들에 따라 다른 函數를 使用하고 있다.

여기서는 V_n 에 대해서는 上田²⁸⁾이 使用한 것과 마찬가지로

$V_1 = 1$

$V_n = \sin \frac{(2n-3)\pi}{L} x$ (3.17)

식을 使用하고 U_n 의 係수를 유도하기 위해서는 다음과 같이 생각해 본다.

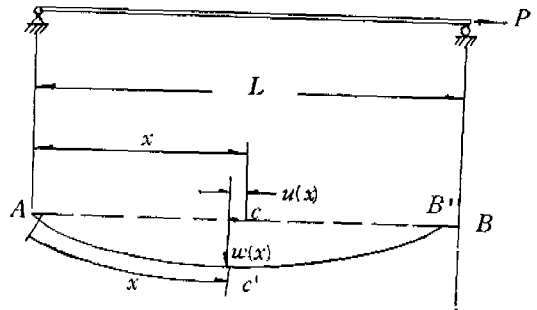


Fig. 3.3.

Fig. 3-3에서 길이 L 인 平板中の 한 線素 AB 가 荷重을 받아 처짐을 일으켜 w 곡선이 되었다면 A 로부터 x 만큼 떨어진 C 는 C' 로 이동하기 이때 변위를 수평변위 $u(x)$ 와 수직변위 $w(x)$ 로 분해할 수 있다.

線素의 길이에 변함이 없다고 가정하면 弧 AC' 의 길이는 x 이고 微小길이 dx 에 대한 수평변위는 다음과 같다.²⁹⁾

$dx - \sqrt{(dx)^2 - (dw)^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$

따라서 $x = \frac{L}{2}$ 에서의 水平變位를 기준으로 할 경우 水平變位 $u(x)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u(x) - u\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int_{\frac{L}{2}}^x \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \quad (3.18)$$

처짐 곡선 $w(x)$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$w(x) = a \sin \frac{\pi}{L} x + b \sin \frac{3\pi}{L} x + \dots \quad (3.19)$$

$\frac{dw}{dx}$ 를 구해 (3.18)식에 代入하고 $u\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ 로 놓으면 水平變位 $u(x)$ 는 다음과 같이 됨을 밝힐 수 있다.

$$u(x) = t' + p'x + q \sin \frac{2\pi}{L} x + r \sin \frac{4\pi}{L} x + s \sin \frac{6\pi}{L} x + \dots \quad (3.20)$$

여기서 t', p', q, r, s 는 常數이다.

初期처짐이

$$w_0(x) = a_0 \sin \frac{\pi}{L} x + b_0 \sin \frac{3\pi}{L} x + \dots$$

로 表示되고 여기서 다시 처짐 $w(x)$ 가 일어날 경우에도 水平變位는 마찬가지로 (3.20)식의 형을 취한다.

경계조건으로

$$\begin{aligned} x=0 \text{에서} : u(x) &= p \\ x=L \text{에서} : u(x) &= -p \end{aligned} \quad (3.21)$$

를 만족하도록 하면 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$u(x) = p \left(1 - \frac{2}{L} x\right) + q \sin \frac{2\pi}{L} x + r \sin \frac{4\pi}{L} x + s \sin \frac{6\pi}{L} x + \dots \quad (3.22)$$

이로 미루어 x 方向的 變位函數 U_n 을 다음과 같이 가정하기로 한다.

$$\begin{aligned} U_1 &= 1 - \frac{2}{L} x \\ U_n &= \sin \frac{2(n-1)x}{L} x; \quad n=2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3.23)$$

위의 식의 결합으로 幾何學的 境界條件을 만족시킬 수 있고, 또 U_n ($n=2, 3, 4, \dots$)의 함수는 sine함수로서 直交性을 가지고 있고, homogeneous boundary condition을 만족시키고 complete 함으로 위의 變位함수를 使用할 경우 수렴성이 좋을 것으로 기대된다.

(3.19)식의 $w(x)$ 와 (3.22)식의 $u(x)$ 를 비교하면 $w(x)$ 가 1항이면 $u(x)$ 는 2항, $w(x)$ 가 2항이면 $u(x)$ 는 4항을 가지게 됨을 알 수 있다. 따라서 $w(x)$ 의 變位함수의 항수를 n 個로 하면 $u(x)$ 의 變位函數의

項數를 $2n$ 個로 하는 것이 合理的이다.

(3.14) 및 (3.15)식의 面內變位函數 u, v 를 行列로 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= [N_{p1}] \{\delta_{p1}\} + [N_{p2}] \{\delta_{p2}\} + \dots \\ &= [N_{p1} \ N_{p2} \dots] \begin{bmatrix} \delta_{p1} \\ \delta_{p2} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= [N_p] \{\delta_p\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

여기서

$$[N_{pn}] = \begin{bmatrix} U_{2n-1} f_s & U_{2n} f_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{2n-1} f_s & V_{2n} f_s \\ V_{2n-1} f_s & V_{2n} f_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{2n-1} f_s & U_{2n} f_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [N_p] &= [N_{p1} \ N_{p2} \dots] \\ \{\delta_{pn}\} &= U_{ik} \ U_{il} \ v_{ik} \ v_{il} \ u_{jk} \ u_{jl} \ v_{jk} \ v_{jl} \}^T; \\ k &= 2n-1, \quad l = 2n \end{aligned} \quad (3.25)$$

이로부터 變位増分 $\Delta w, \Delta u, \Delta v$ 는 다음과 같이 다.

$$\begin{aligned} \Delta w &= [N_{\delta 1}] \{\Delta \delta_{b1}\} + [N_{\delta 2}] \{\Delta \delta_{b2}\} + \dots \\ &= [N_{\delta 1} \ N_{\delta 2} \dots] \begin{bmatrix} \Delta \delta_{b1} \\ \Delta \delta_{b2} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= [N_{\delta}] \{\Delta \delta_b\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} &= [N_{p1}] \{\Delta \delta_{p1}\} + [N_{p2}] \{\Delta \delta_{p2}\} + \dots \\ &= [N_{p1} \ N_{p2} \dots] \begin{bmatrix} \Delta \delta_{p1} \\ \Delta \delta_{p2} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= [N_p] \{\Delta \delta_p\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.1), (3.26) 및 (3.27)식과 (3.27)식으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= [N_p] \{\Delta \delta_p\} - z [G] \{\Delta \delta_b\} \\ &= [N_p] - z [G] \begin{bmatrix} \Delta \delta_p \\ \Delta \delta_b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [N_p] & -z [G] \\ 0 & [N_{\delta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_p \\ \Delta \delta_b \end{bmatrix} \\ &= [N] \{\Delta \delta\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

3. 帶板要素의 變形度와 節線變位와의 관계

(3.4)식의 變形度増分은 다음과 같이 行列로

示할 수 있다.

$$\{\Delta \epsilon\} = \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

위의 식의 첫째항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ y \frac{\Delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{bmatrix} = [B_{p1}] \{\Delta \delta_{p1}\} + [B_{p2}] \{\Delta \delta_{p2}\} + \dots = [B_{p1} \ B_{p2} \ \dots] \begin{Bmatrix} \Delta \delta_{p1} \\ \Delta \delta_{p2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = [B_p] \{\Delta \delta_p\} \quad (3.30)$$

여기서

$$[B_{pn}] = \begin{bmatrix} \frac{dU_{2n-1}}{dx} f_5 & \frac{dU_{2n}}{dx} f_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{2n-1} \frac{df_5}{dy} & V_{2n} \frac{df_6}{dy} \\ U_{2n-1} \frac{df_5}{dy} & U_{2n} \frac{df_6}{dy} & \frac{dV_{2n-1}}{dx} f_8 & \frac{dV_{2n}}{dx} f_8 \\ f_6 \frac{dU_{2n-1}}{dx} & f_6 \frac{dU_{2n}}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{2n-1} \frac{df_6}{dy} & V_{2n} \frac{df_6}{dy} \\ U_{2n-1} \frac{df_6}{dy} & U_{2n} \frac{df_6}{dy} & \frac{dU_{2n-1}}{dx} f_8 & \frac{dV_{2n}}{dx} f_8 \end{bmatrix} \quad [B_p] = [B_{p1} \ B_{p2} \ \dots] \quad (3.31)$$

한편

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \end{bmatrix} = [G_1] \{\Delta \delta_{b1}\} + [G_2] \{\Delta \delta_{b2}\} + \dots = [G_1 \ G_2 \ \dots] \begin{Bmatrix} \Delta \delta_{b1} \\ \Delta \delta_{b2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = [G] \{\Delta \delta_b\} \quad (3.32)$$

여기서

$$[G_n] = \begin{bmatrix} \frac{dW_n}{dx} [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4] \\ W_n \left[\frac{df_1}{dy} \ \frac{df_2}{dy} \ \frac{df_3}{dy} \ \frac{df_4}{dy} \right] \end{bmatrix} \quad [G] = [G_1 \ G_2 \ \dots] \quad (3.33)$$

따라서 (3.29)식의 둘째항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \end{bmatrix} = [C] [G] \{\Delta \delta_b\} \quad (3.34)$$

여기서

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

(3.29)식의 셋째항은 다음과 같이 된다.

$$z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = z [B_{b1}] \{\Delta \delta_{b1}\} + z [B_{b2}] \{\Delta \delta_{b2}\} + \dots = z [B_{b1} \ B_{b2} \ \dots] \begin{Bmatrix} \Delta \delta_{b1} \\ \Delta \delta_{b2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = z [B_b] \{\Delta \delta_b\} \quad (3.36)$$

여기서

$$[B_{bn}] = \begin{bmatrix} \frac{d^2 W_n}{dx^2} [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4] \\ W_n \left[\frac{d^2 f_1}{dy^2} \ \frac{d^2 f_2}{dy^2} \ \frac{d^2 f_3}{dy^2} \ \frac{d^2 f_4}{dy^2} \right] \\ 2 \frac{dW_n}{dx} \left[\frac{df_1}{dy} \ \frac{df_2}{dy} \ \frac{df_3}{dy} \ \frac{df_4}{dy} \right] \end{bmatrix} \quad [B_b] = [B_{b1} \ B_{b2} \ \dots] \quad (3.37)$$

따라서 (3.29)식의 變形度增分은 다음과 같이 表示된다.

$$\{\Delta \epsilon\} = [B_p] \{\Delta \delta_p\} + [C] [G] \{\Delta \delta_b\} - z [B_b] \{\Delta \delta_b\} = \begin{bmatrix} [B_p] & [C] [G] - z [B_b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_p \\ \Delta \delta_b \end{Bmatrix} = [B] \{\Delta \delta\} \quad (3.38)$$

여기서

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_p] & [C] [G] - z [B_b] \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

4. 帶板要素의 剛度行列

(3.38)식으로부터 다음 식이 유도된다.

$$\begin{aligned}
\delta\{\Delta\varepsilon\}^T &= \delta\{\Delta\delta\}^T [B]^T \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \begin{bmatrix} [B_p]^T \\ [G]^T [C]^T - z [B_b]^T \end{bmatrix} \\
\{\Delta\sigma\} &= [D] \{\Delta\varepsilon\} \\
&= [D] [B] \{\Delta\delta\} \\
&= [D] [[B_p] [C] [G] - z [B_b]] \{\Delta\delta\} \quad (3.40)
\end{aligned}$$

(2.7)식의 増分形 平衡方程式의 첫째 항을 行列로 包抄하고 위의 식을 代入하면

$$\begin{aligned}
\int \Delta\sigma_{ij} \delta\Delta\varepsilon_{ij} dV &= \int (\Delta\sigma_x \delta\Delta\varepsilon_x + \Delta\sigma_y \delta\Delta\varepsilon_y + \Delta\tau_{xy} \delta\Delta\gamma_{xy}) dV \\
&= \int \delta\{\Delta\varepsilon\}^T \{\Delta\sigma\} dV \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \int [B]^T [D] [B] dV \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \int \begin{bmatrix} [B_p]^T \\ [G]^T [C]^T - z [B_b]^T \end{bmatrix} \\
&\quad [D] [[B_p] [C] [G] - z [B_b]] dV \{\Delta\delta\} \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{pb}] + [K_{pb}^p] \\ \text{sym} [K_{bb}] + [K_{bb}^p] + [K_c] \end{bmatrix} \{\Delta\delta\} \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T [[K_0] + [K_L]] \{\Delta\delta\} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
[K_{pp}] &= \int [B_p]^T [D] [B_p] dV \\
[K_{pb}] &= \int [B_p]^T [D] [C] [G] dV \\
[K_{pb}^p] &= \int -z [B_p]^T [D] [B_b] dV \\
[K_{bb}] &= \int z^2 [B_b]^T [D] [B_b] dV \\
[K_{bb}^p] &= -\int z [B_b]^T [D] [C] [G] dV \\
&\quad -\int z [G]^T [C]^T [D] [B_b] dV \\
[K_c] &= \int [G]^T [C]^T [D] [C] [G] dV \\
[K_0] &= \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{pb}^p] \\ \text{sym} & [K_{bb}] \end{bmatrix} \\
[K_L] &= \begin{bmatrix} 0 & [K_{pb}] \\ \text{sym} & [K_{bb}^p] + [K_c] \end{bmatrix} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

한편

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

를 使用하면 (2.7)식의 둘째 항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\int \sigma_{ij} \delta \left(\frac{1}{2} \Delta u_{K,i} \Delta u_{K,j} \right) dV \\
= \int \left(\sigma_x \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \left. + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} - \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \right) dV \\
&= \int \left(\sigma_x \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \cdot \sigma_y \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \right) \right) dV \\
&= \int \left[\delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \end{bmatrix} dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta\{\Delta\delta_b\}^T \int [G]^T [P] [G] dV \{\Delta\delta_b\} \\
&= \delta\{\Delta\delta_b\}^T [K_o^b] \{\Delta\delta_b\} \quad (3.44)
\end{aligned}$$

여기서

$$[K_o^b] = \int [G]^T [P] [G] dV \quad (3.45)$$

$$[K_o] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_o^b] \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

로 놓는다.

(2.7)식의 우변의 첫째 항은 (3.28)식을 使用하고 x, y, z 方向의 外力증분은 $\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta f_z$ 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\int \Delta f_i \delta \Delta u_i dS &= \int \delta [\Delta U \ \Delta V \ \Delta W] \begin{bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta f_z \end{bmatrix} dS \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \int [N]^T \{\Delta f\} dS \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \{\Delta F\} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
\{\Delta f\} &= \begin{bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta f_z \end{bmatrix} \\
\{\Delta F\} &= \int [N]^T \{\Delta f\} ds \quad (3.48)
\end{aligned}$$

(2.8)식의 δw_r 은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\delta w_r &= \int f_i \delta \Delta u_i dS - \int \sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} dV \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \int [N]^T \{f\} dS - \delta\{\Delta\delta\}^T \int [B]^T \{\sigma\} dV \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \{\{F\} - \{R\}\} \\
&= \delta\{\Delta\delta\}^T \{\Delta F_r\} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
\{F\} &= \int [N]^T \{f\} dS \\
\{R\} &= \int [B]^T \{\sigma\} dV \\
\{\Delta F_r\} &= \{F\} - \{R\} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

(3.41), (3.44), (3.47) 및 (3.49)식과 (2.7)식

으로부터 行列로 表示되는 増分形 平衡方程式은 다음과 같이 된다.

$$\delta\{\Delta\delta\}^T \{ [K_0] + [K_L] + [K_e] \} \{\Delta\delta\} = \delta\{\Delta\delta\}^T \{\Delta F\} + \delta\{\Delta\delta\}^T \{\Delta F_r\}$$

여기서 $\delta\{\Delta\delta\}^T$ 는 임의이므로 다음식이 얻어진다.

$$[K_T] \{\Delta\delta\} = \{\Delta F\} + \{\Delta F_r\} \quad (3.51)$$

여기서

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_e] \quad (3.52)$$

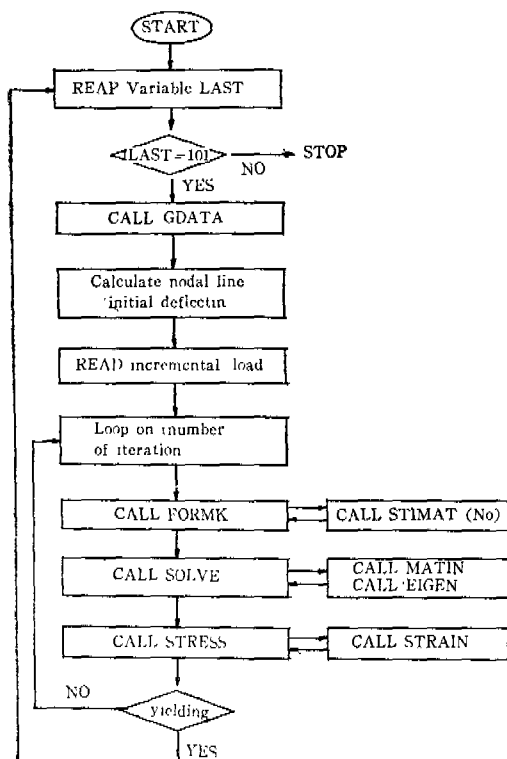
위의 식은 한 요소에 대한 것으로 全體構造物에 대한 平衡方程式은 이들을 有限要素法의 일반적인 方法에 따라 集成하면 얻을 수 있다.

IV. 프로그램

1. 프로그램의 구성

알의 理論에 따라 IBM 360-148 기계와 Fortran 언어를 使用하여 作成하였다. 이 program은 source program card가 약 2,000장 정도이며 이와같이 큰 program을 개발하는데는 program을 여러 부분으로 나누어 subroutine subprogram으로 개발하고

flow-chart MAIN PROGRAM



이들은 main program에 의해 서로 결합시켜 전체의 program을 完成시켜야 한다.

本 program은 data를 읽어들이는 GDATA, 요소剛度行列을 만드는 STIMAT, 要素剛度行列을 集成하여 構造全體의 剛度行列을 만드는 FORMK, 연립방정식을 푸는 SOLVE, 應力을 計算하는 STR-ESS, 變形度를 計算하는 STRAIN, 行列의 逆行列을 計算하는 MATIN, 固有值를 計算하는 EIGEN 등의 8개의 subroutine subprogram과 이들을 集成시키는 한 개의 main program으로 構成되어 있다.

단 本 program에서는 재료가 항복응력을 넘어 소성을 나타내는 곳은 취급하지 않았다.

2. 増分形 平衡方程式의 解法

外力을 주는 方法에 따라 荷重増分方式과 變位増分方式으로 나눌 수 있다.

荷重増分方式은 (3.51)식의 平衡方程式에 荷重増分 $\{\Delta F\}$ 를 加하고 여기서 $\{\Delta\delta\}$ 를 求해 가는 方法이고 變位増分方式은 變位増分 $\{\Delta\delta\}$ 를 먼저 加하고 이로부터 $\{\Delta F\}$ 를 求하는 方法이다.

計算결과 變位増分方式이 수렴이 빨라 여기의 예제에서는 모두 이 方法을 使用하였다.

V. 解析列

본 program에 의해 초기치점을 가진 단순지지된

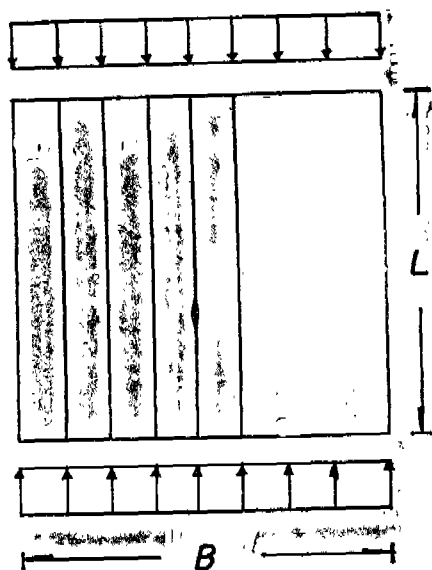


Fig. A.

板이 一軸方向의 荷重을 받을 때의 거동을 살피고 또 초기치짐이 없는 理想的인 경우의 挫屈解析을 하여 다른 연구결과와 비교한다.

Fig.5-1은 Fig. A와 같이 폭 $B=100\text{cm}$, 길이 $L=100\text{cm}$, 두께 $T=1\text{cm}$ 이고 初期치짐 w_0 가 $0.001B$ 인 4번 隣순지지된 平板의 경우 대칭성을 이용하여 平板의 半部分에 대해 帶板要素의 數 $NE=5$ 로 하여 그의 기동을 관찰하였다.

여기서 중축의 σ_{av} 는 面內荷重의 平均應力을, σ_{cr} 은 挫屈荷重을 表示하고 頂軸의 w_n 은 平面中央에서의 順수치짐, 즉 전체치짐에서 初期치짐을 빼 나머지 치짐을 表示한다.

압축外力을 주는 方法으로는 均等變位の 變位増分方式에 依하였으니 이때 매 단계마다 壓縮外力方向의 面內變位増分の 크기 D_1 을 0.002cm 로 하였다.

이때 COAN의 精確한 解法과 比較할 때 壓縮平均荷重 σ_{av} 가 挫屈應力 σ_{cr} 보다 작은 때는 약간 작은 치짐을 주지만 $\sigma_{av} > \sigma_{cr}$ 에서는 잘 맞는 결과를 보여 준다.

Fig.5-2는 다른 條件은 Fig.5-1과 마찬가지로 壓縮外力方向의 面內變位増分 D_1 을 달리했을 경우 荷重과 平板中央點 頂軸과의 관계를 보여 준다.

그런에서 보면 $D_1=0.001\text{cm}$ 로 하면 COAN의 精確해와 잘 맞는 결과가 나오고 $D_1=0.005\text{cm}$ 로 하면

상당한 차이가 나온다. 따라서 $D_1=0.001\text{cm}$ 로 하는 것이 이상적 이겠지만 이렇게 하면 계산시간이 너무 많이 걸려 여기서는 약간의 오차를 감수하고 $D_1=0.002\text{cm}$ 로 한다.

Fig.5-3은 다른 條件은 Fig.5-1의 경우와 마찬가지로 帶板要素의 數 NE 를 2, 4, 5, 10개로 하였을 때의 기동을 그린 것이다. 이때 $NE=5$ 인 경우와 $NE=10$ 인 경우 그 차이는 구별할 수 없으며 $NE=2$ 인 경우는 平均荷重 σ_{av} 가 挫屈應力 σ_{cr} 보다 작은 곳에서는 차이가 없으나 σ_{av} 가 키짐에 따라 그 차이가 커져간다. 따라서 이후의 계산에서는 $NE=4$ 를 使用하기로 한다.

Fig.5-4는 初期치짐 w_0 가 板의 기동에 미치는 영향을 表示한 것이다. 여기서도 다른 조건은 Fig.5-1의 경우와 같다. 初期치짐 w_0 가 變함에 따라 平均荷重 σ_{av} 가 挫屈荷重 σ_{cr} 보다 작은 범위에서는 치짐량에 큰 차이를 주나 挫屈荷重 σ_{cr} 보다 커져감에 따라 그 차이가 차차 작아짐을 알 수 있다.

Fig.5-5는 Fig.5-1과 같은 條件하에서 應力の 分布를 나타낸 것이다. 應力이 작은 때는 均等한 分布를 나타내나 平均應力이 커져감에 따라 그림과 같이 차차 심한 不均等한 應力分布를 나타낸다.

Fig.5-6은 極限強度와 無次元 幅厚比와의 관계를 表示한다. 中軸 σ_y 는 鋼材의 降伏應力으로 여기서는

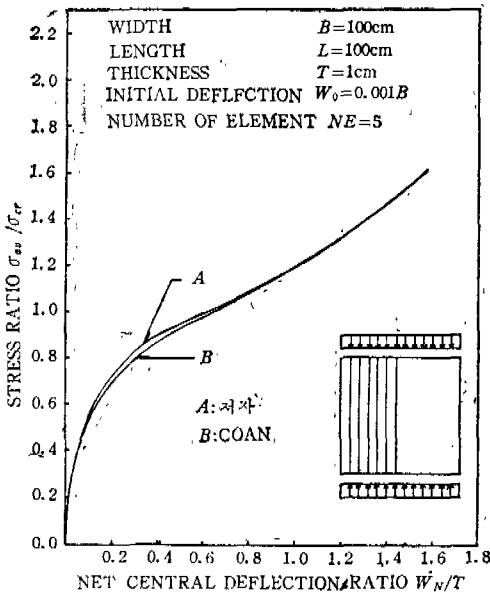


Fig.5-1. Deflection Behavior I

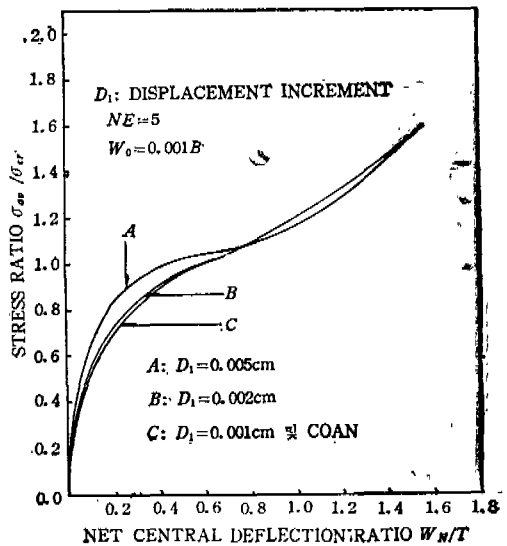


Fig.5-2. Deflection Behavior II

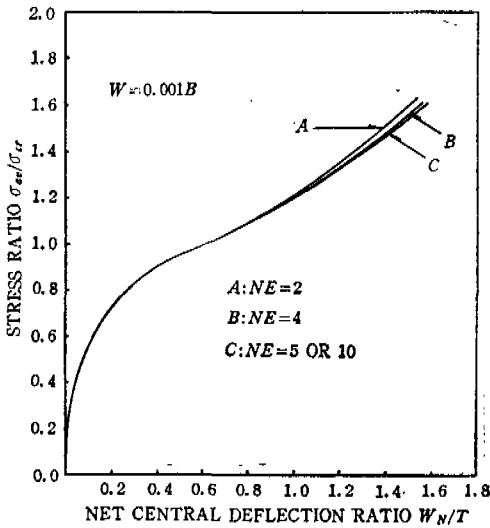


Fig. 5-3. Deflection Behavior III

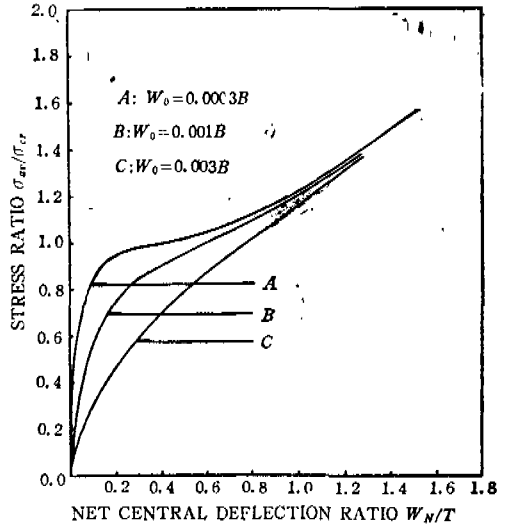


Fig. 5-4. Deflection Behavior IV

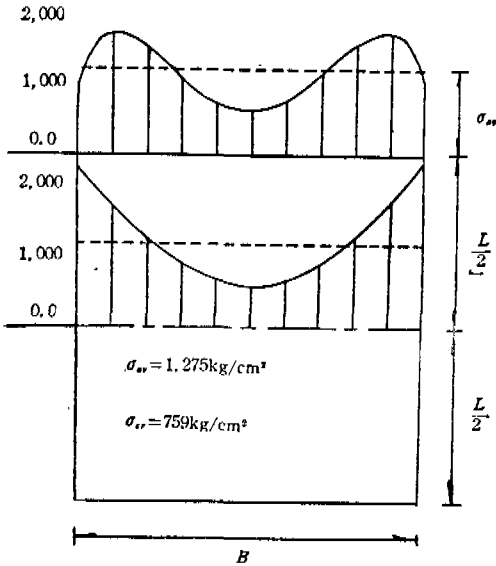


Fig. 5-5. Stress Distributions

2400/cm²을 사용하였다. σ_u 는 剛板의 極限強度로 이 때의 파괴기준은 荷重을 받지 않는 양변 中央에서의 膜應力(membrane stress)이 σ_y 에 도달할 때 파괴 된다고 생각했으며 이것은 Dawson¹⁹⁾ 등에 의해 사용된 기준이다.

slenderness factor β 는 鋼板의 幅厚比 B/T 와 剛板의 彈性挫屈應力이 降伏應力과 같게 될 때의 限

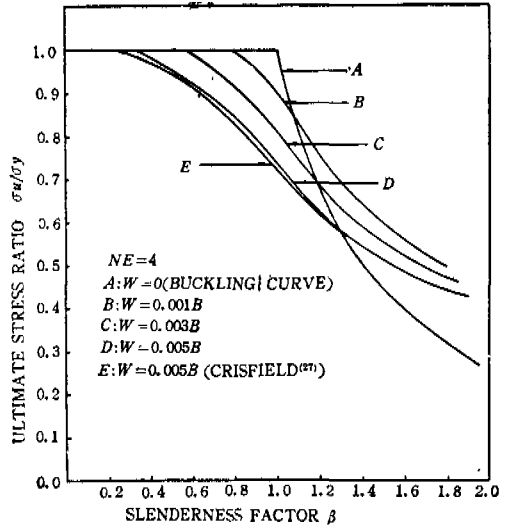


Fig. 5-6. Ultimate Load and Slenderness

界幅厚比(B/T)과의 比로서 다음식으로 表示된다.¹⁹⁾

$$\beta = \frac{B/T}{(B/T)_c} = \frac{B}{T} \frac{12(1-\nu^2)\sigma_y}{K\pi^2 E} \quad (6.1)$$

여기서 K 는 挫屈係數, E 는 Young係數, ν 는 Poisson比이다.

$w_0=0.005B$ 인 경우의 결과를 Crisfield²⁷⁾의 4각 형 요소에 의한 결과와 비교하였다.

初期처럼 w_0 가 鋼板의 극한 강도에 미치는 영향은 buckling curve와 비교해 볼 때 한계폭후비 근처에서 크고, 판이 두꺼우면 그의 영향은 작아지며, 판이 상당히 얇은 때는 어느 정도의 후좌굴 강도를 기대할 수 있음을 보여 준다.

Ⅵ. 結 論

1. curvature effect를 고려하여 面外變位函數로부터 유도한 식을 참고로 하여 새로운 面內變位函數를 가정하여 有限帶板法을 定式化 하였다.

2. 위에서 定式化한 有限帶板法에 따라 編成한 프로그램을 써서 수치해석한 결과 變位増分方式이 荷重増分方式보다 수렴이 빨랐다.

3. 單軸壓縮을 받는 平板을 여러 경우에 대해 帶板法으로 계산한 결과는 COAN에 依한 解析의 方法이나 Crisfield에 依한 有限要素法으로 얻어진 결과와 잘 일치함을 확인하였다.

後 記

本 研究는 1978학년도 문교부 학술연구 조성비의 지원으로 이루어졌음은 밝히고 감사드린다.

參 考 文 獻

1. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961.
2. Chajes, A., Principles of Structural Stability Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
3. Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W., A General Theory of Elastic Stability, 1973.
4. Dym, C.L. and Shames, I.H., Solid Mechanics, McGraw-Hill, 1973.
5. Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975.
6. Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
7. 山田嘉昭, マトリクス法の應用, 1972.
8. 川井忠彦, 挫屈問題解析, 培風館, 1974.
9. The Subcommittee on Ultimate Strength of

- Box-Girders of the ASCE-AASHTO Task Committee on Flexural Members of the Committee on Metals of the Structural Division., Steel Box-Girder Bridges-Ultimate Strength Considerations, ASCE, Vol.100, ST12, 1974.
10. Dowling, P.J., Strength of Steel Box-Girder Bridges, ASCE, Vol.101, ST9, 1975.
11. Massonet, C.E. and Maquoi, R.J., Design of Steel Plate and Box-Girder Bridges, ASCE, Vol. 101, ST11, 1975.
12. Merrison Committee, Inquiry into the Basis of Design and Method of Erection of Steel Box-Girder Bridges, Her Majesty's Stationary Office, London, 1973.
13. 中永琦, 直方性鋼板의 壓縮耐荷力, 學術院論文第十六輯(別冊), 自然科學篇, 1977.
14. 吉田宏一郎, 帶板要素による 平板構造의 挫屈解析, 日本造船學會論文集, 第130號, 1971.
15. 長谷川彰夫, 大田孝二, 西野文雄, 補剛された板要素의 挫屈強度에 關する二, 三의 考察, 日本土木學會論文報告集, 第22號, 1974.
16. Cheung, Y.K., The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends, Proc. I.C.E., 1968.
17. Cheung, Y.K., Folded Plate Structures by Finite Strip Method, ASCE, Vol.95, ST12, 1969.
18. Coan, J.M., Large-Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. of Applied Mechanics, Vol.18, NO.2, 1951.
19. Dawson, R.G. and Walker, A.C., Post-Buckling of Geometrically Imperfect Plates, ASCE, Vol.98, ST1, 1972.
20. Chang, S.P., Zum nichtlinearen Tragverhalten axial gedruckter in Langsrichtung mit geschlossenen verstärkter Blechfelder, Der Stahlbau 46, H.8, 1977.
21. 藤田讓, 野本敏, 治仁保, 治防撓治の壓縮強度について, 日本造船學會論文集, 第141號, 1977.
22. Rhodes J. and Harrey, J.M., Examination

- of Plate Post Buckling Behavior, ASCE, Vol. 103, EM3, 1976.
23. Mallet, R.H. and Marcal, P.V., Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, ASCE, Vol.94, ST9, 1968.
24. Hofmeister, L.D., Greenbaum, G.A. and Evensen, D.A., Large Strain Elasto-Plastic Finite Element Analysis, AIAA J., Vol.9, NO.7, 1971.
25. Stricklin, J.A., Haisler, W.E. and Von Riesenmann, W.A., Geometrically Nonlinear Structural Analysis by Direct Stiffness Method, ASCE, Vol.97, ST9, 1971.
26. Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C., Note on the Alpha Constant Stiffness Method for the Analysis of Nonlinear Problems, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol.4, 1972.
27. Crisfield, M.A., Full-Range Analysis of Steel Plates and Stiffened Plating under Uniaxial Compression, Instn Civ. Engrs, Part 2, Vol.59, 1975.
28. 上田幸雄, 松石正克, 山内裕, 田中雅子, 有限帯板法による平板の弾塑性大たわみ解析, 日本関西造船協会誌, 第154号, 1974.
29. 上田幸雄, 安川慶, 矢尾哲也, 池上博, 大南亮一, 圧縮を受ける正方形平板の最終強度に関する研究(第一, 二号), 日本造船学会論文集, 第137号, 1975, 第140号, 1976.
30. 上田幸雄, 矢尾池哲, 菊仁司, 補強材の最小剛比について, 日本造船学会論文集, 第140号, 1976.
31. 小松定夫, 北田俊行, 宮崎清司, 残留應力および初期たわみを有する壓縮板の弾塑性解析, 日本土木論文報告集, 第244号, 1975.
32. 小松定夫, 北田俊行, 初期不整を有する壓縮板の極限強度特性に関する研究, 日本土木学会論文報告集, 第270号, 1978.
33. Murry, N.W., Analysis and Design of Stiffened Plates for Collapse Load, The Structural Engineer, Vol.53, No.3, 1975.
34. Horne, M.R. and Narayanan, R., An Approximate Method for the Design of Stiffened Steel Compression Panels, Instn Civ. Engrs, Part 2, Vol.59, 1975.
35. Horne, M.R. and Narayanan, R., Design of Axially Loaded Stiffened Plates, ASCE, Vol. 103, ST11, 1977.
36. Horne, M.R. and Narayanan, R., Ultimate Capacity of Longitudinally Stiffened Plates Used in Box Girders, Instn Civ. Engrs, Part 2, Vol.61, 1976.
37. Yamada, Y. and Watanabe, E., On the Behavior and Ultimate Strength of Longitudinally Stiffened Flanges of Steel Box Girders, JSCE, No.252, 1976.
38. 小松定夫, 牛尾正之, 北田俊行, 補剛材を有する壓縮板の極限強度に関する実験的研究, 日本土木学会論文報告集, 第255号, 1976.
39. 山田嘉昭, スリックス法材料力学, 培風館, 1970.