UOT Report Vol. 17. No. 1. pp. 237~247. 1986　　연구논문집 제17권 제1호 pp. 237~247. 1986

整數計劃法의 응용문제와 응용문제들의 相互關聯性

이 영 덕
경 영 학 과
(1985. 9. 30 접수)

〈요　　약〉

整數計劃法은 線型計劃法의 특수한 형태로서 여러 분야에서 응용, 연구되고 있으며 이에 따라 여러가지 방법으로 解法이 硏究되고 있다.

본 논문에서는 整數計劃法의 응용분야인 할당문제, 배낭문제, 빈패킹문제, 수송문제, 설비입지선정문제의 整數計劃模型들과 模型들의 의미 그리고 각종 模型들의 연관성에 대하여 연구하고 여러방법으로 행해지고 있는 이들 모형들의 解法에 관하여 살펴보았다.

Integer Programming Applications and Their Relationship

Lee, Young-Duk
Department of Management
(Received September 30, 1985)

〈**Abstract**〉

In this paper, a number of Integer Programming applications are presented. These applications include assignment problems, knapsack problems, bin-packing problems, and special class of transportation problems, facility location problems.

In the first part of the paper, Integer Programming formulations, and their relationships are discussed. In the second part of the paper, various algorithms which are studied for above mentioned five problems are addressed.

I. 序　　論

線型計劃法은 O·R에서 가장 널리 알려져 있으며 여러 분야에서 효과적으로 응용되고 있다. 線型計劃法에서 나오는 解는 整數값이나 分數값을 갖게 되는데 變數값이 整數값이어야 할 때는 적용하는데 곤란한 점이 있게 된다. 이러한 곤란함을 해결하기 위해서는 線型計劃法에 整數制約式을 포함하게 하여 整數計劃法을 만들게 되었으며 여러 응용분야에 걸쳐 각종 硏究가 이루어지고 있다.

整數計劃法에서는 變數 모두가 整數값을 가져야 되는 경우가 있고 일부만 整數값이면 되는 경우가 있는데 후자를 混合整數計劃法(Mixed Integer Programming)이라 한다. 整數計劃에서의 變數의 整數값은 여러가지로 나타날 수 있는데 그 중에서도 0, 1로 나타나는 경우가 가장 많이 연구되고 있는데 變數값이 0, 1로 나타나는 경우를 0−1 整數計劃法(0−1 Integer Programming)이라 한다.

0−1整數計劃의 응용분야로는 일정한 할당물(assignment)을 일정한 할당자에(assignee)게 할당하는 할당문제(Assignment Problem), 일정한 容量을 갖는 배낭에 물품을 넣는 배낭문제(Knapsack Problem), 일정한 갯수의 容器(Bin)에 물품을 넣는 문제(Bin-Packing Problem), 기존의 여러지역의 설비에서 나온

물품을 여러지역의 수요지로 수송해야 하는 輸送問題(Transportation Problem), 수송문제와 설비설치 문제를 함께 고려하는 설비입지선정문제(Facility Location Problem)등 여러가지가 있는데 이들 여러 분야의 문제들은 각각 독특한 數理的 模型을 갖게 된다. 본 논문에서는 위의 다섯가지 문제에서 決定變數들이 0, 1의 값을 갖는 경우를 중심으로 각종 模型들을 연구하고 이 模型들간의 연관성과 模型들의 각종 解法들을 살펴보기로 한다.

Ⅱ. 整數計劃法의 각종模型

整數計劃法의 응용연구분야는 여러가지가 있는데 본 연구에서는 할당문제(assignment problem), 배낭문제(knapsack problem), 빈패킹문제(bin-packing problen), 와 수송문제(transportation problem), 설비입지선정문제(facility location problem) 등에 관한 모형을 연구하기로 한다.

1. 割當問題

1) 割當問題의 基本模型

일정한 갯수의 작업을 같은 수의 작업자에게 1개씩 할당하는 것이 할당문제의 기본모형으로 이 문제는 다음과 같은 數理的 模型을 갖는다.

$$\text{(A1)} \quad \text{Min} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} C_{ij}\cdot x_{ij} \qquad ①$$

$$s.t \sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall j \qquad ②$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij}=1 \quad \forall i \qquad ③$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j \qquad ④$$

여기에서 $I=\{1,2,\cdots,m\}$: 작업자의 집합.

$I=\{1,2,\cdots,n\}$: 작업(task)의 집합. (여기서는 $m=n$)

C_{ij}; 작업자 i가 작업 j를 수행하는데 드는 비용.

이 모형에서 식 ②,③,④는 모든 작업을 서로 다른 1인에게 할당케 하는 제약식이 되며 ①식은 할당에 따르는 총 비용을 최소화 하는 목적함수식이 된다.

2) 一般化割當模型

할당문제의 기본모형은 할당문제의 가장 간단한 경우가 되며 여기에 추가적인 상황이 부여됨에 따라 할당문제는 기본모형과 다른 형태를 지니게 된다. 즉 기본적 할당문제를 一般化시키는 과정을 거치게 되는데 이러한 할당문제를 一般化割當問題(Generalized Assignment Problem)라 한다. 이러한 일반화할당문제는 다음과 같은 것들이 있다.

① 작업자가 여러개의 작업을 맡을 수 있으며 작업자가 작업을 하는데 일정한 자원이 소모되며 이 자원의 한계가 있는 경우

$$\text{(GA 1)} \quad \text{Min} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} C_{ij}\cdot x_{ij}$$

$$s.t \sum_{j\in J} r_{ij}\cdot x_{ij}\leq b_i \quad \forall i \qquad ②$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall j$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j$$

여기에서 r_{ij}; 작업자 i가 작업 j를 수행하는데 드는 자원의 사용량.

b_i: 작업자 i가 가지고 있는 자원의 상한

이 경우에서는 작업자는 여러개의 작업을 맡을 수 있지만 가지고 있는 자원(예 : 시간)의 제약을 받게 된다. 이 모형에서는 자원의 제약은 上限만 있는데 下限을 설정할 필요가 있을 때는 식②에 자원의 下限을 추가로 설정하면 된다. 그리고 윗 모형에서는 제약이 있는 자원이 한 가지인 경우인데 제약이 있는 자원이 여

럿인 경우에는 ②식이 다음과 같이 변형된다.

$$\sum_{j\in J} r_{ijk}\cdot x_{ij}\leq b_{ik} \ \forall i,h \qquad ②'$$

여기에서 $h\in H$

$H=\{1,2,\cdots,p\}$: 자원종류의 집합.

r_{ijk}; 작업자 i가 작업 j를 수행하는데 드는 자원 h의 양.

(2) 작업자를 이용하는데 고정비용이 드는 경우 외부에서 기술자를 초빙해 작업을 맡긴다 할 때는 초빙에 따르는 초빙료가 고정 비용으로 발생할 수 있는데 이러한 경우는 할당비용과 초빙에 따르는 고정비용의 합을 최소화시켜야 하며 의사결정자는 여러명의 초빙대상자중 일부를 초빙하여야 한다. 이러한 경우의 모형은 다음과 같다.

$$\text{(GA 2)}\quad \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{i\in I} f_i\cdot y_i \qquad ①$$

$$s.t \sum_{j\in J} r_{ij}\cdot x_{ij}\leq b_i\cdot y_i \quad \forall i \qquad ②$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall j$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j$$

$$y_i\in\{0,1\} \quad \forall i$$

여기에서 y_i; 작업자 i가 이용되면 $y_i=1$ 아니면 $y_i=0$

f_i; 작업자 i가 이용되는데 드는 고정비용.

①식은 목적함수식으로 할당에 따르는 작업비용의 합과 고정비용의 합을 더한 총비용을 최소화하며 ②식은 작업자 i를 이용하지 않을 때($y_i=0$) $x_{ij}=0$이 되어 모든 작업 j는 작업자 i에 의하여 수행되지 않게 한다.

그리고 모든 작업자가 각 작업을 할 때 소모하는 자원의 양이 같을 때는 위 모형의 ②식은 다음과 같이 변한다.

(GA 2-1)

$$\sum_{j\in J} r_j\cdot x_{ij}\leq b_i\cdot y_i \quad \forall i \qquad ②'$$

나머지는 모형(GA 2)와 동일함.

③ 작업자가 일정한 비용으로 일정량의 자원을 추가로 얻을 수 있는 경우.

작업자는 추가비용을 통하여 자원을 더 늘릴 수 있는데 초과수당이나 잔업수당등을 통하여 근무시간을 늘릴 수 있는 경우가 좋은 예이다. 이 때의 數理的模型은 다음과 같다.

$$\text{(GA 3)}\quad \text{Mim} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{i} f_i\cdot y_i$$

$$s.t \sum_{j\in J} r_{ij}\cdot x_{ij}\leq b_i+u_i\cdot y_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall j$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j$$

$$y_i\in\{0,1\} \quad \forall i$$

여기에서 작업자 i는 추가적 비용 f_i를 통하여 자원을 u_i만큼 더 얻어 총자원은 b_i+u_i가 될 수 있다.

④ 작업자가 작업을 수행하는 방법이 여럿인 경우

작업자가 작업을 수행하는 방법이 여럿인 경우는 방법에 따라 자원소요량이 달라지기 때문에 작업방법까지 고려하여 모형을 세우게 되는데 이는 (GA 1), (GA 2), (GA 3)의 경우에 모두 해당되는데 작업방법의 다양성을 고려할 때의(GA 1) 모형은 다음과 같이 변하게 된다.

$$\text{(GA 1-1)}\quad \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in K_{ij}} C_{ijk}\cdot x_{ijk}$$

$$s.t \sum_{j\in J}\sum_{k\in K_{ij}} r_{ijk}\leq b_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk}=1 \quad \forall j$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i,j, \ k \in K_{ij}$$

여기에서 C_{ijk}; 작업자 i가 작업 j를 방법 k를 통해 수행하는데 드는 비용.

r_{ijk}; 작업자 i가 작업 j를 방법 k를 통해 수행하는데 사용되는 자원의 양.

K_{ij}; 작업자 i가 작업 j를 할 수 있는 방법의 집합.

2. 배낭문제(Knapsack Problem)

이 문제는 整數計劃의 古典的 問題의 하나로 배낭의 能力(capacity)이 제한 되어 있을 때 여러가지의 물건중 어느 것들을 선택하여 넣어야 총효용을 높일수 있느냐 하는 것으로 생산관리에서의 能力이 제한되어 있는 기계에 여러가지의 배치(batch)작업 중의 선택 문제와 資本豫算問題(capitical budgeting)에서 한정된 자본에 여러가지 투자대안이 있을 때 어느 투자대안들을 선택하여야 총이익을 극대화 할 수 있느냐 하는 문제로도 응용될 수 있는데 이러한 배낭문제의 數理的 模型은 다음과 같다.

$$\text{(K 1)} \quad \text{Max} \sum_{j \in J} C_j \cdot x_j \qquad ①$$

$$s.t \sum_{j \in J} a_j \cdot x_j \leq b \qquad ②$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j$$

여기에서 C_j; 물건 j를 선택하는데 생기는 효용

a_j; 물건 j의 능력 소모량.

b; 배낭의 能力

J; 고려되는 물건의 집합

式 ①은 총효용을 최대화 하자는 목적함수가 되며 식 ②는 배낭에 넣는 물건의 능력소모량은 배낭의 능력(b)를 초과할 수 없게 하므로 능력의 범위에서 물건을 택하여야 한다. 그런데 여기에서는 ②식에서 보다시피 능력의 제한을 한가지로만 두고 있는데 능력의 제한이 부피, 무게등 여러가지를 고려하여야 할 때는 ②식이 변하게 되며 이때는 일반적인 整數計劃模型이 된다.

배낭문제의 특수형태로는 複合選擇배낭문제(multiple choice knapsack problem)이 있는데 이 문제에서는 물건을 택하되 전체물건을 성질이 비슷한 몇가지 그룹으로 나누어 그 중 하나씩을 택하면서 효용을 최대화 하고자 한다. 이때의 모형은 다음과 같다.

$$\text{(K 2)} \quad \max \sum_{k \in K} \sum_{j \in N_k} C_{kj} \cdot x_{kj} \qquad ①$$

$$s.t \sum_{k \in K} \sum_{i \in N_k} a_{kj} x_{kj} \geq b \qquad ②$$

$$\sum_{k \in N_k} x_{kj}=1 \quad \forall k \qquad ③$$

$$x_{kj} \in \{0,1\} \quad \forall j,k$$

여기에서 $K=\{1,2,\cdots,m\}$; m개의 집합을 나타내는 기호의 집합.

N_k; 물건들의 k번째 부분집합으로 상호독립적임. $(k=1,2,\cdots,m)$

이 모형에서 ③식은 m개의 부분집합 $N_1,\cdots,N_m$에서 한개씩 선택돼야 한다는 것을 의미하며 ②식은 m개의 부분집합에서 선택된 물건들의 능력소모량의 合은 배낭의 능력 b를 초과하지 말아야 한다는 것을 의미한다. 이같은 문제는 사용가능한 금액이 한정되어있고 사야할 물품이 m가지 있는데 m종류의 물품마다 선택가능한 대안이 여러개 있을 때 어느 종류로 구성하여 m가지의 물품을 구입하여 효용을 높이냐 하는 문제로도 해석이 될 수 있다. 그리고 이 複合選擇배낭문제(multiple choice knapsack problem)은 다음과 같이 표시되기도 한다.

$$\text{(K 3)} \quad \text{Min} \sum_{k \in K} \sum_{j \in N_k} C_{kj} x_{kj}$$

$$s.t \sum_{k \in K} \sum_{j \in N_k} a_{kj} x_{kj} \leq b$$

$$\sum_{j\in N_k} x_{kj}=1 \quad \forall k$$

$$x_{kj}\in\{0,1\} \quad \forall k,j$$

이 모형에서는 C_{kj}는 비용으로 해석되고 a_{kj}가 효용으로 해석되는데 일정한 한계 (b)이상의 효용을 얻으면서 비용을 최소화 하게 된다. 그런데 이 모형은 할당문제의(GA 1-1)모형에서 집합 I가 한개의 원소만 갖고 있고 첫번째 제약식의 上限이 없을 때와 모형이 일치되어 일련의 연관성을 갖게 된다.

3. 빈—패킹문제(Bin-Packing Problem)

일정한 능력을 갖는 容器(bin)들이 있고 여기에 넣을 물품들이 있으며 이 물품 전부를 용기 속에 넣어 운반해야만 할 때는 최소 갯수의 용기에 넣도록 해야 한다. 예를 들면 컨테이너를 이용하여 수출품을 선적하는 경우에는 최소갯수의 컨테이너를 이용하도록 하여야 한다. 이러한 문제를 빈패킹문제(bin-packing problem)라 하는데 다음과 같은 수리적 모형을 갖는다.

$$\text{(B 1)} \quad \text{Min} \sum_{i\in I} y_i \quad ①$$

$$s.t \sum_{j\in J} t_j\cdot x_{ij}\leq w\cdot y_i \quad \forall j \quad ②$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall i \quad ③$$

$$x_{ij}\equiv\{0,1\} \quad \forall i,j$$

$$y_i\in\{0,1\} \quad \forall i$$

여기에서 y_i; 容器 i를 사용할 때 $y_i=1$, 아닐때 $y_i=0$

x_{ij}; 물품 j를 용기 i에 실을 때 $x_{ij}=1$, 아닐 때 $x_{ij}=0$

t_j; 물품 j의 能力 소모량.

w; 容器의 能力

$I=\{1,2,\cdots,m\}$; 容器들의 집합.

$J=\{1,2,\cdots,n\}$; 물품들의 집합.

①식은 용기수를 최소화 하고자 하는 목적함수이고 ②식은 용기 i에 실린 물품의 총능력소모량은 용기 i의 능력 w를 초과하지 못하게 함과 동시에 용기 i가 사용되지 않을 때($y_i=0$)는 아무 물건도 실을 수 없게 한다. ③식은 모든 물품은 한군데 용기에만 실도록 하는 제약식이 된다. 그런데 (B 1)모형에서는 모든 용기가 같은 종류임을 의미하는데 만약 용기들이 서로 다른 종류일때는 각용기의 능력이 달라지며 이에 따라 각용기의 사용비용도 달라지게 되어 목적함수는 용기의 갯수를 최소화하는 것에서 총비용을 최소화하는 것으로 변하게 된다. 이때는 다음과 같은 모형이 수립된다.

$$\text{(B 2)} \quad \text{Min} \sum_{i\in I} f_i\cdot y_i$$

$$s.t \sum_{j\in J} t_j\cdot x_{ij}\leq w_i\cdot y_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall i$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j$$

$$y_i\in\{0,1\} \quad \forall i$$

여기에서 f_i; 용기 i의 사용비용.

w_i; 용기 i의 能力.

이 모형은 할당문제의 모형(GA 3)와 비교가 되는데(GA 3)에서 $C_{ij}=0$이고 r_{ij}가 j와 관계없이 일정하며 $b_i=0$이면 (GA 3)와 (B 2)는 동일한 모형이 된다.

빈패킹 문제를 일반화하면 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다. 모형(B 1)과 (B 2)에서는 용기의 能力中 사용되지 않는 부분은 비용이 발생하지 않는데 용기속에 넣는 물품이 특수한 경우에는 보관을 위하여 사용되지 않는 능력분(공간)에 별도의 조지를 취하여야 하며 이때는 별도의 비용이 따로 발생한다. 이 경우의 모형은 다음과 같다.

$$(B\ 3)\quad \text{Min} \sum_{i\in I}(f_i\cdot y_i+d_iu_i)$$
$$s.t \sum_{j\in J} t_i\cdot x_{ij}+u_i=w_i\cdot y_i \quad \forall j$$
$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall i$$
$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j$$
$$y_i\in\{0,1\} \quad \forall i$$

여기에서 d_i는 용기 i의 미사용분 1단위에 대한 비용으로 모형 (B 1), (B 2)에서는 $d_i=0$인 경우가 되므로 모형 (B 3)는 모형 (B 1), (B 2)를 일반화한 경우가 된다.

4. 輸送問題

輸送問題는 여러장소의 공급지에서 여러장소의 수요지로 물품을 수송할 때 총수송비를 최소화하는 대안을 찾고자 하는 문제로 주로 整數計劃이 아닌 線型計劃의 모형으로 구성되어 研究되어 왔는데 한수요지의 공급은 한공급지에서 모두 이루어진다는 상황에서는 다음과 같이 整數計劃模型이 세워지기도 한다

$$(T\ 1)\quad \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}\cdot x_{ij} \qquad ①$$
$$\sum_{j\in J} r_j\cdot x_{ij}\leq b_i \quad \forall i \qquad ③$$
$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall j \qquad ③$$
$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j \qquad ④$$

여기에서 C_{ij}; 공급지 i에서 수요지 j로 수요지 j의 수요량 전체를 수송하는데 드는 수송비

r_j; 수요지 j의 수요량.

b_i; 공급지 i의 공급량.

$I=\{1,2,\cdots,m\}$; 공급지의 집합.

$J=\{1,2,\cdots n\}$; 수요지의 집합.

이 모형에서 ④식은 한 수요지의 수요는 한 공급지에서 모두 공급되어야 한다는 것을 의미하며 이 식을 $x_{ij}\geq 0$의 형태로 바꾸면 이 때는 일반적인 수송문제의 모형을 형태를 바꾸어 표현한 모형이 된다. 그리고 모형 (T 1)은 할당문제의 모형 (GA 1)과 같은 모형인데 할당문제와 위의 수송문제는 깊은 관계가 있다고 할 수 있다.

5. 設備立地選定問題

설비입지선정문제는 여러군데의 설비후보지 가운데서 설비를 설치했을 때의 고정비용과 이 설비에서 수요지로 물품을 수송비를 고려하여 총비용을 최소화하는 곳에 설비를 설치하고자 하는 문제이다. 이 문제에서는 設備의 能力, 설치할 설비의 갯수의 上限, 고려될 기간, 고려할 품목 등 여러가지로 연구되는데 본 논문에서는 앞의 모형들과 같이 결정변수가 0, 1의 값을 갖는 문제들만 고려하기로 한다.

1) 基本問題

설비의 能力이나, 설치설비의 갯수上限, 기간, 품목등을 고려하지 않는 문제를 기본문제라 하는데 다음과 같은 모형을 갖는다.

$$(F\ 1)\quad \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{i\in I} f_i\cdot y_i \qquad ①$$
$$s.t \sum_{j\in J} x_{ij}\leq n_i\cdot y_i \quad \forall i \qquad ②$$
$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1 \quad \forall j \qquad ③$$
$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j \qquad ④$$
$$y_i\in\{0,1\} \quad \forall i \qquad ⑤$$

여기에서 C_{ij}; 수송문제의 C_{ij}와 동일.

f_i; 설비후보지 i에 설비를 설치 했을 때의 고정비용.

$I=\{1,2,\cdots,m\}$; 설비 후보지의 집합.

$J=\{1,2,\cdots,n\}$; 수요지의 집합

n_i; 후보지 i에 설비가 설치되었을 때 공급할 수 있는 수요지의 數.

④식은 $x_{ij}\geq 0$의 형태로 표시되기도 하는데 문제의 특성으로 인하여 마찬가지의 결과가 나오게 된다. ②식은 다른 형태로 표시하기도 하는데 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$x_{ij}\leq y_i \quad \forall i, j \qquad ②'$$

②식이나 ②'식은 개설되지 않은 설비에서는 수송할수 없게 하는 제약식인데 ②'식은 ②식에 비해 제약식이 많게 되나 강력한 제약식이 되게한다.

위의 모형은 다른 모형과 비교할 수 있는데 할당문제의 모형(GA 2)와 비슷한 형태로 (GA 2)에서 $r_{ij}=1$이면 위 모형과 일치하게 된다.

2) 設備數의 制限이 있는 경우

意思決定者는 設備投資資金과 같은 조직내의 사정이나 조직외부의 설비 설치허가등 여러가지 사정에 의하여 設備의 數에 제한을 두는 경우가 있다. 이와 같은 문제를 P-median 문제라 부르는데 여기서의 P는 설비 설치 수의 上限을 의미한다.

設備數의 제한이 있는 경우의 數理的模型은 다음과 같다.

$$\text{(F 2)} \quad \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{i\in I} f_i\cdot y_i \qquad ①$$

$$s.t \sum_{j\in J} x_{ij}\leq n_i\cdot y_i \quad \forall i \qquad ②$$

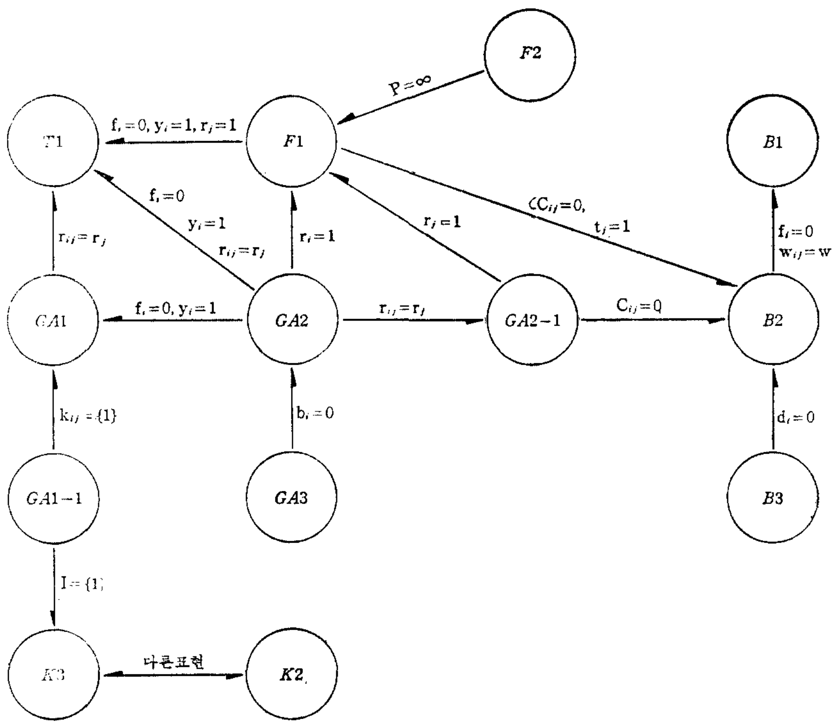

그림 1. 각종 模型들의 關聯圖

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \qquad ③$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq P \qquad ④$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \qquad ⑤$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \qquad ⑥$$

위 모형에서 ④식은 설비 數의 上限이 P로 제한되어 있다는 것을 의미하며 ②식은 앞의 모형에서와 마찬가지로 $x_{ij} \leq y_i$의 형태로 표시될 수 있으며 ⑤식은 $x_{ij} \geq 0$으로 표시되기도 하는데 결과는 마찬가지가 된다.

6. 각종 模型들의 관련성

앞에서 할당문제와 배낭문제, 빈패킹문제의 數理的模型과 수송문제와 설비입지선정문제의 一部 模型들을 살펴 본 결과 이들은 서로 깊은 관계를 맺고 있다는 것을 알 수 있다. 이들 模型들의 관계를 圖表로 살펴 보면 그림 1과 같다.

그림 1에서의 기호는 앞에서 언급한 각종 模型들을 의미하며 화살표 위의 조건이 추가되면 화살표 방향의 模型과 일치하게 된다.

Ⅲ. 整數計劃模型의 解法

整數計劃模型을 풀이하는 解法은 여러가지가 있는데 大別하면 切面法(Cutting plane techniques), 列擧法(enumerative methods), 分割法(partitioning algorithms), 그룹이론(group theoritic approaches)등으로 나눌수 있으며[31] 割當問題의 경우에서처럼 Network 이론이 이용되기도 한다.

切面法은 Gomory 法이라고도 알려져 있는 해법으로 線型計劃法의 單體法(simplex method)으로 문제를 일단 푼뒤 整數값을 가려야 할 변수가 정수값이 아닐때 이 변수를 整數값으로 만드는 새로운 제약식을 도입하면서 解法을 진행시킨다. 이 解法은 Daotzig, Fulkerson, Johnson[9]이 아이디어를 내었고 Gomory[15]가 개발하여 계속 발전시켰다.

列擧法(enumerative methods)은 分段探索法(branch and bound method)과 探索列擧法(search enumeration)으로 나눌 수 있다. 分段探索法은 整數計劃模型의 解法에 가장 많이 이용되고 있는데 實現可能한 解의 집합을 나누어 가면서 나뉘어진 집합의 上限이나 下限등을 이용하여 最適解를 탐색해 나간다. 探索列擧法도 明示的 혹은 默示的으로 모든 가능한 解를 살펴보면서 최적해를 찾게 되는 方法이다. 分割法은 實數變數와 整數變數가 섞여있는 혼합형정수계획문제(Kixed Inteyer Problem)에 이용되는데 變數를 중심으로 두개의 部分集合(subset)으로 나누어 解法을 진행시킨다. 그룹이론은 Gomory의 切面法의 개념을 집합이론을 도입하여 발전시킨 것으로 Gomory, Johnson 등에 의해 연구되고 있다.[31]

본 논문에서 다루고 있는 할당문제, 배낭문제, 빈패킹문제, 수송문제, 설비입지선정문제에서는 위에서 열거한 整數計劃法의 一般的解法 中 分段探索法(branch and bound method)가 가장 많이 이용되고 있는데 각 모형의 독특한 구조를 이용하거나 雙對模型 혹은 완화된 모형 등을 이용하여 解法을 진행시킨다. 각 모형별 解法은 다음과 같다.

1. 割當問題의 解法

割當問題의 基本模型인 (A 1)의 解法으로는 Kuhn[23]이 연구한 Hungarian 方法이 있는데 이 解法에서는 (A 1)의 雙對模型과 Nework 이론을 이용하여 解法을 전개하였는데 外見上의 解法절차는 아주 간단한 方法으로 나타나게 된다. 이 Hungarian 方法은 Bertsekas[6], Mcginnis[27]등에 의해 최근에도 보완연구되고 있으며 Hung 과 Rm[16]은 완화된 L.P. 모형과 雙對模型을 이용하여 模型(A 1)의 解法을 研究하였다.

一般的割當問題의 解法으로서는 模型(GA 1)과 (GA 1-1)의 解法은 Ross와 Soland[29], Balachaudran[1] 등이 分段探索法을 이용하여 연구하였고 模型(GA2)는 Eilon과 Christofides, Johnson 등이 研究하였다.[30]

2. 배낭문제의 解法

배낭문제의 模型(K 1)의 解法은 Bellman[4],[5]이 動的計劃法(Dynamic Programming)을 이용하여 研究하였고 Kolesar[23], Lauriere[25]등은 分段探索決으로 研究하였으며 Everett[13]는 라그랑지안 乘數法(Lagrangian multiplier)을 이용하여 解法을 研究하였다. 複合選擇배낭문제(multiple choice knapsack)의 模型인 (K 2)는 Sinha 와 Zoltners[33]가 L·P의 완화된 模型과 分段探索法을 이용하여 研究하였으며 Zemel[36]은 완화된 L·P 模型과 雙對模型을 이용하여 探索列擧法(Search enumeration)으로 研究하였다.

3. 빈페킹문제의 解法

容器(bin)의 容量이 같은 경우인 模型(B 1)은 Eilon 과 Christofides[11]가 로딩문제(Loading problem)라는 이름下에 휴리스틱 接近法(heuristic approach)으로 研究하였는데 이 휴리스틱 接近法은 最適解를 보장하지는 못하지만 비교적 간단한 方法으로 만족할만한 適正解(desirable solution)를 찾게한다.

模型 (B 2)에서는 容器의 容量이 각각 다른데 이 모형은 Ingargiola 와 Korsh[17]가 L·P의 완화된 모형과 列擧探索法(search enumeration)을 이용하여 研究하였으며 模型(B 3)의 問題는 Lewis 와 Parker[26]가 라그랑지안과 分段探索法을 이용하여 解法을 研究하였다.

4. 輸送問題의 解法

一般的 輸送問題의 解法은 最初實現可能解를 구하는 방법과 最初實現可能解를 향상시키면서 최적성 여부를 검토하는 방법이 있다. 최초의 실현 가능해를 찾는 方法에는 북서코너법, 최소비용법 VAM(Vogel's Approximation Method), RAM(Russel's Approximation Method)이 널리 알려져 있으며, 최초의 실현 가능해를 향상시키고 최적성을 검토하는 方法에는 디딤돌법(stepping stone methd)과 MODI 法이 보편적으로 쓰이고 있는 解法으로의 O·R 기본서적에 널리 소개가 되고 있다. 一般的 輸送問題를 확대시킨 문제로는 固定費輸送問題(Fixed-cost transportation)가 있는데 이 문제에서는 한번 수송하는데 수송량에 관계없이 일정한 고정비용이 추가된다. 이 문제는 Balinski[2]가 推計的方法(Approximation)으로 最適性은 보장하지만 最適解에 가까운 解를 찾는 方法을 研究하였고 최근에는 Klingman 과 Napier Stutz[22], Kennington 과 Unger[19], Barr 와 Glover, Klingman[3]등이 分段探索法(branch and boundmethod)을 이용한 法을 研究하였다.

앞에서 말한것들은 輸送問題의 一般형태에 관한 해법들로 模型(T 1)에 적용하기에는 어려운 점이 있는데 模型 (T 1)의 解法은 Srinivanson 과 Thompson[35]이 輸送問題의 특별한 경우로 研究하였으며 이 모형은 할당문제의 模型(GA 1)과 동일하므로 模型의 解法(GA 1)은 모두 적용할 수 있다.

5. 設備立地選定問題의 解法

설비입지선정문제(Facility location Problem)의 基本模型인 (F 1)의 解法은 여러가지 方法으로 研究되었는데 Effroymson 과 Ray[10], Kumawalla[20]등이 分段探索法을 이용하여 解法을 이용하였으며 Bilde 와 Kraup[7], Kumawalla[21]등은 휴리스틱 접근법으로 研究하였고 Spielberg[34]는 探索列擧法(search enumeration)을 이용하였으며 Scharge[32]는 (F 1)의 특수구조를 이용하여 VUB(Variable Upper Bound)를 이용한 解法을 研究하였고 최근에 와서는 Erlenkotter[12]가 L-P의 완화된 모형과 雙對模型의 Complementary Slackness 조건을 이용하고 分段探索法을 통한 解法을 연구하였다. 模型(F 2)에 관한 解法은 Järvinen 과 Rajala, Sinervo[18]가 分段探索法을 통하여 연구하였으며 Cornuejols 와 Fisher, Nemhauser[8], Narula, Ogbu, Samuelson[28]등은 라그랑지안을 이용하여 연구하였고 Galvao[14]는 雙對模型을 이용한 휴리스틱접근법, 分段探索法 등을 이용하여 解法을 研究하였다.

Ⅳ. 結 論

整數計劃法의 응용분야인 할당문제, 배낭문제, 빈패킹문제, 수송문제, 설비입지선정문제의 의미와 模型들간의 관계를 살펴본 결과 이 들은 서로 밀접한 관계를 갖고 있었다. 이 들 모형중에서 특히 一般化割當問題의 模型들은 다른 문제의 模型들과 깊은 관계를 맺고 있으며 모형의 약간의 변형을 통하여 다른 문제의 모형으로 변하게 된다. 각 문제들의 解法은 여러가지 方法으로 研究가 되고 있는데 각각 다른 문제에 대해 이루어지고 있는 解法의 研究는 이들 문제들의 연관성을 고려하면 다른 문제의 해법의 研究에도 쉽게 적용되거나 참고가 될 수 있다 하겠다.

참 고 문 헌

1. Balanchandran, V., "An Interger Generalized Transportation Model for Optimal Job Assignment in Computer Networks," Operations Research, Vol. 24, pp. 742—759, (1976).
2. Balinski, M.L., "Fixed-cost Transportation Problems," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 8, pp. 41—54, (1961).
3. Barr, R.S., F. Glover and D. Klingman, "A New Optimization Method for Large Scale Fixed Charge Transportation Problems," Operations Research. Vol. 29, pp. 448—463, (1981).
4. Bellman, R., "Some Application of the Theory of Dynamic Programming-A Reiew," Operations Research, Vol. 2, pp. 275—288, (1954).
5. Bellman, R., "Comment on Dantzig's Paper on Discrete Variable Extremum Problems," Operations Research, Vol. 5, pp. 723—724, (1957).
6. Bertsekas, D.P., "A New Algorithm for the Assignment Problem," Mathematical Programming 21, pp. 152—171, (1981).
7. Bilde, O. and J. Kraup, "Sharp Lower Bound and Efficient Algorithms for the Simple Plant Location Problem," Annals of Discrete Mathematics 1, pp. 79—97, (1977).
8. Cornuejols, G., M.L. Fisher and G.L. Nemhauser, „Location of Bank Accounts to Optimize Float: An Analytic study of Exact and Approximate Algorithms," Management Science, Vol. 23, pp. 789—810, (1977).
9. Dantzig, G., D. Fulkerson, and S. Johnson, "Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem," Operations Research, Vol. 2, pp. 393—410, (1954).
10. Effrogmson, M.A. and T.L. Ray, "A Branch and Bound Algorithm for Plant Location," Operations Research, Vol. 14, pp. 361—368, (1966).
11. Eilon, S. and Christofides, "The Loading Problem," ManagementoScience. Vol. 17, pp. 259—268, (1971).
12. Erlenkotter, D., "A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location," Operations Resercq, Vol. 26, pp. 992—100, (1978).
13. Everett, H., "Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources," Operations Research, Vol. 11, pp. 399—471, (1963).
14. Galvao, R.D., "A Dual-Bounded Algorithm for the P-Median Probləm," Operations Research, Vol. 28, pp. 1112—1121, (1980).
15. Gomory, R., "An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs," In Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill, (1963).

16. Hung, M.S. and Rom, W.O., "Solving the Assignment Problem by Relaxation," Operations Research' Vol. 28, pp. 969—982, (1980).

17. Ingargiola, G. and Korsh, J., "An Algorithm for the Solution of 0—1 Loading Problems," Operations Research, Vol. 23, pp. 571—579, (1978).

18. Järvinen, P., J. Rajala and H. Sinervo, "A Branch and Bound Algorithm for seeking the P-Midian," Operations Research, Vol. 20, pp. 173—179, (1972).

19. Kennington, J. and E. Unger, "A new Branch and Bound Algorithm for the Fixed Charge Transportation Problem," Management Scieuce, Vol. 22, pp. 1116—1126, (1978).

20. Khumawalla, B.M., "An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Warehouse Locaion Problem," Management Science, Vol. 18, pp. 718—732, (1972).

21. Khumawalla, B.M., "*An Efficient Heuristic Procedure for the Uncapacitated Warehouse* Location Problem," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 20, pp. 109—121, (1973).

22. Klingman, D. and A. Napier and J. Stutz, "A problem for Generating Large Scale (Un) Cepacitated Assignment, Tranportation, and Minimum Cost Flow Network Problems," Management Science, Vol. 20, pp. 814—822, (1974).

23. Kolesar, P.J., "A Branch and Bound Algorithm for the Knapsack Problem," Management Science, Vol. 13, pp. 723—735, (1967).

24. Kuhn, H.W., "The Hungarian Method for the Assignment Problems," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 2, pp. 83—97, (1955).

25. Lauriere, M., "An Algorithm for the 0/1 Knapsack Problem," Mathematical Programming 14, pp. 1—10, (1978).

26. Lewis, R.T. and Parker, R.G., "On A Generalized Bin-Packing Problem," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 29, pp. 119—145, (1982).

27. Mcginnis, L.P., "Implementation and Testing of a Primal-Dual Algorithm for the Assignment Prolem," Operations Research, Vol. 31, pp. 277—291, (1983).

28. Narula, S.C., U.I. Ogbu and H.M. Samuelsson, "An Alorithm for the P-Median Problem," Operations Reserch, Vol. 25, pp. 709—713, (1977).

29. Ross, G.T. and Soland, R.M., "A Branch and Bound Algorithm for the Generalized Assignment Problem," Mathematical Programming 8, pp. 91—103, (1975).

30. Ross, G.T. and Zoltners, A., "Weighted Assignment Models and Their Application," Management Science, Vol. 25, pp. 683—696, (1979).

31. Salkin, H.M., "Integer Programming," Addison-Wesley, (1975).

32. Scharge, L., "Implicit Representation of Variable Upper Bounds in Linear Programming," Mathematical Programming Study 4, pp. 118—132, (1975).

33. Sinha, P. and Zoltners, A.A., "The Multiple-Choice Knapsack Problem," Operations Research, Vol. 27, pp. 503—515, (1979).

34. Spielberg. K., "Algorithms for the Simple Plant-Location Problem with Some Side Conditions," Operations Research, Vol. 17, pp. 85—111, (1969).

35. Srinvasan, V. and Thompson, G.L., "An Algorithm for Assigning Uses to Sources in a Special class of Transportation Problems," Operations Research, Vol. 21, pp. 284—295, (1973).

36. Zemel, E., "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," Operations Research, Vol. 28, pp. 1412—1423, (1980).