

## 有限要素法에 依한 擴散方程式의 數值解析

金 聲 得

土木工學科

(1983. 4. 30 접수)

### 〈要　約〉

二次元場에서 鉛直方向으로 積分한 移流擴散方程式을 二次의 補間函數을 가지는 六節點 三角形 要素을 使用한 有限要素法에 依하여 解析하였다.

時間積分을 위해서는 内插(implicit)한 有限差分法인 梯形法則을 사용하였으며 解의 安定性을 위한 經驗的收驗條件을 數值實驗을 동래서 조사하였다. 計算의 信頼度를 檢證하기 위하여 一次元開水路에서의 解析解와 比較하였으며 一次元水路의 側面에서 監水가 流入하는 경우의 橫方向 亂流擴散을 究明하기 위한 實驗에 적용하여 數值解와 實驗解는 比較考察하였다.

## Numerical Analysis of the Convective-Diffusion Equation by the Finite Element Method

Kim, Seong-Deuk

Dept. of Civil Engineering

(Received April 30, 1983)

### 〈Abstract〉

Vertically integrated convective-diffusion equation in a two dimensional coordinate system is analyzed by the finite element method using six noded triangular elements with quadratic interpolation fuctions.

A simple implicit iterative scheme based on the trapezoidal rule is employed for time integration and empirical convergence criteria required by the iteration procedure are examined by numerical experiments.

The accuracy of the computational scheme is investigated on analytical one dimensional open channel flow.

The numerical scheme is applied to the laboratory investigation of turbulent diffusion in open channel by means of salt water injection and comparisons with laboratory measurements and discussions are presented.

### I. 서　론

근래에 이르러 도시 및 산업의 고도성장은 여러 가지 오염물질들의 양을 급격히 증가시켰고 이러한

오염물질들이 하천이나 海岸 등으로 放流水로써 발생하는 환경오염에 대한 관심은 放流水域에 대한 水質調查의 필요성이나 이러한 지역의 利用에 관한 종합적인 계획을 세우기 위한 環境豫測에 관한 지식을 요구하고 있다.

이러한 계획을 세우는데 따르는 주된 기술적인 문제는 放出된 汚染水 들이 이를 水域에서 어떻게 퍼져 나갈것인가를豫測하는 것으로 이를 위해서는 動水力學의 흐름에 관한 지식이 필요할 뿐만 아니라 汚染物質들의 특성이나 相互作用 等이 어떻게 될지를 알아야 한다.

자연 상태에서 발생하는 그리한 진행과정을 알기 위해서 일반적으로는 현장에서 직접 조사된 자료들을 사용하거나 水理模型 實驗을 통하여 現象을 추정하여 왔으나 이러한 방법들은 많은 경비와 시간이 요할 뿐만 아니라 그 적용성에 있어서도 장소나 상황에 따라 많은 제약을 받게된다.

근래 고속 전자계산기가 확대 보급되고 수치해석 技法이 발달함에 따라 복잡한 자연현상이라도 상당한 부분까지 이를 수학적으로 정식화하고 해석할수가 있게 된으로써 數學的 模型을 통하여 자연현상을 예측하고자 하는 연구가 활발히 시도되고 있다.

이러한 數學的 模型에 관한 연구는 1960년대 후반 1970년대 초반까지는 Leendertse, Fischer 등에 의한 有限差分法이 주로 사용되어져 왔으나<sup>1)~5)</sup> 1970년대 후반 有限要素法이 流體問題에 應用되면서부터 이들에 관한 많은 연구들이 수행되고 있다.<sup>6)~11)</sup>

筆者는 1978년 Leendertse의 有限差分 모델을 응용하여 수영장의 流出量變化에 따른 湾 内의 流速分布豫測를 위한 數學的 技法을 提示하였고<sup>3)</sup> 1979년 有限要素法을 사용하여 定常狀態의 흐름에 관한 프로그램을 개발하여 地下水의 流線網을 해석하고 그 解의 適合性을 보였으며<sup>3)</sup> 1980년 淡水方程式을 有限要素法에 의해 解析하는 프로그램을 提示하였다.<sup>3)</sup>

本研究에서는 二次의 三角形要素를 使用한 有限要素法에 의하여 二次元 場에서의 分散方程式 혹은 移流擴散方程式을 解析하는 프로그램을 개발하고 數值解의 解析解 및 實驗值를 비교하면서 개발된 프로그램을 檢證하고 이를 이용한 數值實驗을 통하여 分散 및 擴散에 관한 몇 가지 特徵的 사항을 지적하고 본 연구자의 淡水方程式 解析프로그램과의 관계를 설명하였다.

## II. 基本方程式

分子擴散 및 亂流擴散을 고려한 擴散方程式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + v_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) = \rho p + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

여기서  $\rho$ ; 밀도

$C$ ; 농도

$v_i$ ;  $i=x, y, z$  방향에 대한 속도 성분

$x_i$ ; 좌표계

$p$ ; 그 부피 내에서 等分布된 消滅 혹은 發生量의 比

$k_i$ ; 擴散係數로서 分子擴散과 亂流擴散 을 고합한다.

일반적으로 어떤 물질이 그 유체 내에서 잘 혼합된 경우라고 생기되는 문제에서는 時間的 평균치에 대한 擴散方程式 (1)式을 鉛直方向으로 적분함으로써 斷面平均成分을 가진 二次元 場에서의 分散方程式을 擴散方程式과類似하게하여 다음과 (2)式과 같이 얻을수 있고 이때 分散係數  $D_i$ 는 (3)式으로定義된다.

$$\rho \left( H \frac{\partial C}{\partial t} + HV_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) = \int \rho pdh + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( HD_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

여기서  $H$ ; 水深

$V_i$ ;  $v_i$ 의 水深에 따른 平均值

$$\int \rho pdh = F - \alpha HC - \Sigma Q_i A_i$$

$F = \rho fH$ ; 分布發生源(distributed source)

$f$ ; 分布發生比(distributed source rate)

$\alpha = H\beta$ ; 減衰係數(decay coefficient)

$\beta$ ; 減衰定數(decay constant)

$\Sigma Q_i$ ; 點發生源의 합계

$A_i$ ; kronecker delta函數

$D_i$ ; 分散係數

$$\frac{1}{A} \int_A V_i'' C'' dA = -D_i \frac{\partial C}{\partial X_i} \quad (3)$$

여기서  $V_i''$ ,  $C''$ 는 斷面平均  $V_i$ ,  $C_i$ 에 대한 變動值得 나타낸다.

## III. 有限要素法에 의한 變分方程式

### 1. 境界條件 및 初期條件

(2)式을 풀기 위하여는 Figure 1과 같은 境界條件과 初期條件이 주어져야 한다.

境界條件은  $S_1$ 境界에서 濃度 또는 温度의 값이 주

어치며  $S_2$ 境界에서 質量束(flux)  $\bar{q}_n = \alpha_n q_n$  가 주어지는 것이다. 여기서  $\bar{q}_n$ 는境界에 垂直인 質量束이며  $\alpha_n$ 는  $x_i$ 축과 이에 垂直인 法線사이의 角에 대한 方向餘弦이다. 初期條件은  $t=0$ 時刻에서의 未知數의 값이며 보통 零에서 시작한다.

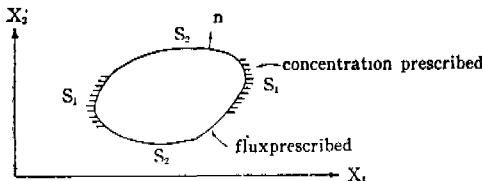


Fig. 1. Boundary condition

## 2. 變分方程式(Variational statement)

(2)式 중의  $V_i$ ,  $X_i$  및  $D_i$ 를  $U, V, x, y$  및  $D_x, D_y$ 로 나타내어서 Galerkin 방법을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \iint \left\{ \rho \left[ H \frac{\partial C}{\partial t} + HU \frac{\partial C}{\partial x} + HV \frac{\partial C}{\partial y} \right. \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left( HD_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HD_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] \delta C \\ & \quad \left. + [-F + \alpha h C + \Sigma Q_i A_i] \delta C \right\} dx dy \\ & = \int_{S_2} h \{ q_n - \bar{q}_n \} \delta C dS \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式을 部分積分하면 다음 (5)式으로 주어진다.

$$\begin{aligned} & \iint \left\{ \rho \left[ H \frac{\partial C}{\partial t} + HU \frac{\partial C}{\partial x} + HV \frac{\partial C}{\partial y} \right] \delta C \right. \\ & \quad \left. + \rho CH D_x \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \delta C}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \rho CH D_y \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta C}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + [-F \delta C + \alpha h C \delta C + \Sigma Q_i A_i \delta C] \right\} \\ & \quad dx dy + \int_{S_2} H \bar{q}_n \delta C = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $S_1$  경계에서는  $C = \bar{C}$ 이다.

## 3. 要素行列

未知數  $C$ 를 構成函數  $\phi$ 와 節點 未知數  $C_i(t)$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$C = \sum_{j=1}^6 C_j(t) \phi_j, \quad (6)$$

그 导函數들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= \sum_{j=1}^6 C_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \sum_{j=1}^6 C_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial C_j}{\partial t} \phi_j = \sum_{j=1}^6 \dot{C}_j \phi_j \end{aligned} \quad (7)$$

(6)式 및 (7)式을 (5)式에 대입하면

$$M \dot{C} + K C + A C + B C = P \quad (8)$$

이다. 여기서

$$\left. \begin{aligned} M &= \iint \rho H \phi_i \phi_j dA \\ K &= \iint \left\{ \rho H \left[ D_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_y \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] \right\} dA \\ A &= \iint \rho H \left\{ U \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + V \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} dA \\ B &= \iint \alpha H \phi_i \phi_j dA \\ P &= \iint F_i \phi_i dA + \iint H F_j \phi_j dA \\ &\quad - \int_{S_2} H \bar{q}_n \phi_i dS - \iint \Sigma_k Q_k A_k \phi_i dA \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(2)式에서 주어지는 分布汚染源 項인  $F$  벡터는 單位 부피 當의 量인  $F_1$ 과 單位面積當의 量인  $F_2$ 로 나누어서 고려한다. 즉  $F = F_1 + H F_2$ 이다.

각각 나쁜 要素들에 의해 連續體의 全體的인 平衡方程式을 일기 위해서 그 要素行列들을 重疊하면 다음과 (10)式과 같다.

$$M \dot{C}_N + K C_N + \bar{A} C_N + \bar{B} C_N = P_N \quad (10)$$

여기서  $M, K, \bar{A}, \bar{B}$ 들은 全體系에 대한 行列들이고  $C_N, P_N$ 는 全體  $N$ 개의 頂點들에서의 未知數 벡터 및 入力 벡터이다.

## 4. 時間積分

(10)式의 시간에 대한 頁분은 다음과 같은 梯形法則을 시용한다.

$$\begin{aligned} \dot{C}_N &= \frac{C_N^{n+1} - C_N^n}{\Delta t}, \quad C_N = \frac{C_N^{n+1} + C_N^n}{2} \\ P_N &= \frac{P_N^{n+1} + P_N^n}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 添字 ‘ $n$ ’는  $\Delta t$  시간 간격에 있어서 初期時刻을 나타내고 ‘ $n+1$ ’은 마지막 時刻을 나타낸다. 이러한 關係를 (10)式에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{\Delta t} \bar{M} + \bar{K} + \bar{A} + \bar{B} \right] C_N^{n+1} \\ & = \left[ \frac{2}{\Delta t} \bar{M} - \bar{K} - \bar{A} - \bar{B} \right] C_N^n + P_N^{n+1} + P_N^n \end{aligned} \quad (12)$$

위의 (12)식을 간단히 쓰면 다음과 같다.

$$M^*C_N^{n+1} = F^* \quad (13)$$

위의 式에서  $\Delta t$ 의 선택은 해의 정확도를 좌우하는 중요한 요소이다. 만약  $\Delta t$  가 적절히 선택되지 못하면 隱의 濃度 값을 얻을 수도 있다. 分散係數의 값이 流速에 比하여 작을 경우는 큰 濃度傾斜가 오차의 원인이 되기도 한다. 이러한 경우는 格子網을 좀더 작게 취한다거나 汚染源을 넓게 分布 시킴으로써 수정해 나갈수가 있다.

이러한 오차를 제 악할 수 있는 分散係數의 최소 한계는 결국 유속의 크기와 格子網의 大小에 따라 결정되어진다.

정확한 값을 얻을 수 있는 최대 시간 간격도 역시 格子 최소간격의 학수로 주어진다. 이러한 관계들은 경험적으로 다음과 같이 일컬여 있다.<sup>21)</sup>

$$D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{5}, \quad V \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{5} \quad (14)$$

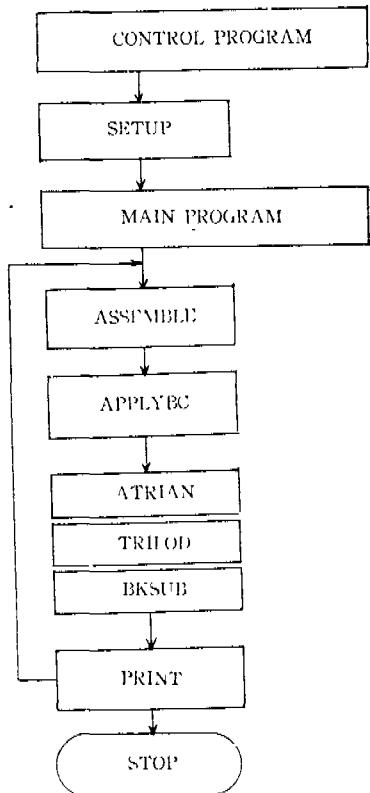
$\Delta t$ 는 (14)식을 모두 만족시켜야만 할 것이 요구되나 성립적 계수들의 값이 항상 정확하게 주어지는 것이 아니기 때문에 그 制約條件은 문제에 따라 어느정도 변화되어 진다.

定常狀態의 時를 일 때에 格子間格의 安定的 결정은 다음의 경험적 관계에 따른다.

$$\Delta x < \left( \frac{4D}{V} \sim \frac{2D}{V} \right) \quad (15)$$

## 5. 프로그램의 概要

dimension statement에 관한 변화를 최소화하고 Computer store 를 효과적으로 하기 위하여 dynamic storage 技法을 사용하였다. Strategy Code 를 주어 流速이 일정하게 주어지는 경우, 定常狀態의 흐름인 경우 및 非定常狀態에서의 흐름인 경우 각각에 대해서 효과적으로 내용하게 하였다. 프로그램을 요약 정리하면 다음과 같다.



- : Read in size of problem and allocate storage areas
- : Read and check all data, print out and calculate bandwidth of eq.
- : Initialize vectors and enter integration loop depending upon strategy selected.
- : Computes element matrices and assemble system matrix
- : Application of boundary conditions to system matrix and vector
- : Depending upon strategy triangulise the system matrix, performs forward reduction of load vector and backsubstitute to obtain solution
- : The results are printed if required

分散方程式의 數值解析에 따른 解의 信賴度는 모든 係數들이나 流速分布 等 그 入力資料나 境界條件들이 일관성을 실제 현상을 잘 나타내 주도록 주어지는가에 달려있다. (2)式에 나타낸 分散方程式은 2次元場에서 수평방향으로 물질 분산을 나타내는 세 가지 項을 가지고 있다.

첫째 平均流에 의한 移送을 나타내는 項(advection term)과 둘째 亂流擴散을 나타내는 項(turbulent diffusion term)과 세째 鉛直方向의 剪斷에 기인한 分散項(dispersion term)이다.

첫째것은 平均流의 流速分布가 얼마나 정확하게 주어지느냐에 따라 그 값의 신뢰도가 결정되어 질 것이고 둘째의 세째 것은 擴散係數 및 分散係數의 값이 그 신뢰도를 지배할 것이다.

일반적으로 단면 평균 流速으로 주어지는 水平 2次元 場에서는 그 汚染物質이 퍼져나감에 있어

分散擴散이나 어느 한 순간에 시의 流速의 亂流變動에 連結한 亂流擴散等은 斷面平均流速으로 假定함에 더 1 斷面에서의 實際流速分布와의 差異로 인한 切斷力에 기인한 分散에 고려시켜야 생겨난다. 이는 水路에 기인한 分散에 비하여 亂流擴散은 무시할 만큼 작기 때문이다.<sup>37)</sup> 그러나 次元 水路로 치러면 경우에는 혹은 방향에 대한 縱方向 分散과 이에 逆向으로는 橫方向 亂流擴散은 고려해 주어야 한다.

### 1 一次元 水路의 橫方向 擴散係數

水流流引 성우에 测定된 농도 분포의 값들이 주어진 때에는 다음 (16) 式과 같은 次分方程式에서 구할 수도 있으나<sup>38)</sup>

$$\frac{k_y}{U} = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{(\Delta C)_x}{(\Delta C)_{xy}} - \frac{(\Delta y^2)}{\Delta x} \quad (16)$$

여기서  $k_y$ , 평방 험  $\Delta$ 값과

$U$ : 등방 험 유속

$(\Delta C)_x$ : 간격  $4x$ 인 두 단면에 있어서 벽면에기  $y$ 거리에 있는 두 점의 농도 차이

$(\Delta C)_{xy}$ ,  $(\Delta C)_{yy}$ : 두 단면에서  $y$ 거리의 점에 서의 평균 농도값과  $y + Ay$  및  $y - Ay$  기준에서의 평균 농도값과의 차이

West 와 Cotton<sup>39)</sup>은 가로까지 암수신 次元解析을 기초로 한 여러 실증기록을 종합하여 다음 (17) 式을 사용한 것을 세운 하였다.

$$k_y = 0.399(HU_*)^{1/12} \quad (17)$$

여기서  $H$ 는 수심,  $U_*$ 는 剪斷速度를 나타낸다.

### 2 一次元 水路의 縱方向 分散係數

-次元 閉水路의 縱方向 分散係數를 구하는 실험식들은 鉛直方向으로의 平均流速으로 가정한 Elder 形과 橫方向平均流速으로 가정한 Fischer 形으로 大別된다.<sup>40)</sup>

李吉永<sup>41)</sup>은 Elder 形의 無次元 式을 線形화하고 그 係數들을 실험적으로 구한 결과, 나온 (18)식을 제시하였다.

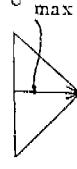
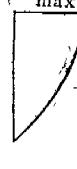
$$\frac{D_L}{HU_*} = 122.6 \frac{U_*}{U} + 2.458 \frac{B}{H} - 9.577 \quad (18)$$

Fischer는 分散係數의 定義로 주어지는 (3)식은 기본적으로 쓰거나 (19)식은 제안하고 있다.

$$D_L = \beta_0 \frac{U^2 B^2}{U_* H} \quad (19)$$

여기서  $\beta_0$ 는 無次元 分散係數로서 實測 河川에서 는 보통  $\beta_0 = 0.18 \left( \frac{U_*}{U} \right)^{1/6}$  으로 주어지나 實驗開水路에서는 이 값이  $\beta = 0.0012$ 로 주어진다.<sup>50)</sup>

Table. 1 Constants  $\lambda$  in Shear Dispersion Coefficient Expressions

Profile	$\lambda$
Linear	 $\frac{1}{30}$
Bi-linear	 $\frac{1}{120}$
Parabolic	 $\frac{2}{105}$
Bi-Parabolic	 $\frac{1}{210}$
Logarithmic	 $\frac{1}{600}$

\*Note: for  $k=0.4$  and  $u_* = 0.06u$

### 3. 水平 二次元 場에서의 分散係數

鉛直方向의 속도 성분이 무시된 三次元擴散方程 式<sup>20)</sup> 쓰면 (20)식과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 속도의 농도를 단면에 대한 평균치와 변동치의 합으로 나누어고 수평방향에 대해서는 離流擴散을 무시하면서 分散係數를 유도하면 다음 결과를 얻는다.<sup>21)</sup>

$$D_z = \lambda \frac{U^2 H^2}{k_z} \quad | \\ D_z = \lambda \frac{V^2 H^2}{k_z} \quad | \quad (21)$$

여기서  $\lambda$ 는 流速의 縱方向 分布에 따라 강해지는常數로서 단순한 몇 가지 縱分布들에 대한  $\lambda$ 의 값은 다음 Table 1에서 얻는다. 이때 鉛直方向의 擴散係數  $k_z$ 는 다음 (22)식으로부터 구한다.<sup>22)</sup>

$$k_z = 0.067 U_* H \quad (22)$$

## V. 數學的 模型의 檢證 및 數值實驗

### 1. 境界濃度가 주어지는 矩形水路

Figure 2와 같은 水路에서 그 水路의 한쪽 끝 ( $x=0$ )에 단위 농도가 주어질 때 이것이 어떻게 전달되어지는가를 해석할 경우 그 기대 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_z \frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

이때 본 數值모델의 계산조건은 다음과 같다.

$U=0.05$ ,  $V=0.00$ ,  $H=1.0$ ,  $D_z=0.01 \text{ unit}^2/\text{sec}$ ,

$$D_y=0, \alpha=0$$

위의 경우로 定常狀態 및  $At$ 를 0.25sec, 1.0sec, 2.0sec, 3.0sec로 취하여 각각 계산하면 시 安定條件와 結果值를 비교하면 다음과 같다.

i) 定常狀態인 경우: 모든 절점에서 농도 값이 1.0으로 주어질 것이 예상되어 계산결과도 같은 값을 주었다.

ii)  $At=0.25\text{sec}$ , 1.0sec, 3.0sec인 각각의 경우 위의 각 경우에 대하여  $At$ 에 대한 안정조건을 (14)식과 비교하면 다음 Table 2와 같다.

위의 각  $At$ 에 대한 계산 결과를 時刻 6 sec에서 解析解와 비교하면 Table 3 및 Figure 3으로 수 이진다.

Table 3 및 Figure 3에 나타난 바와 같이 본 모드로그램에 의한 수치해는  $At$ 를 안정조건 내에 취할 경우 解析解와 잘 일치함을 보이고 있다.  $At$ 가 안정조건을 벗어나는 경우에도 해석 해의 결과의 수치해의 결과 사이의 差의 합이 다음 Table 4와 같이 거의零에 수렴하는 것을 주고 있으므로 안정조건은 벗어난 경우에 있어서도 계산 결과가 긴동하는 값을 주기는 하나 이로부터 그 범위하는 정한은 압수가 있다.

### 2. 側面 濃度가 주어지는 矩形水路

Figure 4와 같은 실험 장치<sup>23)</sup>를 수학적 모형으로

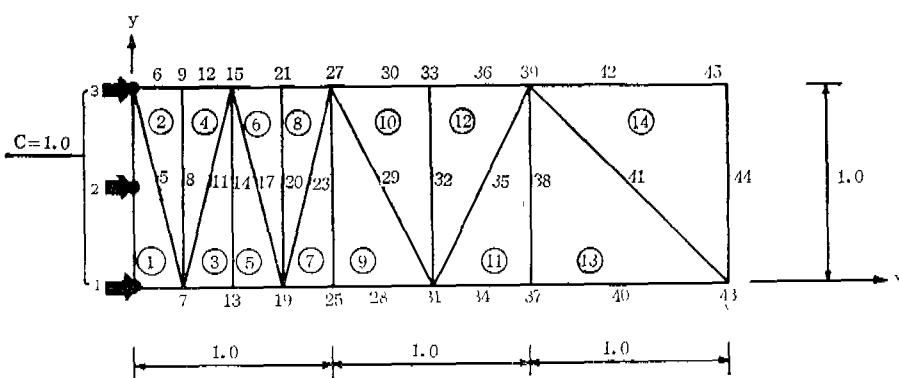


Fig. 2. Prescribed concentration application of rectangular channel

Table. 2 The relation of stability condition and time interval

Condition	$\Delta t$ (sec)	0.25	1.0	2.0	3.0
$D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 0.2$		0.016	0.64	1.28	1.92
$V \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0.2$		0.10	0.40	0.80	1.20

Table. 3 Comparision with analytical and numerical solution

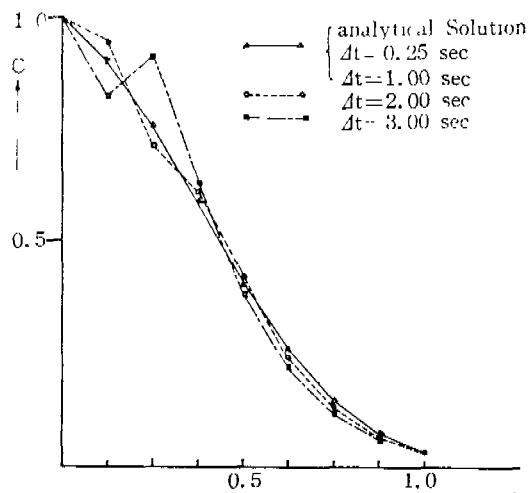
$x$	$\Delta t$	Analytical solution	$\Delta t=0.25$ sec	1.0 sec	1.0 sec	3.0 sec
0.00		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.125		0.8986	0.8990	0.8992	0.9312	0.8164
0.25		0.7534	0.7550	0.7603	0.7041	0.9037
0.375		0.5817	0.5829	0.5830	0.6111	0.6224
0.50		0.4092	0.4099	0.4122	0.4116	0.3809
0.625		0.2603	0.2600	0.2576	0.2443	0.2220
0.75		0.1487	0.1471	0.1400	0.1322	0.1241
0.875		0.0759	0.0740	0.0720	0.0678	0.0675
1.00		0.0346	0.0320	0.0317	0.0323	0.0357

Table. 4 The sum of residual

$\Delta t$	Analytical solution	0.25	1.00	2.00	3.00
Sum of residual	0	0.0025	0.0064	0.0278	-0.0130

하여 계산한 값을 실험결과와 비교하였다. 水路部分을 Figure 5와 같이 要素화하여 Table 5와 같은 여러 수치 실험조건에서 계산한 결과들은 水路 역

면을 따른 농도 분포 및 흐름 방향 농도 분포의 값들과 비교하면 Figure 6 및 Figure 7~Figure 10과 같이 주어진다.

Fig. 3. Concentration distribution according to each  $\Delta t$  (at  $t=6sec$ )

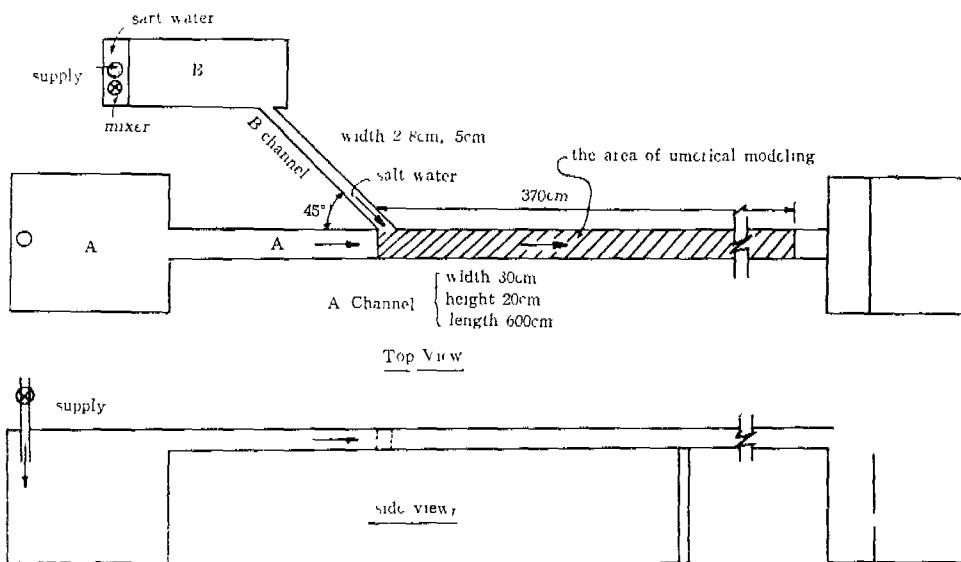


Fig. 4. Equipment of experimentation

Table. 5 Cases of numerical experiment

Case No.	$H$ (cm)	$U$ (cm/sec)	$D_x$ (cm/sec)	$k$ (cm/sec)	Boundary condition of concentration		Remark
					Node Number	C	
Case 1	Case 1-1	3.9	10.6	43.73	1, 2, 3, 4, 5 6, 7	0.00 0.34	$D_x$ : Eq. (19) $k$ : Eq. (16)
	Case 1-2	3.9	10.6	43.73	1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 14	0.00 0.34	
	Case 1-3	3.9	10.6	43.73	1 6, 7, 14	0.00 0.34	
Case 2	Case 1-4	3.9	10.6	17.23	4.24	1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 14	$D_x$ : Eq. (21) $k$ : Eq. (16)
	Case 1-5	3.9	10.6	50.41	4.24	1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 14	$D_x$ : Eq. (18) $k$ : Eq. (16)
	Case 2-1	2.5	15.15	86.9	1.24	1, 2, 3, 4, 5 6, 7	$D_x$ : Eq. (19) $k$ : Eq. (16)
	Case 2-2	2.5	15.15	86.9	1.24	1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 14	$D_x$ : Eq. (21) $k$ : Eq. (16)
	Case 2-3	2.5	15.15	86.9	1.24	1, 2, 3, 4, 5, 6 7, 14	$D_x$ : Eq. (21) $k$ : Eq. (16)
	Case 2-4	2.5	15.15	15.78	1.24	1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 14	$D_x$ : Eq. (21) $k$ : Eq. (16)
	Case 2-5	2.5	15.15	83.15	1.24	1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 14	$D_x$ : Eq. (18) $k$ : Eq. (16)

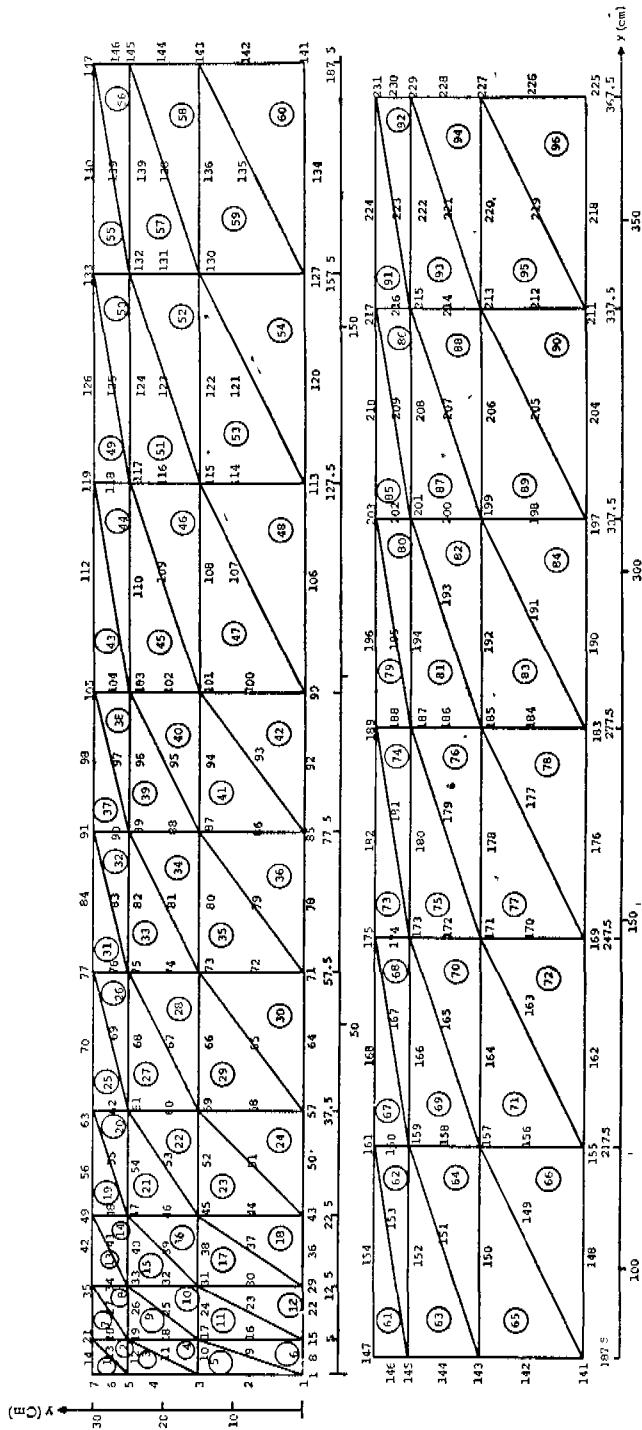


Fig. 5. Finite element mesh

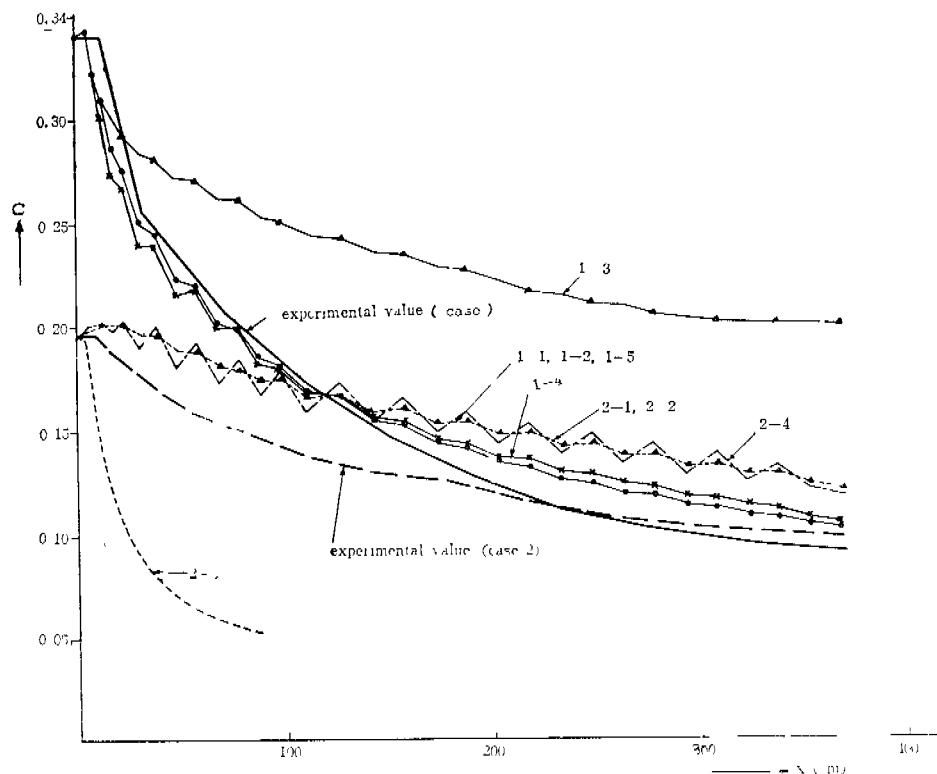


Fig. 6. Comparision of experimental and computed value.

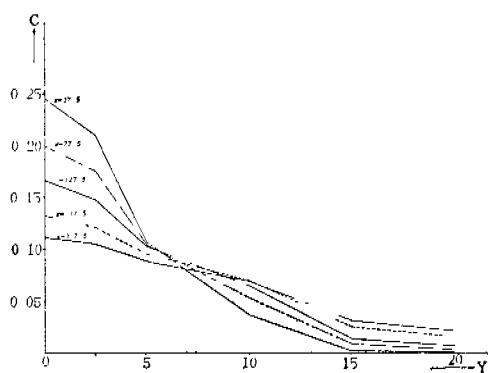


Fig. 7. Computed value of transverse concentration distribution (case 1)

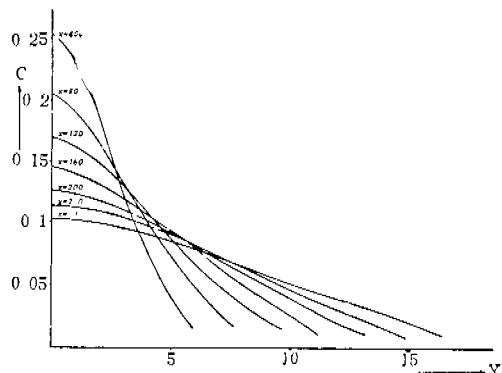


Fig. 8. Measured value of transverse concentration distribution (case 1)

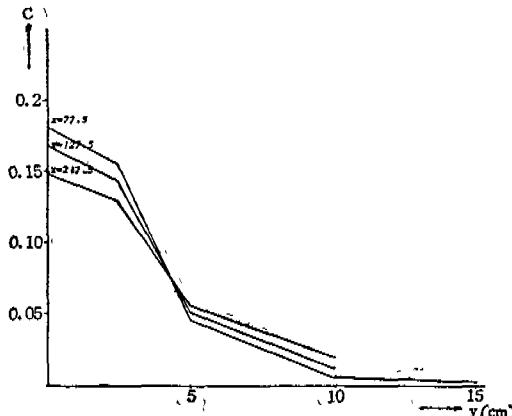


Fig. 9. Computed value of transverse concentration distribution (case 2)

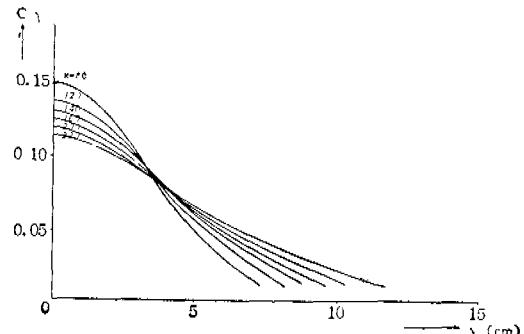


Fig. 10. Measured value of transverse concentration distribution (case 2)

## VI. 考察 및 結論

본 연구에서는 分散方程式을 解析하는 프로그램을 개발하여 이를 解析解와 비교 한으로써 檢證하고 時間 間隔의 결성을 위한 몇가지 數值實驗을 행하였다 (5節 1)) 塩水의 橫方向流入에 따른 側面濃度가 予어지는 경우에 대한 實驗結果에 적용하였다. (5節 2))

實驗小路에서는 縱方向 分散係數 및 橫方向 分散係數를 既往의 여러 公式들로부터 구하여 본바 그 값들이 初期假定方法에 따라 상당히 다른 값으로 나타났다. 이때 그 각각의 값들이 실제로 어떤 形으로 나타나는가를 계산하여 본 결과 縱方向 分散係數는 그 값이 농도분포의 설정에 큰 영향을 주지 않음을 알았고 橫方向 分散係數가 더 큰 영향을 주는 것으로 나타났다. 이는 그 分散이 定常狀態에 도달했을 경우로 생각하기 때문에 나타나는 이유로서 주 定常狀態까지 도달하는데 걸리는 시간의 결과를 무시한다면 縱方向 分散係數보다는 橫方向 分散係數의 결정에 더욱 주의를 要하여야 할 것이라는 사실을 알수 있나. 특히 이와 같이 側方向에서 流入하는 濃度가 어떻게 퍼져나갈 것인가를 결정하는 문제에서는 流入地點의 初期橫方向 擴散幅이 계산 결과에 큰 영향을 주고 있음을 알았다.

Figure 6에서 初期 橫方向 擴散幅을 무시했을 경우의 결과는 Case 1-6 및 Case 2-3과 같이 매우 적은 濃度分布를 이루며 초기 횡방향 희석率을 일정

하게 하드라도 그 단면에서 나머지 부분의 초기 농도境界值를零으로 잡아주지 않았을 경우에는 결과적으로 초기 희석率이 계산에 의하여 더 넓게 확장됨으로 인하여 Case 1-3과 같은 매우 큰 농도 분포의 결과를 주게된다. 일반적으로 횡방향 확산폭은 주면 水路流入方向이 직기으로 되어질 때가 가장 큰 것으로 알려져 있다.<sup>(53)</sup>

縱方向 위치에 따라 횡방향 농도분포 곡선을 구하여 Figure 7과 Figure 9로 나타내고 이를 측정치인 Figure 8, Figure 10과 비교하여 본 결과 그 값이 대체로 비슷한 경향치는 주고 있으나 농도傾斜가 급한 부분 근처에서 거칠은 결과를 주고 있다. 이는 본 계산에서 要素間隔을 취할 때 橫方向 농도 경시에 有意味하지 못한 결과로서 要素의 크기를 결정할 때에는 縱方向 뿐만 아니라 橫方向에 있어서의 농도분포 곡선에 대해서도 그 곡선이 指數 및 誤差分布曲線의 성질을 가질을 감안하여 최대 경사선 부근에서 특히 有意味어야 할 것이다.

本 分散 모델을 一般적인 二次元場에 적용함에 있어 좀 더 좋은 결과를 얻기 위해서는 무엇보다 먼저 입력으로 들어가게되는 물의 순환에 관한 자료를 즉 流速分佈나 水位 等의 값들이 신뢰성을 가질 것인바 이 값들이 일정하다거나 定常狀態로 가정을 할 활만한 수은 값들일 경우에는 그에 문제가 되지 않을 것이다나 非定常狀態의 흐름일 경우에는 흐름에 관한 수치해석 결과치<sup>(54)</sup>를 이용하여야 하는데 이 마지막에는 이 값들의 신뢰도 자체가 강제 조건이나 바닥 및 표면마찰 등 많은 가정치를 가지게

된다는 문제점이 있다. 그리고 분산계수나 난류 확  
산계수, 減弱係數 등을 결정하는 문제에 있어서도  
이직기자는 자연현상을 보인격으로 나타내 출판한  
연구성과가 미흡하기 때문에 이들에 관한 더욱 깊은  
연구가先行되어야만 數值 모델의 신뢰도를 높일수  
가 있을 것이다.

## 謝 累

본 연구는 아산 사회복지 세단의 연구비 후원에  
의한 것임을 밝히고 감사를 드린다.

## 參 考 文 獻

1. Leendertse, J. J.: Aspects of a Computational Model for Long-Period Water Wave Propagation, the Rand Corporation, RM-5294-PR May 1967.
2. Leendertse, J. J., R.C. Alexander, and S. K. Lin: A Three Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas, Vol. 1, Principles of Computation the Rand Corporation, R-1417-OWRR, December, 1973.
3. Leendertse, J. J. and S. K. Lin: Modelling of Three-Dimensional Flows in Estuaries, in Applied Mathematical Modelling. Modelling '75, 1975.
4. Leendertse, J. J. and S. K. Lin: A Three Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas, Vol. II, Aspects of Computation, the Rand Corporation, R-1764-OWRT, 1976.
5. Fischer, H.B.: A Method for Predicting Pollutant Transport in Tidal Waters, Contribution 132, Water Resources Center, Univ. of Calif. 1970.
6. Gallagher, R.H., Oden, T.J., Taylor, C. and Zienkiewicz, O.C. (Eds.): Finite Elements in Fluids-Vol. 1. Vol. 2, JOHN WILLY & SONS, 1975.
7. Gallagher, R.H., Zienkiewicz, O.C., Oden, J.T. and Cecchi, (Eds.): Finite Elements in Fluids-Vol. 3, JOHN WILLY & SONS 1978.
8. Gray, W.G., Pinder, G.F. and Brebbia, C. A. (Eds.): Finite Element in Water Resources, PENTECH PRESS, 1976.
9. Brebbia, C. A. (Eds.): Applied Numerical Modelling I, PENTECH PRESS. 1977.
10. Alacon, E. and Brebbia, C. A. (Eds.): Applied Numerical Modelling II, PENTECH PRESS, 1978.
11. Brebbia, C. A.: Mathematical Models for Environmental Problems, PENTECH PRESS, 1975.
12. Adey, R. and Brebbia, C. A.: Finite Element Solution for Effluent Dispersion, Numerical Methods in Fluid Dynamics, C. A. Brebbia and J. J. Conner (Eds.), PENTECH PRESS, 1974.
13. Smith, S. L. and Brebbia, C. A.: Finite Element Solution of Navier-Stokes Equation for Transient Two Dimensional Incompressible Flow, J. of Computational Physics, 1975, pp. 235~244.
14. Partridge, P. W., and Brebbia, C. A.: Quadratic Finite Element in Shallow Water Problems, J. of HY. Division, ASCE, Vol. 102, No. HY9, 1976. pp. 1299~1313.
15. Partridge, P. W. and Brebbia, C. A.: Finite Element Simulation of Water Circulation in the North Sea. Appl. Math. Modelling. 1976, 1 September, pp. 101~107.
16. Connor, J. J. and J. Wang: Finite Element Modelling of Hydrodynamic Circulation, in Numerical Methods in Fluid Dynamics: C. Brebbia and J. J. Connor (Eds.), PENTECH PRESS 1974.
17. Connor, J. J. and Wang, J. D.: Mathematical Modelling of Near Coastal Circulation, R.M. Parsons Lab. for Water Resources and Hydrodynamics, T.R. #200, M.I.T. April 1975.
18. Connor, J. J. and Wang, J. D.: Finite Element Model for Two layer Coastal Circulation, Proceedings, XIV International Conference on Coastal Eng., Copenhagen, Denmark, 1974.

19. Leimkuhler, W., Connor, J.J., Wang, J.D., Christodoulou, G.C. and Sundgren, S.: Two Dimensional Finite Element Dispersion Model, Applied Math. Modelling, in Modelling '75, 1975.
20. Pearce, B.R. and Christodoulou, G.C.: Application of Finite Element Dispersion Model for Coastal Waters, Proceedings, XVI International Association for Hydraulic Research Congress, Sao Paulo, Brazil, 1975.
21. Christodoulou, G.C., Connor, J.J. and Pearce, B.R.: Mathematical Modelling of Dispersion in Stratified Water, NTIS, No. PB-264091, Nob. 1976.
22. Christodoulou, G.C., Connor, J.J.: Dispersion in Two Layer Stratified Water Bodies, J. of HY4, ASCE, April 1980
23. Connor, J.J. and Brebbia, C.A.: Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes Butterworths, 1976.
24. Chung, T.J.: Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, Mc Graw Hill, 1979.
25. Baker, A.J.: A Finite Element Solution Algorithm for the Navier-Stokes Equation, NASA Report, CR-2391, 1974.
26. Cullen, M.J.P.: Application of Finite Element Method to Numerical Weather Prediction, Ph. D. Thesis (Univ. of Reading), 1975.
27. Navon, I.M. and Müller, U.: A Finite Element Fortran IV Program for Solving the Shallow Water Equation, Advances in Engineering Software, Vol. 1, 1979.
28. George, J.A.: Computer Implementation of the Finite Element Method, Ph.D. Thesis (Stanford Univ.) 1971.
29. Bath, K.J. and Wilson, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Inc. 1976.
30. Hinton, E. and Owen, D.R.J.: Finite Element Programming, Academic Press, 1977.
31. Duff, I.S. and Reid, J.K.: Some Design Features of a Sparse Matrix Code, Computer Science and System Design, CSS48, Harwell, 1977.
32. Irons, B.M.: A Frontal Solution Program, Int. J. of Num. Math. Eng., 1970
33. Kawahara, M. et. al: Two-Step Explicit Finite Element Methods for Storm Surge Propagation Analysis, Int. J. of Num. Meth. Eng., Vol. 15, 1980.
34. 金聲得: 水管江 流出量 變化에 따른 水管內流速分布 論測, 益山大學校 碩士學位 請求論文, 1978. 2.
35. 金聲得: 有限要素法에 의한 流線網 解析, U.I.T. Report, Vol. 11-1. 1980.
36. 金聲得, 全容才, 沈名弼: 有限要素法을 使用한 海水흐름의 數値解析, U.I.T. Report. Vol. 11-2. 1980.
37. Fischer, H.B.: The Mechanics of Dispersion in Natural Streams, Proc. of ASCE. Jr. of Hydraulics Division, Vol. 93(HY6), 1967, pp187~210.
38. Lau, Y.I., and Krishnappan, B.G.: Transverse Dispersion in Rectangular Channels, Proc. of ASCE. Jr. of HY. Div. Vol. 103 (HY10). 1977, pp.1173~1189.
39. Miller, A.C. and Richardson, E.V.: Diffusion and Dispersion in Open Channel Flow, Proc. of ASCE. Jr. of HY. Div., Vol. 100 (HY1), 1970. pp.159~171.
40. Ahn, S.H.: Laboratory Investigation of Turbulent Diffusion in Open Channel by Means Salt Water Injection, Proc. of the 13th Congress of I.A.H.R. in Kyoto 1969.
41. 今吉永: 開水路 の 分散現象 における 斷面形狀 および 流れ 特性 の 効果に 關する 實驗的研究, 大阪大學 博士學位 請求論文, 1980.
42. West, J.R. and Cotton, A.P.: Transverse Diffusion for Unidirectional Flow in Open Channel, Proc. of Instan, Civil Eng. Part2, 1980. June, pp.491~498.
43. Osmidov, R.V.: On the Turbulent Exchange in a Stably Stratified Ocean, Izv. Acad. of Science USSR, Atmospheric and Oceanic Physics, Vol.1, No.8, 1975.

44. Okubo, A.: Oceanic Diffusion Diagrams. Deep Sea Research, August, 1971.
45. Bowden, K.F.: Fundamentals of Dispersion, Proc. of Symp. on Mathematical and Hydraulic Modeling of Estuarine Pollution, at the Water Pollution Research Labs, April, 1972.
46. Csanady, G.T.: Turbulent Diffusion in the Environment, D. Reidel Publ. Co. 1973.
47. Launder, B.E. and Spalding, D.B.: Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, 1972.
48. Goldstein, S.(ed.): Modern Development in Fluid Dynamics, Vol.1, Oxford Univ. Press, 1938.
49. Lee, S.D.: Study on Diffusion and Dispersion in Open Channel Flow, M.S.c Thesis, Page 26, Busan Univ., 1981.2.
50. McQuivey, R.S. and Keefer, T.N.: Convective Model of Longitudinal Dispersion, Proc. of ASCE, J. of HY. Div., Vol.102 (HY.10) Oct. 1976, pp.1409~1423.
51. Liu, H.: Predicting Dispersion Coefficient of Streams, Proc. of ASCE, J. of EE Div. Vol. 103(EE.1), 1977, pp.59~68.
52. Vreugdenhil, C.B. (ed.): Computational Methods for the Vertical Distribution of Flow in Shallow Water, Literature Study, Delft Hydraulics Lab. Report W152, Aug. 1973.
53. 南部洋一：流入汚水の希釈特性に関する実験的研究. 日本土木學會論文集 第69號, 1960.7月,