

상용 유한요소 프로그램에서 사용하는 보요소와 판요소의 대변형 거동에 관한 연구

염선일* · 진종태** · 이경식**

*현대자동차(주), **울산대학교 공과대학 기계공학과

<요 약>

구조물 해석에 널리 쓰이는 상용 유한요소해석용 소프트웨어인 MSC/NASTRAN 과 NISA-II를 사용하여 외팔보와 4변이 고정된 정사각형 평판 문제를 해석하고 그 결과를 각각의 이론해와 비교하였다. 미소변형일 경우 외팔보의 유한요소 해석의 결과는 본 연구에서 해석한 모든 경우에 요소수와 무관하게 이론해와 정확히 일치한다. 대변형일 경우에는 외팔보와 평판 문제 모두에서 요소수가 많을수록 또한 보의 길이나 판의 한 변의 길이가 두께에 비해 클수록 이론해에 근접해 가는 경향이 있다. 특히 길이가 높이에 비해 긴 외팔보의 경우 요소수가 5 이상이면 이론해와 0.5% 이내의 오차를 보인다. 평판문제의 대변형 해석결과는 NISA-II의 해석결과가 MSC/NASTRAN의 해석결과보다 더 이론해에 근접하다.

A Study on the Behaviors of Beam and Plate Elements under a Large Deflection in Commercial Finite Element Softwares

S. I. Yeom* · J. T. Jinn** · K. S. Lee**

*Hyundai Motor Co. Ltd.

**Dep't. of Mechanical Engineering, Univ. of Ulsan

<Abstract>

The results of FE analysis of a uniform cantilever beam and a uniformly loaded

square plate with all edges clamped, using commercial FE software(MSC/NASTRAN and NISA-II), are compared with the analytical solutions. For small deformation in cantilever beam, the results of FE analysis for all the cases are identical with the analytic solutions regardless of the number of elements. For large deformation, the results of the FE analysis tends to approach close to the analytic solutions with the increase in the number of elements and the length to thickness ratios in both of two problems. In particular, for the case of the cantilever whose length is much longer than the depth, the errors are within 1% in cases of the number of elements are more than five. Comparing the results of the large deformation analysis of the square plate reveals that the result of the NISA-II is closer to the analytical solution than that of the MSC/NASTRAN.

1. 서 론

자동차나 중장비 등, 항상 사고에 노출되어 있는 구조물을 제조하는 산업체에서는 경제성이 충분히 확보될 뿐만 아니라, 안전도에 대하여 날로 증대되어 가는 요구에 충족될 수 있도록 설계해야 하는 어려움에 처해 있다. 또한, 과거의 소품종 대량생산이 요구되던 때와는 달리 다품종 다량생산을 위한 신속한 제품개발이 절실한 현재의 상황에서는 과거의 제품개발 방식은 적합하지 않다. 과거의 제품개발방식은 설계 후, 시제품을 제작하여 시험 및 평가를 통해 설계변경을 하는 단계를 반복적으로 수행하여, 요구조건이 충족되는 설계를 확정하는 방식인데, 과도한 시간과 경비가 요구되므로, 새로운 제품개발방식이 절실히 요구되고 있다.

한편 1980년을 전후로 하여, 대형컴퓨터의 보급이 확산되면서, 계산역학분야의 학문적 발전이 급속히 이루어졌으며, 그 중에서도 유한요소법을 이용한 수치해석기법의 발달에 의해 상용화된 유한요소해석(FEM)용 소프트웨어들이 속속 발표되면서, 산업체에서는 이것을 이용한 모의시험을 통해서, 시제품제작과 시험에 소요되는 과도한 시간과 비용을 줄이려는 제품개발방식의 개발이 시도되어 왔다. 하지만, 그러한 상용 FEM 소프트웨어에 사용된 여러 종류의 요소들에 대한 특성을 면밀하게 분석하지 않고, 단순히 일반적인 유한요소모형화 방법에 따라 구조물을 모형화한 DATA를 이용하여 계산된 결과는 해의 신뢰성을 충분히 확보받을 수 없으므로, 설계요구조건에의 적합성 여부의 판단도어렵게된다. 그러므로, 상용 FEM 소프트웨어를 해석에 이용하여 목적에 맞는 제품설계를 이루기 위해서는 상용 소프트웨어에 이용된 요소의 거동특성에 맞는 모형화방법이 필수적인 요구조건이다.

따라서 본 연구에서는 산업체에서 비교적 널리 이용되고 있는 MSC- NASTRAN과 NISA-II에 이용된 BEAM요소와 PLATE요소의 미소변형 특성과 대변형 특성을 파악하고, 향후 상용 FEM소프트웨어를 이용해서 해석을 수행할 경우의 문제점을 정리하여 모형화작업의 지침을 만드는데 기초를 마련코자 한다.

2. 보 및 평판문제의 이론해

2.1 Euler-Bernoulli 보이론

Euler-Bernoulli 보이론은 재료역학 분야의 기초 이론으로 이미 잘 알려져 있는 보의 굽힘이론으로 다음과 같은 가정을 기초로 전개된다. 즉, 그림 1에 도시된 바와 같이 변형전에 중립축에 수직인 평면은 변형후에도 중립축에 수직인 평면으로 유지된다고 가정한다. 물론 굽힘하중에 의한 중립축의 길이 변화는 없으며, 보의 단면 형상은 하중 작용면(x-y 면)에 대하여 대칭이라고 가정한다. 이러한 가정은 보의 변형률성분이 다음 식과 같이 표현됨을 의미한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{y}{\rho} = -\frac{d\phi}{ds} y, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 y 는 중립축으로부터 떨어진 위치를 나타내는 좌표값이고, ρ 와 ϕ 는 각각 중립축 처짐곡선의 길이방향 위치에 따른 곡률반경과 회전각이며, s 는 처짐곡선의 호길이이다. 한편 보의 재료는 등방성 선형 탄성체이며, 보의 응력상태는 다음 식과 같이 일축응력상태가 유지된다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \epsilon_x, \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 E 는 탄성계수(elastic modulus)이다.

보의 단면에 작용하는 수직 응력과 굽힘모멘트 사이의 관계는 모멘트 평형조건으로부터 다음 식과 같이 주어진다.

$$M_b = - \int_A y \sigma_x dA. \quad (3)$$

식(1)과 (2)를 식(3)에 대입하면 보에 작용하는 굽힘모멘트와 보의 회전각 사이의 관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{M_b}{EI_{zz}}. \quad (4)$$

여기서 I_{zz} 는 다음 식과 같이 정의되는 z 축에 대한 단면이차모멘트이다.

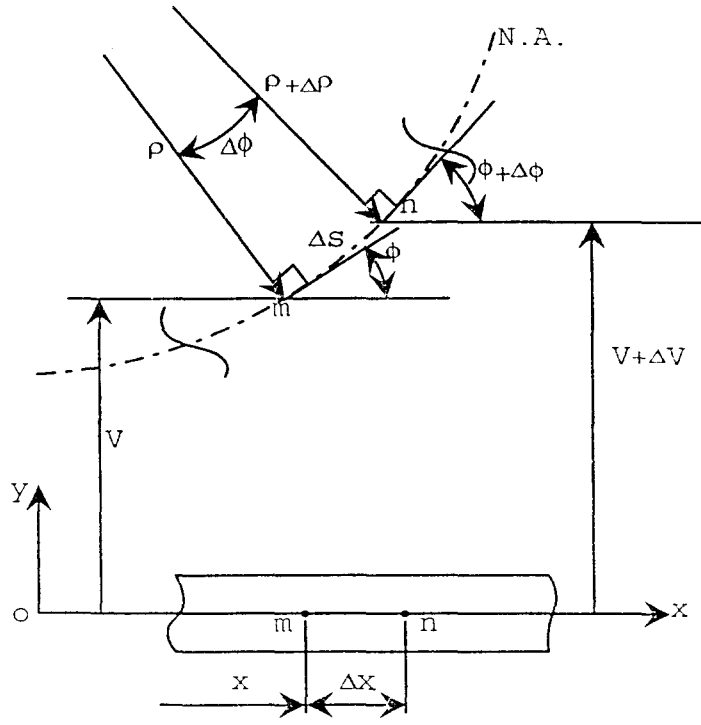


Fig. 1 Geometry of Euler-Bernoulli beam theory.

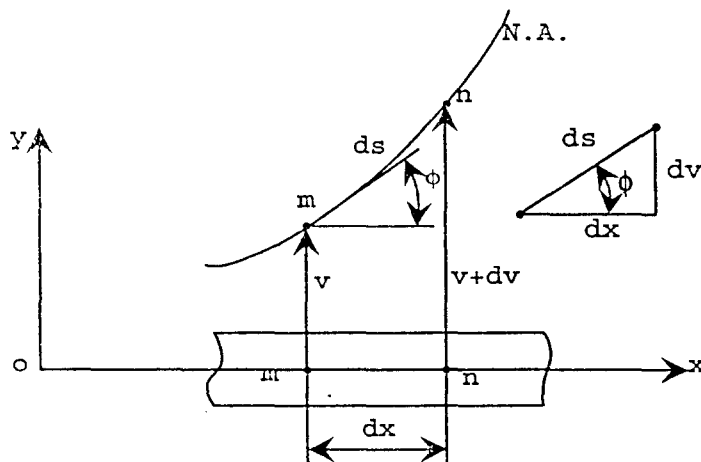


Fig. 2 Geometric relation between the deflection and the slope.

그림 2로부터 보의 처짐량 v 와 회전각 ϕ 사이의 기하학적인 관계는 다음 식과 같이 표현됨을 알 수 있다.

$$\frac{dv}{dx} = \tan \phi . \quad (5)$$

식(5)의 양변을 호의 길이 s 에 대하여 미분한 후 정리하면,

$$\frac{d\phi}{ds} = v'' \frac{dx}{ds} \cos^2 \phi . \quad (6)$$

또한 그림 2의 기하학적인 관계로부터,

$$\cos \phi = \frac{dx}{ds} = [1 + (v')^2]^{-1/2} . \quad (7)$$

식(6)와 (7)을 (4)에 대입하면 다음 식과 같이 표현되는 보의 처짐량과 굽힘모멘트 사이의 비선형 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = \frac{M_b}{EI_{zz}} . \quad (8)$$

식(8)의 해, 즉 탄성 처짐곡선의 정확한 형상을 소위 elastica라고 부르며, 다양한 경계조건에 대한 이 문제의 정해가 여러 참고문헌에 소개되어 있다.[1,2]

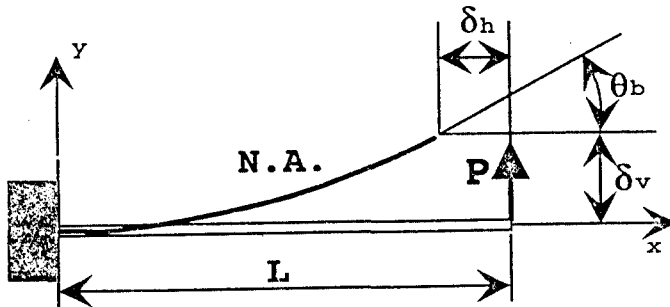


Fig. 3 Deformed geometry of the cantilever beam under large deflection.

길이 L 인 외팔보의 자유단에 집중하중 P 가 작용하는 경우(그림 3)에 대한 식(8)의 해, 특히 자유단에서의 수직 처짐량 δ_v 는 다음과 같이 타원적분(elliptic integral) 형태로 표현된다.

$$\frac{\delta_v}{L} = 1 - 2 \sqrt{\frac{EI_{zz}}{PL^2}} [E(k) - E(k, \phi)] . \quad (9)$$

여기서, $E(k)$ 와 $E(k, \phi)$ 는 각각 제2종 완전 타원적분(complete elliptic integral of the second kind)과 제2종 불완전 타원적분(incomplete elliptic integral of the second kind)이다. 즉,

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^{\pi/2} [1 - k^2 \sin^2 t]^{1/2} dt , \\ E(k, \phi) &= \int_0^{\phi} [1 - k^2 \sin^2 t]^{1/2} dt . \end{aligned} \quad (10)$$

그리고 k 와 ϕ 는 다음과 같이 정의되는 값이다.

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_b}{2}} , \\ \phi &= \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2} k} . \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 θ_b 는 자유단에서의 회전각이며, k 는 다음과 같이 표현되는 비선형 방정식의 해이다.

$$[F(k) - F(k, \phi)] = \sqrt{\frac{PL^2}{EI_{zz}}} . \quad (12)$$

여기서 $F(k)$ 와 $F(k, \phi)$ 는 각각 제1종 완전 타원적분(complete elliptic integral of the first kind)과 제1종 불완전 타원적분(incomplete elliptic integral of the first kind)이다. 즉,

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_0^{\pi/2} [1 - k^2 \sin^2 t]^{-1/2} dt , \\ F(k, \phi) &= \int_0^{\phi} [1 - k^2 \sin^2 t]^{-1/2} dt . \end{aligned} \quad (13)$$

한편 자유단에서의 수평 처짐량 δ_h 는 다음 식으로 표현된다.

$$\frac{\delta_h}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2 EI_{zz} \sin \theta_b}{PL^2}} \quad (14)$$

식(9-14)을 이용하여 주어진 집중하중의 크기 P에 대한 자유단에서의 수직 및 수평 처짐량을 계산하기 위해서는 우선 비선형 방정식인 식(12)으로부터 k를 구한 후 이를 나머지 식에 대입하면 된다. 본 연구에서는 식(12)으로부터 k를 구하기 위하여 제1종 타원적분인 F(k)와 $F(k, \phi)$ 를 다음과 같이 무한급수 형태로 변환하고, 변환된 유한차수 방정식의 해를 Newton-Raphson 반복수행법을 사용하여 수치적으로 구한다.

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 k^{2n} + \dots \right], \\ F(k, \phi) &= \frac{2}{\pi} F(k) \phi - \sin \phi \cos \phi \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_4 k^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_6 k^6 + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} A_{2n} k^{2n} + \dots \right). \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{4} \sin^2 \phi + \frac{3}{4 \cdot 2}, \\ A_6 &= \frac{1}{6} \sin^4 \phi + \frac{5}{6 \cdot 4} \sin^2 \phi + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2}, \\ A_8 &= \frac{1}{8} \sin^6 \phi + \frac{7}{8 \cdot 6} \sin^4 \phi + \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 6 \cdot 4} \sin^2 \phi + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (16)$$

보의 처짐량이 충분히 작아 처짐곡선의 기울기 v' 의 크기가 1에 비하여 매우 작다면 식(8)은 다음과 같이 선형화될 수 있다.

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \approx v'' = \frac{M_b}{EI_{zz}} \quad (17)$$

길이 L인 외팔보의 자유단에 집중하중 P가 작용하는 경우에 대한 식(17)의 해, 특히 자유단에서의 수직 처짐량 δ_v 는 잘 알려진 바와 같이 다음과 같다.

$$\delta_v = \frac{PL^3}{3EI_{zz}} \quad (18)$$

2.2 Kirchhoff-Love 판이론

Kirchhoff-Love 판이론은 재료역학 분야의 기초 이론으로 이미 잘 알려져 있으며 지배 방정식이 4차 편미분방정식으로 표현되는 C^1 연속성 문제에 속한다. 따라서 이 이론은 Euler-Bernoulli 보이론과 이론적 구조가 유사하며 다음과 같은 가정을 기초로 전개된다. 즉, 그림 4에 도시된 바와 같이 변형전에 중립면(mid-surface)에 수직인 선은 변형후에도 직선으로 유지되고 중립면에 수직이라고 가정한다. 보이론의 경우와 마찬가지로 굽힘하중에 의한 중립면의 면내(in-plane) 변형은 없다고 가정하므로 굽힘하중에 의한 변형과 면방향(in-plane 혹은 membrane) 하중에 의한 변형은 상호 독립적이라다룰 수 있다. 그러나 대변형의 경우에는 이들 변형이 상호 영향을 미치므로 여기서는 두가지 종류의 변형을 모두 포함하여 이론을 전개한다.

우선 Kirchhoff-Love 판이론에서는 판의 변위장(displacement field)을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} w &= w(x, y), \\ u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 밑첨자 '0'는 면내 변형 혹은 막변형(membrane 변형) 성분을 나타낸다.

미소변형에 근거한 변위와 변형률 사이의 관계식을 사용하면 판의 변형률 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \epsilon_z &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

등방성 선형 탄성재료에 대하여 판의 응력상태는 다음과 같다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) , \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) , \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} , \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 . \end{aligned} \tag{21}$$

판이론에서는 응력 대신에 다음과 같이 정의되는 stress resultant를 사용하여 평형방정식을 표현하는 것이 편리하다.

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz , & N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz , & N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz , \\ M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz , & M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz , & M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz , \\ Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz , & Q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz . \end{aligned} \tag{22}$$

여기서 h 는 판의 두께이고, N 은 단위 길이당 membrane 힘 성분, M 은 단위 길이당 굽힘모멘트 성분, 그리고 Q 는 단위 길이당 전단력 성분을 나타낸다. stress resultant 성분들의 부호규약은 그림 4와 같다.

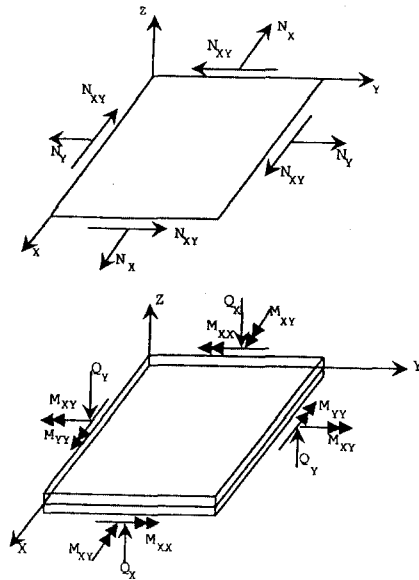


Fig. 4 The sign convention of the stress resultants.

평판의 처짐문제에 대한 평형방정식은 다음과 같이 5개 성분식으로 표현된다.

(i) membrane 변형 성분

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

(ii) 굽힘 변형 성분

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x &= 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \bar{Q}_y &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 q 는 수직 분포하중이며, 위 식에서 모든 체적력 성분은 제외하였다.

식(23)와 (24)에 식(19-22)를 각각 대입하여 정리하면 Kirchhoff-Love 판이론에 근거한 평판의 미소 처짐문제에 대한 편미분방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

(i) membrane 변형 성분

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

(ii) 굽힘 변형 성분

$$D \Delta^2 w = q. \quad (26)$$

여기서 D 는 판의 굽힘강성(flexural rigidity)이고 Δ^2 는 bi-harmonic operator이다. 즉,

$$\begin{aligned} D &= \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}, \\ \Delta^2 w &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \end{aligned} \quad (27)$$

앞에서 지적한 바와 같이 미소변형에 근거한 Kirchhoff-Love 판이론은 membrane 변형

성분과 굽힘 변형 성분이 상호 독립적임을 식(25)과 (26)로부터 알 수 있다.

이상과 같이 설명되는 Kirchhoff-Love 판이론에 의한 사각형 혹은 원형 평판의 처짐 문제에 대하여 다양한 경계조건하에서의 정해가 참고문헌[3,4] 등에 잘 정리되어 있다. 유한 요소 해석결과의 검토를 위하여 본 연구에서 사용한 문체는 한 변의 길이가 a 이고 두께가 h 인, 그리고 네 변이 모두 고정된(clamped) 정사각형 평판에 분포하중 q 가 작용하는 문제이고, 그 이론해는 다음과 같다. 즉, $\nu = 0.3$ 인 경우에 대하여 평판의 중심점에서의 처짐량 w_{\max} 와 stress resultant M_x 는 다음 식과 같이 표현된다.

$$w_{\max} = 0.013 \frac{q a^4}{Eh^3} , \tag{28}$$

$$M_x = M_y = 0.023 q a^2 .$$

2.3 대변형 판이론

von Karman 이론으로 잘 알려진 평판의 대변형 문제를 다루기 위한 수학적 모형은 지금까지 설명한 Kirchhoff-Love 판이론을 대변형에 적합하게 수정한 것이다. von Karman의 평판 처짐 이론을 Lagrangian 기술법을 사용하여 전개하면 다음과 같다.

식(19)과 같이 주어지는 평판의 변위장에 상응하는 변형률 성분을 Lagrangian 변형률 텐서를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2]$$

$$\approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial x})^2$$

$$= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial x})^2 ,$$

$$E_{yy} \approx \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial y})^2 \tag{29}$$

$$= \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial y})^2 ,$$

$$E_{xy} \approx \frac{1}{2} [\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}]$$

$$= \frac{1}{2} [\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}] ,$$

$$E_{zz} = E_{yz} = E_{zx} = 0 .$$

윗 식에서 알 수 있듯이, von Karman 이론에서는 변형률 텐서의 비선형 항들 중에서 w 에 관계되는 항 이외의 고차항들은 무시한다.

등방성 선형 탄성재료에 대한 구성방정식은 Kirchhoff 응력 텐서를 사용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (E_{xx} + \nu E_{yy}) , \\
 S_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (E_{yy} + \nu E_{xx}) , \\
 S_{xy} &= 2 G E_{xy} , \\
 S_{zz} &= S_{yz} = S_{zx} = 0 .
 \end{aligned} \tag{30}$$

그리고 Kirchhoff 응력 텐서에 상응하는 stress resultant는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S_x dz , & \bar{N}_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S_y dz , & \bar{N}_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S_{xy} dz , \\
 \bar{M}_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z S_x dz , & \bar{M}_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z S_y dz , & \bar{M}_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z S_{xy} dz , \\
 \bar{Q}_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S_{zx} dz , & \bar{Q}_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S_{yz} dz .
 \end{aligned} \tag{31}$$

von Karman 이론에서는 식(23-24)의 평형방정식이 다음과 같이 표현된다.

(i) membrane 변형 성분

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} &= 0 , \\
 \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{32}$$

(ii) 굽힘 변형 성분

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x} (\bar{Q}_x + \bar{N}_x \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{Q}_y + \bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{N}_y \frac{\partial w}{\partial y}) + q = 0 , \\
 &\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x = 0 , \\
 &\frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} - \bar{Q}_y = 0 .
 \end{aligned} \tag{33}$$

식(33)에서 알 수 있듯이 대변형 이론에서는 membrane 변형이 굽힘 변형에 영향을 주고 있다.

식(32)과 (33)에 식(29-31)을 대입하여 정리하면 von Karman 이론에 근거한 평판의 대변형 처짐문제에 대한 연립 편미분방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta^2 w = \frac{1}{D} \left[q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (34)$$

$$\Delta^2 F = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

여기서 F는 다음의 관계식을 만족하는 응력함수(stress function)이다.

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{N}_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (35)$$

이상과 같이 설명되는 von Karman 이론에 근거한 평판의 대변형 처짐문제에 대한 변분 원리는 참고문헌[5]에 잘 설명되어 있으며, 대표적인 문제에 대한 여러 가지 이론해들이 참고문헌[4] 등에 정리되어 있다. 예로서, 한 변의 길이가 a이고 두께가 h인, 그리고 네 변이 모두 고정된(clamped) 정사각형 평판에 분포하중 q가 작용하는 문제에 대한 대변형 이론해는 다음과 같다. $\nu = 0.3$ 인 경우에 대하여 평판의 중심점에서의 처짐량 W_{max} 는 다음 3차 방정식의 해와 같다.

$$(35.9) \left(\frac{W_{max}}{h} \right)^3 + (72.0) \left(\frac{W_{max}}{h} \right) = \frac{q(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4. \quad (36)$$

3. 수치 해석 결과 및 검토

MSC/NASTRAN과 NISA-II에 사용된 보요소와 판요소의 거동을 조사하기 위해서, 외팔보와 4변이 고정된 정사각형 평판문제의 2가지 경우를 선정하여, 각 경우에 대한 Euler-Bernoulli 보이론에 의한 정해와 Kirchhoff-Love의 평판이론에 근거한 von Karman의 정해를 구하고, NISA-II와 MSC/NASTRAN의 보요소와 판요소를 이용하여 계산된 결과를 비교하여, 두 소프트웨어에 사용된 보요소와 판요소의 거동 특성을 조사하였다. 해석에 사용된 재료의 물성치는 모든 경우에 대하여 탄성계수는 20000 kg/mm^2 , 포와송비는 0.3으로 하였다.

3.1 보요소

그림 5과 같이 폭과 높이가 각각 10mm와 3 mm인 외팔보의 자유단에 가로방향으로 하중을 가하고 보의 길이가 10 mm, 50 mm, 100 mm 인 경우, 자유단에서의 처짐과 회전각에 대한 이론해와 유한요소해를 구하고 이들을 비교하였다.

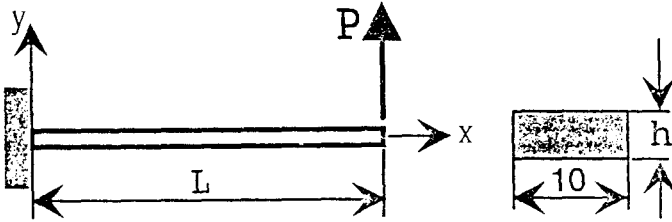


Fig. 5 Dimension of cantilever beam analyzed in this study.

3.1.1 미소변형의 경우

외팔보의 자유단에 집중하중 10 kg 이 작용하고 보의 길이를 10 mm, 50 mm, 100 mm 로 하였을 경우 Euler-Bernoulli 보이론에 의한 식(18)에 의한 자유단에서의 수직처짐과 식(37)로 주어지는 전단에 의한 처짐량을 더한 수직처짐을 표 1 에 나타내었다.

$$\delta_s = \frac{PL}{\beta GA} \quad (37)$$

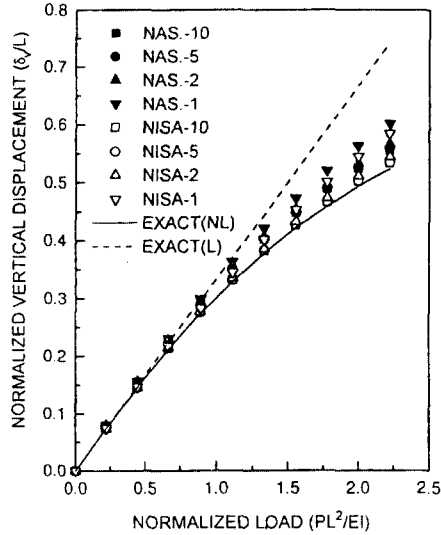
Euler-Bernoulli 보이론에 상응하는 유한요소해를 위해 MSC/NASTRAN에서는 CBAR 요소를 사용하였고 NISA II에서는 NKTP=12 요소를 사용하였다. 전단효과를 고려한 유한요소해를 구하기 위해서는 MSC/NASTRAN에서는 CBEAM요소를 사용하였고 NISA -II에서는 NKTP=12 요소를 사용하였다. 이때 두 요소의 전단보정계수 β 는 모두 5/6로 하였다. 위의 각 경우에 대해 요소수를 1, 2, 5, 10 의 4가지 모델을 해석하였다.

3가지 보길이에 대한 유한요소해석 결과를 검토해 본 결과, 요소수에 관계없이 수직처짐은 모두 같은 값을 가지고 그 값들은 이론해와 정확히 일치하였다. 그 값들을 표 2에 나타내었다.

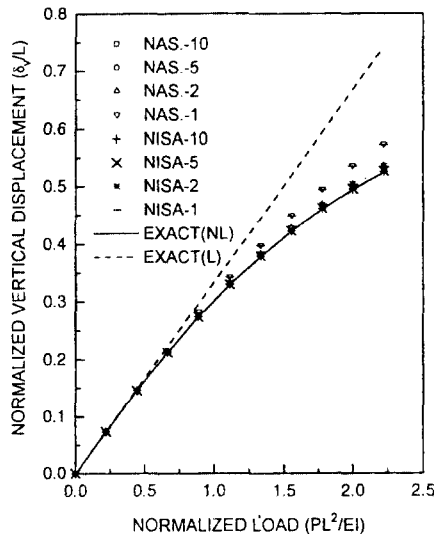
3.1.2 대변형의 경우

대변형 거동을 조사하기 위하여 MSC/NASTRAN에서는 가로방향 전단보정계수를 5/6로 입력한 CBEAM요소를 사용하였고 NISA-II에서는 전단변형의 영향을 고려하지 않는 NKTP=39요소를 사용하였다. 요소수의 증가에 따른 해의 수렴특성을 알아보기 위하여 3가지 보길이 모두 요소수를 1, 2, 5, 10 으로 증가시키고 하중은 보길이 100 mm 에 대한 무차원수 PL^2/EI 의 값이 100/45 이 되도록 보길이 10 mm, 50 mm, 100 mm 에 대한 하중을 각각 10000 kgf, 400 kgf, 100 kgf 로 하고 하중 증분은 10 단계로 나누어 계산하였다. 외팔보 자유단에서의 수직 및 수평처짐과 회전각을 각각 표 3 ~ 표 5에 나타내었다. 이 표들에서 이론해는 식(2.9) ~ 식(2.16)으로부터 구한 값들이고 괄호안의 수는 유한요소해

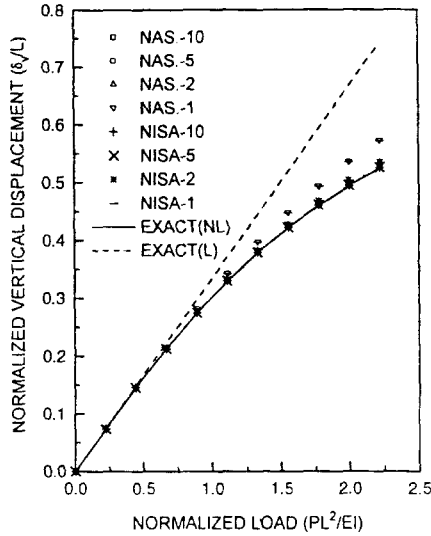
의 이론해에 대한 백분율 오차이다. 그림 6은 각각 $L/h=10/3, 50/3, 100/3$ 인 경우 하중 증분에 따른 수직 처짐의 이론해와 유한요소해를 나타낸다. 이들 표와 그림에서 알 수 있듯이 요소수가 증가할수록 두 프로그램에 의한 해의 이론해에 대한 오차가 감소함을 알 수 있다. 또한 보길이가 10 mm 인 경우와 요소수가 1인 경우를 제외하면 모든 하중단계에 대해 2%내의 오차를 나타내었다. 특히 보길이가 두께의 15 배가 넘는 50 mm 와 100 mm 인 경우 MSC/NASTRAN과 NISA-II의 결과가 모두 이론해에 잘 수렴하였고 요소수 5와 요소수 10 인 모델에 대한 해는 두 프로그램 모두 0.5%내의 오차를 나타내었다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6 The variations of the vertical deflection at the end of the cantilever beam with load increments for the cases of (a) $L/h=10/3$, (b) $L/h=50/3$, (c) $L/h=100/3$.

3.2 판요소

네변의 길이가 모두 같은 정사각형 평판의 주위를 완전고정하고 가로방향으로 균일 분포하중이 작용할 때, 변의 길이를 60 mm, 150 mm, 300 mm 로 변화시키고 요소수를 1, 4, 16 으로 변화시키면서 평판의 중심점에서의 처짐을 계산하였다. 평판의 형상과 하중의 대칭성을 고려하여 1/4만 해석하였고 평판의 중심선에 대한 경계조건은 그림 7과 같다. 두께는 모든 경우에 대해 3 mm 로 고정하였다.

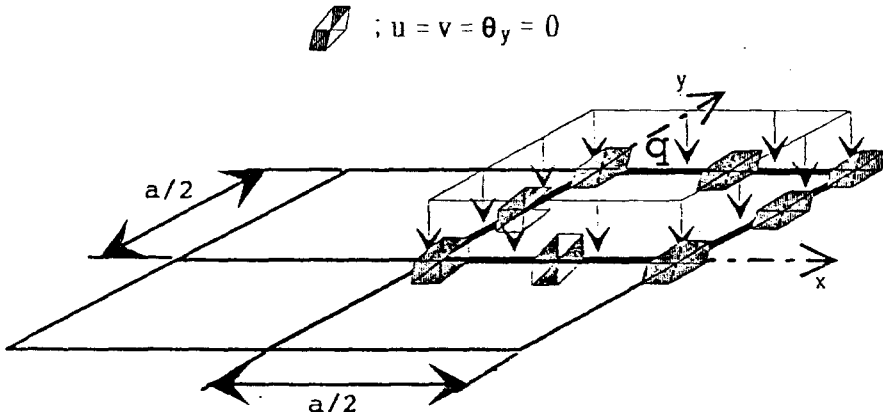


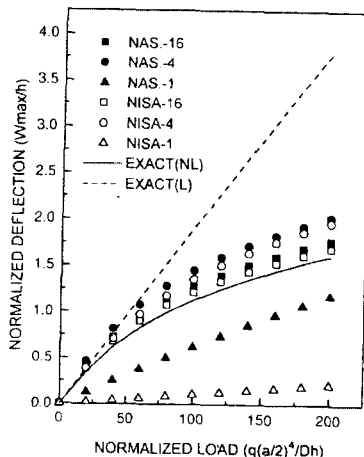
Fig. 7 The boundary conditions for the quarter FE model of the square plate.

3.2.1 미소변형의 경우

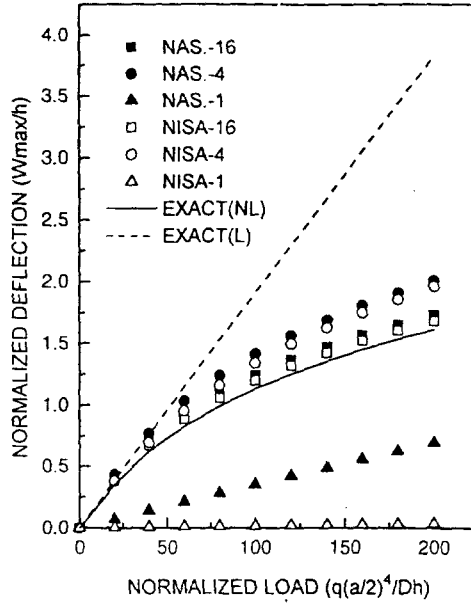
Kirchhoff-Love 판이론의 미소변형에 대한 처짐계산식 식(28)을 이용하여 a/h 가 20배, 50배, 100배 되는 한 변의 길이가 60 mm, 150 mm, 300 mm 인 정사각형 평판에 등분포하중 $q = 0.01 \text{ kgf/mm}^2$ 가 작용할 때의 최대 처짐을 계산하였다. 이에 상응하는 유한요소해에 대한 모델에서 사용한 요소는 MSC/NASTRAN에서는 가로방향 전단보정계수를 5/6 로 대입한 CQUAD4 요소를 사용하였으며 NISA-II에서는 NKTP=20요소를 사용하였다. 표 6은 3가지 평판에 대한 이론해의 결과와 유한요소해석의 결과를 나타낸다. 표에서 알 수 있듯이 요소수가 증가함에 따라 이론해에 대한 오차가 작아지고 두께에 대한 길이의 비가 클수록 즉 박판일수록 이론해에 접근함을 알 수 있다. 유한요소해가 이론해보다 다소 큰 것은 유한요소해석의 경우 전단효과를 고려한 판요소를 사용하여 계산하였고 이론해는 Kirchhoff-Love의 미소변형 판이론에 의한 값으로 전단효과를 고려하지 않은 해이기 때문이라 생각한다. 또한 NISA-II에 의한 해석 결과가 MSC/NASTRAN에 의한 결과보다 이론해에 좀 더 근접함을 알 수 있다.

3.2.2 대변형의 경우

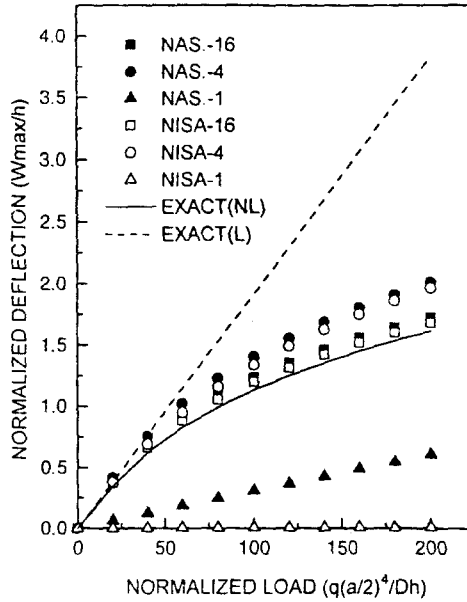
미소변형의 경우에서와 마찬가지로 한 변의 길이가 60 mm, 150 mm, 300 mm 인 정사각형 평판에 등분포하중 q 가 각각 36.63 kgf/mm^2 , 0.9378 kgf/mm^2 , 0.05861 kgf/mm^2 이 작용할 경우의 최대 처짐을 식(36)을 이용하여 계산하였다. 등분포하중을 위의 값으로 택한 이유는 보요소의 경우와 마찬가지로 무차원 분포하중 $q(\frac{a}{2})^4/Dh$ 의 값이 3가지 판의 경우 모두 200이 되도록 하기 위해서이다. 유한요소모델에 사용한 요소는 미소변형의 경우와 같은 요소를 사용하였고 하중의 증분 단계는 10단계로 하여 해석하였다. 3가지 평판에 대한 이론해의 결과와 유한요소해석의 결과를 표 7에 나타내었다. 그림 8은 각각 위의 3가지 평판에 작용하는 등분포하중의 증분에 따른 최대 처짐의 변화를 나타낸다. 이들 표와 그림에서 알 수 있듯이 이들 요소의 대변형 거동은 미소변형일 때의 거동과 유사하게 요소수가 증가할수록 또한 박판일수록 이론해에 근접하는 경향이 있다. 또한 NISA-II와 MSC/NASTRAN 모두 요소수가 최소한 16개 이상이어야 신뢰할 수 있는 결과를 기대할 수 있음을 알 수 있다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 The variation of the maximum deflection of the square plate with load increments for the case of (a) $a/h=20$, (b) $a/h=50$, (c) $a/h=100$.

5. 결 론

상용 유한요소 소프트웨어에서 사용하는 보요소와 판요소의 거동을 조사하기 위하여 외팔보와 4면이 모두 고정된 정사각형 평판문제를 MSC/NASTRAN과 NISA-II로 해석하고, 그 결과를 각각의 이론해와 비교해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 외팔보의 최대수직처짐에 대한 미소변형해석 결과는 요소수의 다소에 관계없이 MSC/NASTRAN과 NISA-II 모두 이론해와 정확하게 일치하였다.
2. 외팔보의 최대수직처짐에 대한 대변형해석 결과는 세장비가 크고, 요소수가 5 이상이면 두 소프트웨어의 해석결과가 이론해와 0.5% 이내의 오차 범위 안에 있다. 따라서 MSC/NASTRAN의 CBEAM 요소와 NISA-II의 NKTP=39 요소가 세장비가 너무 작지 않은 보의 대변형 해석에 적합함을 알 수 있다.
3. 평판의 중심점에서의 처짐은 미소변형이나 대변형해석 결과가 모두 요소수가 많을 수록, 판의 한번의 길이가 두께에 비해 클수록, 즉 박판일수록 이론해에 근접해가는 경향이 있다. 또한 본 연구에서 고찰한 한정된 경우에 대한 해석 결과에서 내린 결론이지만 대칭 평판의 1/4 모델링에서 요소수가 16개 이상이어야 신뢰할 수 있는 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서 해석한 평판 문제의 경우 NISA-II의 해석결과가 MSC/NASTRAN의 해석결과보다 이론해에 더 근접함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Gere, J.M. & Timoshenko, S.P., *Mechanics of Materials*, 3rd SI ed., Chapman & Hall, 1991
- [2] Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Dover Publications, 1944
- [3] Szilard, R., *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*, Prentice-Hall, 1974
- [4] Timoshenko, S.P. & Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1970
- [5] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, 1982

Table 1 The vertical deflection of the cantilever beam at the free end by linear beam theory.

(unit : mm)

L	Euler-Bernoulli beam theory	Timoshenko beam theory
10	0.007	0.008
50	0.926	0.929
100	7.407	7.413

Table 2 The vertical deflections of the cantilever beam at the free end by linear finite element analysis.

(unit : mm)

L	MSC/NASTRAN		NISA-II	
	CBAR	CBEAM($\beta=5/6$)	NKTP=12	NKTP=12($\beta=5/6$)
10	0.007	0.008	0.007	0.008
50	0.926	0.929	0.926	0.929
100	7.407	7.413	7.407	7.413

Table 3 The vertical deflections of the cantilever beam at the free end under a large deflection.

(a) The result of MSC/NASTRAN

(unit : mm)

L/h	P(kg)	Exact	No. of elements			
			1	2	5	10
10/3	10000	5.232	6.008(-14.8)	5.652(-8.0)	5.565(-6.4)	5.553(-6.1)
50/3	400	26.127	28.620(-9.4)	26.739(-2.2)	26.299(-0.5)	26.243(-0.3)
100/3	100	52.323	57.152(-9.2)	53.382(-2.0)	52.501(-0.3)	52.391(-0.1)

(b) The result of NISA-II

(unit : mm)

L/h	P(kg)	Exact	No. of elements			
			1	2	5	10
10/3	10000	5.232	5.832(-11.5)	5.436(-3.9)	5.343(-2.1)	5.332(-1.9)
50/3	400	26.127	28.568(-9.2)	26.695(-2.0)	26.254(-0.3)	26.198(-0.1)
100/3	100	52.323	57.096(-9.1)	53.427(-2.1)	52.479(-0.3)	52.369(-0.1)

* The number in the parenthesis is a percentage error with the analytical solution.

Table 4 The horizontal displacements of the cantilever beam at the free end under a large deflection.

(a) The result of MSC/NASTRAN

(unit : mm)

L/h	P(kg)	Exact	No. of elements			
			1	2	5	10
10/3	10000	1.831	1.882(-2.8)	1.875(-2.4)	1.897(-3.6)	1.902(-3.8)
50/3	400	9.156	8.978(1.9)	8.995(1.8)	9.135(0.2)	9.161(-0.1)
100/3	100	18.311	17.930(2.1)	17.966(1.9)	18.248(0.3)	18.301(0.1)

(b) The result of NISA-II

(unit : mm)

L/h	P(kg)	Exact	No. of elements			
			1	2	5	10
10/3	10000	1.831	1.757(4.0)	1.762(3.8)	1.791(2.2)	1.796(1.9)
50/3	400	9.156	8.941(2.3)	8.972(2.0)	9.114(0.5)	9.140(0.2)
100/3	100	18.311	17.891(2.3)	18.008(1.7)	18.238(0.4)	18.290(0.1)

※ The number in the parenthesis is a percentage error with the analytical solution.

Table 5 The slope of the cantilever beam at the free end under a large deflection.

(a) The result of MSC/NASTRAN

(unit : rad)

L/h	P(kg)	Exact	No. of elements			
			1	2	5	10
10/3	10000	0.8357	0.893(-6.9)	0.833(0.3)	0.821(1.8)	0.819(2.0)
50/3	400	0.8357	0.911(-9.0)	0.849(-1.6)	0.837(-0.2)	0.835(0.1)
100/3	100	0.8357	0.912(-9.1)	0.849(-1.6)	0.837(-0.2)	0.836(0.0)

(b) The result of NISA-II

(unit : rad)

L/h	P(kg)	Exact	No. of elements			
			1	2	5	10
10/3	10000	0.8357	0.925(-10.7)	0.859(-2.8)	0.846(-1.2)	0.845(-1.1)
50/3	400	0.8357	0.913(-9.2)	0.850(-1.7)	0.838(-0.3)	0.836(-0.0)
100/3	100	0.8357	0.913(-9.2)	0.851(-1.8)	0.837(-0.2)	0.836(-0.0)

※ The number in the parenthesis is a percentage error with the analytical solution.

Table 6 The maximum deflection of the square plate under a small deflection.

(a) The result of MSC/NASTRAN

(unit : mm)

a/h	q(kg/mm ²)	Exact	No. of elements		
			1	4	16
20	0.01	0.0031	1.04e-1(66.8)	4.09e-3(-31.2)	3.72e-3(-19.1)
50	0.01	0.1219	0.022(81.7)	0.145(-18.9)	0.139(-14.0)
100	0.01	1.9500	0.313(84.0)	2.248(-15.4)	2.190(-12.3)

(b) The result of NISA-II

(unit : mm)

a/h	q(kg/mm ²)	Exact	No. of elements		
			1	4	16
20	0.01	0.0031	1.27e-3(59.2)	3.54e-3(-13.5)	3.50e-3(-12.1)
50	0.01	0.1219	0.044(63.9)	0.134(-9.7)	0.131(-7.9)
100	0.01	1.9500	0.690(64.6)	2.128(-9.1)	2.092(-7.3)

* The number in the parenthesis is a percentage error with the analytical solution.

Table 7 The maximum deflection of the square plate under a large deflection.

(a) The result of MSC/NASTRAN

(unit : mm)

a/h	q(kg/mm ²)	Exact	No. of elements		
			1	4	16
20	36.63	4.838	3.533(26.9)	6.073(-25.5)	5.326(-10.1)
50	0.9377	4.838	2.063(57.4)	6.026(-24.6)	5.194(-7.4)
100	0.0586	4.838	1.813(62.5)	6.026(-24.6)	5.165(-6.7)

(b) The result of NISA-II

(unit : mm)

a/h	q(kg/mm ²)	Exact	No. of elements		
			1	4	16
20	36.63	4.838	0.642(86.7)	5.904(-22.0)	5.084(-5.1)
50	0.9377	4.838	0.103(97.9)	5.886(-21.7)	5.044(-4.3)
100	0.0586	4.838	0.026(99.5)	5.881(-21.6)	5.036(-4.1)

* The number in the parenthesis is a percentage error with the analytical solution.