

彈性地盤上的 板解析에 있어서 影響領域 및 影響係數

金 聲 得

土 木 工 學 科

(1985. 4. 30 접수)

<요 약>

Winkler 地盤이나 等方彈性 半無限體上的 板解析에 있어서 地盤要素의 影響領域과 影響係數를 數值的으로 計算하는 새로운 技法을 다루었고, 또 電算프로그램 NMAT 를 開發하여서 많은 例題에 對해 檢討하였다. 本 프로그램에 對해서 半無限體上的 版의 解析은 地盤反力係數 k 가 $\frac{E_s}{6.4(1-\nu_s^2)}$ 인 Winkler 地盤上的 問題로 代置될 수 있다.

Influence area & influence factor in the analysis of plates on elastic foundation

Kim, Sung-Deuk

Dept. of Civil Engineering

(Received April 30, 1985)

<Abstract>

In the analysis of plates resting on Winkler's type springs or on an isotropic elastic half space, a new technique is introduced to calculate the numerical values of influence area & influence factor for the soil element, and a computer program NMAT has been developed and checked through various cases.

My investigation of plates resting on an half space gives the following expression for the modulus of subgrade reaction. $k = \frac{E_s}{6.4(1-\nu_s^2)}$

I. 序 論

일반적으로 대부분의 구조물은 地盤 위에 基礎를 두고 그 위에 構造物을 축조하며, 이에 대한 해석은 계산의 편의상 지반 및 기초와 상부구조를 분리해서 생각해 왔으나, 상부구조가 外的으로 不靜定일 때는 외력이 작용하면 그 구조물내의 응력은 지반의 변형의 영향을 받으며 기초의 응력분포는 구조와 기초의 相對剛度(Relative stiffness)의 영향을 받기 때문에 地盤—基礎—構造 사이의 相互影響(Interaction)을 고려한 一體的인 해석방법이 요구되어 지며, 이를 위해서는 지반상의 구조에 대한 효과적인 모델화가 필요하게 될 것이며 문헌^(1,2,3)

등에서 소개된 바와 같은 많은 연구가 수행되어 왔다.

많은 구조물이 彈性地盤上的 매트基礎 위에 축조되고 있는 바, 이 매트基礎는 그림 1에서 보는 바와 같이 여러개의 要素로 된 板(Plate)과 그것을 받치고 있는 지반으로 나누어서 생각할 수 있는 바, 잘 알려져 있는 板理論과 地盤모델을 기초로 하여서 양자의 상호영향을 고려한 문제를 다루기로 한다.

地盤의 모델化에 있어서 여러가지 假定, 理論 및 適用方法에 대해서 조사한 바 Winkler 지반과 Boussinesq 지반위로 귀착되었다고 볼 수 있으며 이러한 모델에 대해서 어떤 형상의 기초에 어떤 형태

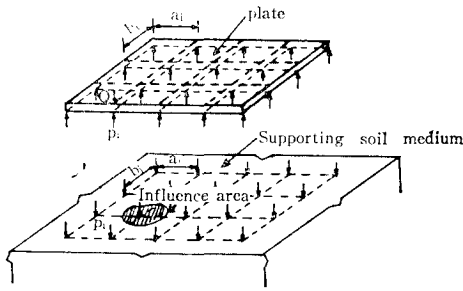


그림 1. Finite element model of a plate resting on an elastic soil medium

의 하중이 작용하더라도 수치해석이 가능한 有限要素法을 다루어 보기로 한다.

이제 Cheung 및 Zienkiewicz가 發表한 「유한요소법에 의한 탄성지반상의 板 및 탱크」의 연구⁽⁴⁾를 기초로 하여서, 요소의 각 변이 직선 뿐만 아니라 2차 및 3차곡선으로 될 수 있어서 어떤 형태의 경계에서도 기하학적으로 잘 근사시킬 수 있고 形狀函數(Shape function)를 直觀的으로 구할 수 있는 8節點의 Isoparametric 要素를⁽⁵⁾ 사용하여서 탄성지반상의 板의 문제를 발견시키하고자 하는바, 본인이 개발한 프로그램 MATK를⁽⁶⁾ 기초로 하여서 基礎低板 아래의 결점당 영향을 미치는 地盤要素의 領域을 수치적으로 구하고 또 이미 소개된 影響係數를 중심으로 여러가지 비교를 할 수 있는 補完된 프로그램 NMAT를 開發하여서 矩形 및 圓形 기초를 例로 하여서 여러가지 分析을 행하고 또 Winkler 지반과 Boussinesq 지반의 관계식을 導出코자 한다.

II. 基本理論

1. 板理論

8節點의 Isoparametric 요소(그림 2 참조)를 사용한 板理論(그림 3 참조)을⁽⁷⁾ 略述하고자 한다.

요소내의 임의의 점에서의 변위를 결점에서의 변위와 형상함수로 나타낸다.

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) \\ N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0), \quad (i=2,6) \\ N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2), \quad (i=4,8) \end{aligned} \right\} (1)$$

단, $\xi_0 = \xi\xi_i, \eta_0 = \eta\eta_i$

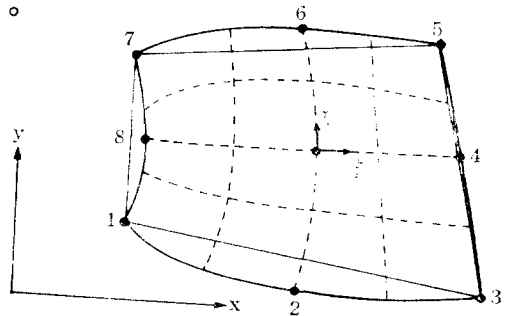


그림 2. Isoparametric element-8 node

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_i w_i \\ \sum N_i \theta_{xi} \\ \sum N_i \theta_{yi} \end{bmatrix} = \Sigma [N_i] \{\delta_i\} = [N] \{\delta_\rho\}$$

단, $[N] = [N_1, N_2, \dots, N_8]$

$$[N_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\delta_\rho\} = [w_i, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \dots, w_8, \theta_{8x}, \theta_{8y}]^T \quad (2)$$

$$x = \Sigma N_i x_i, \quad y = \Sigma N_i y_i \quad (3)$$

일단 변위함수가 구해지면 板의 要素剛度매트릭스는 일반화되어 있는 公式을 쓸 수 있다. 즉,

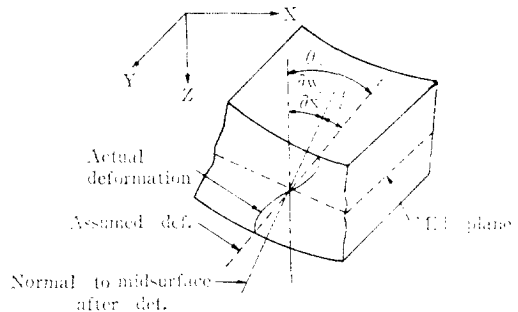


그림 3. Mindlin plate

$$[K_s] = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (4)$$

식(4)에서 Strain 매트릭스 [B]는 變形度 [ε]의 정의에 따라서 정해진다.

$$[\varepsilon] = [\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}, -\phi_x, -\phi_y]^T$$

$$\left. \begin{aligned} \text{단, } \chi_x &= -\partial\theta_x/\partial x \\ \chi_y &= -\partial\theta_y/\partial y \\ \chi_{xy} &= -(\partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x) \\ -\phi_x &= \partial w/\partial x - \theta_x \\ -\phi_y &= \partial w/\partial y - \theta_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

식(3)을 편미분하여 식(5)를 정리한다.

$$[\varepsilon] = \sum_{i=1}^s \begin{bmatrix} 0 & -\partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial N_i/\partial y \\ 0 & -\partial N_i/\partial y & -\partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial x & -N_i & 0 \\ \partial N_i/\partial y & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x,i} \\ \theta_{y,i} \end{Bmatrix}$$

$$= \Sigma [B_i] [\delta_i]$$

$$= [B] [\delta]$$

단, $[B] = [B_1, B_2, \dots, B_s]$ (6)

[B]에 있는 $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ 項은 $\partial/\partial \xi, \partial/\partial \eta$ 項으로 바꾸어야 한다.

$$\left. \begin{aligned} \partial N_i/\partial x &= [J]^{-1}(\partial N_i/\partial \xi) \\ \partial N_i/\partial y &= [J]^{-1}(\partial N_i/\partial \eta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\text{단, } [J] = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix}$$

$$\partial x/\partial \xi = \Sigma(\partial N_i/\partial \xi)x_i, \dots$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_x] & 0 \\ 0 & [D_y] \end{bmatrix}$$

$$[D_x] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[D_y] = \frac{Et}{2.4(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 일반화된 板의 要素剛度 매트릭스를 나타낸 식(4)는

$$[K_s] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] t |J| d\xi d\eta \quad (9)$$

와 같이 변환되며 [K_s]를 全要素에 대해서 組合하면 板의 剛度매트릭스 [K_p]를 구할 수 있고, 板에 작용하는 外的 節點荷重을 {F}라 할 때 다음과 같은 剛度方程式을 얻는다.

$$\{F\} = [K_p] \{\delta\} \quad (10)$$

Gaussian point에서의 應力 {σ}는

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma\} &= [M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]^T \\ &= [D] \{\varepsilon\} \\ &= [D] [B] \{\delta\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

이다.

2. 두 가지 地盤모델

탄성지반상에 놓인 구조물에 하중이 작용할 때 지반의 변위는 지반과 구조물과의 접촉면에서만 일어나고 그 면에서의 수직변위는 접촉압력에 비례한다고 보는 그림 4와 같은 모델을 Winkler 地盤⁽²⁾이라 한다.

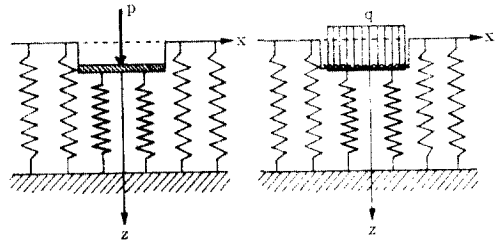


그림 4. Displacement of Winkler model

面積 A 상의 집중하중 P 혹은 등분포하중 q에 의해서 Area 내의 범위에서 均等한 沈下가 일어나고 그 침하량 W는 다음의 관계가 있다.

$$\left. \begin{aligned} q(x, y) \\ P(x, y)/A \end{aligned} \right\} = kW(x, y) \quad (12)$$

여기서 k는 地盤反力係數(Modulus of subgrade reaction)로⁽⁸⁾ 平板載荷試驗 등으로 구한다.

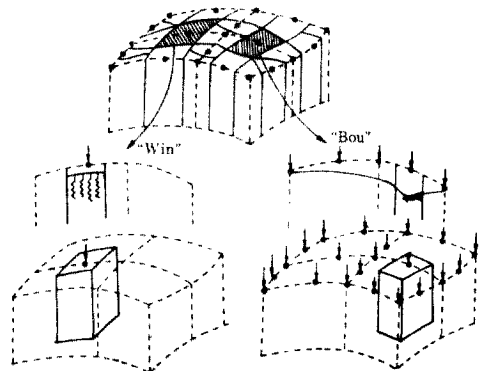


그림 5. Pedestal element of soil medium

기초저면이 지반과 분리되지 않고 저면의 침하량이 하중 작용점에서만 독립적으로 그 하중에 비례

한다고 할 때 그림 1의 지반을 그림 5와 같이 절점을 중심으로 절점수 만큼의 柱狀體要素로 분해해서 생각할 수 있으며, 지반의 한 절점 i 를 중심으로 임의의 形狀으로 分割된 地盤要素의 면적 A_i 에 집중하중 p_i 혹은 등분포하중 q_i 가 작용할 때 변위 w_i 는

$$\left. \begin{aligned} q_i(x, y) \\ p_i(x, y)/A_i \end{aligned} \right\} = k w_i(x, y) \quad (13)$$

이며, 여기서 A_i 를 i 點 주위 지반의 影響領域(Influence area) 혹은 支配領域이라고 한다.

한편, 지반을 彈性(Elastic), 均質(Homogenous) 및 等方性(Isotropic)이라고 가정한 Boussinesq 지반에서는⁽²⁾, 그림 5의 한 주상체요소 에 대해서 그림 6과 같이 그 요소내의 i 점에 작용하는 등분포하중 q 와 等價인 집중하중 p_i 에 의한 r 만큼 떨어진 j 점에서의 변위 w_{ji} 는 다음과 같음을 提示하고 있다. 즉

$$\left. \begin{aligned} w_{ji} &= \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \cdot \frac{p_i}{r} \\ &= \beta \cdot \frac{p_i}{r} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

단, $\beta = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i}$

여기서 E_i, ν_i 는 지반의 彈性係數 및 Poisson 比이고 β/r 을 柔軟度(Flexibility)라 한다.

그런데 i 점에 작용하는 하중으로 因해서 i 점 자신에 생기는 변위는 $r=0$ 이 되어 식(14)의 값이 無限大로 되어 모순점이 생기므로, 이 경우에는 등가 절점하중이 한 절점 주위의 影響영역 요소에 p_i/A_i

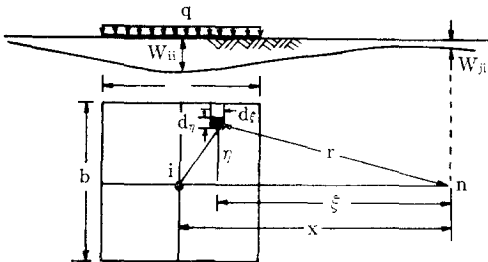


그림 6. Isotropic elastic half-space

의 등분포하중으로 작용한다고 가정하고 그 영역의 요소면적에 대해 식(14)를 積分함으로써 변위를 구한다. 즉

$$\left. \begin{aligned} w_{ii} &= \int_{A_i} \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \cdot \frac{p_i}{A_i r} dA_i \\ &= \beta p_i \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \frac{dA_i}{r} \\ &= \beta f_{ii} p_i \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

여기서

$$f_{ii} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \frac{dA_i}{r} \quad (16)$$

으로서 한 절점하중이 영향을 미치는 지반요소의 면적과 요소내 미소면적과 절점간의 거리의 積으로 나타내어지는 影響係數(Influence factor)라 한다.

III. 影響領域 및 影響係數

기초의 한 지반요소에 대하여 요소내의 절점하중에 의한 변위와 요소밖의 여러 절점하중에 의한 변위를 구하였다. 그러나 8절점의 Isoparametric 요소는 한 절점의 影響영역은 4절점 요소처럼⁽⁵⁾ 모서리절점의 중간 절점에 의해 사각형으로 분할하기가 어려우므로 등가절점하중의 分布 범위를 그림 7에서 처럼 적당하게 配分하여 수치적분을 강행한다.⁽⁶⁾ 즉, 그림 7-(a, b, c)에서 처럼 요소를 ξ, η 좌표 상으

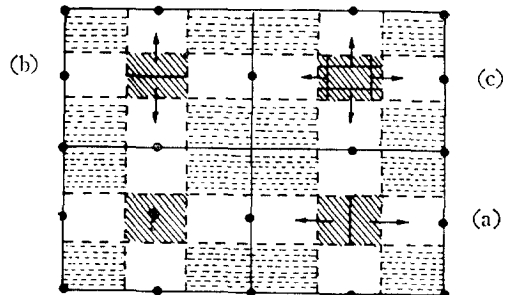


그림 7. Distribution of influence area

로 9等分하여 같은 면적의 矩形領域 $a_i \times b_i$ 로 나타내거나, 요소를 中央部分을 제외한 면적은 그 속에 포함되는 절점에 배당하고 중앙부분은 8절점에 等分配하는 방법 등을 생각할 수 있다. 즉,

$$A_i = A_{i0} + \sum_1^n \frac{A \cdot n}{8} \quad (17)$$

단, A_{i0} : i 절점에 직접 배당되는 면적

A_m : i 절점과 관련된 중앙부분 면적

n : 절점의 위치에 따라 1, 2, 4

a_i, b_i : 影響영역의 긴변 및 짧은변 길이

그러나 식(15)의 적분은 임의의 曲線境界를 갖는 영역에 대한 적분이므로 수치적분에 의존하지 않을 수 없다.⁽⁹⁾

한 지반요소의 영역내에서는 反力分布가 均等하다고 가정하여 영역 내의 등분포하중과 等價인 節點力系를 假想일의 原理에 의해 구한다. 즉,

$$\delta\{w_i\}\{p_i\} = \int \delta w_i q_i dA \quad (18)$$

여기서 $\{w_i\}$ 는 지반요소의 들레에 있는 절점의 변위이고, $\{p_i\}$ 는 등가절점력계이고, w_i 는 e 내의 임의 절점의 假想變位이며, q_i 는 등분포하중이다.

식(2)에서

$$w_i = \sum_{i=1}^n N_i w_i = \{w_i\}^T [N]^T \quad (19)$$

이며, 식(19)를 식(18)에 대입하면

$$\{p_i\} = q_i \int_A [N]^T dA \quad (20)$$

가 되며 식(20)을 절점별로 表示하면

$$p_i = q_i \int_A N_i dA \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (21)$$

이고, q_i 가 등분포하중이므로 한 절점의 등가절점 하중 p_i 가 分配되는 影響領域 A_i 는

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A_i \cdot \frac{\int_A N_i dA}{\sum \int_A N_i dA} \\ &= A_i \cdot \frac{\int_A N_i dA}{\int_A (\sum N_i) dA} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

이며 $\sum_{i=1}^8 N_i = 1$ 이므로 식(22)는

$$A_i = \int_A N_i dA \quad (23)$$

가 된다. 따라서 절점 i 에 作用하는 p_i 의 영향영역은 i 점을 둘러싸고 있는 각 요소의 면적 A_i 를 모은 것이라고 할 수 있고, 다시 $\sum A_i$ 에 p_i 가 등분포하는 것이라고 다시 가정하면 p_i 의 영향영역 A_i 는 다음과 같이 나타낸다.

$$A_i = \int_A N_i dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \det [J] d\xi d\eta \quad (24)$$

한편 식(19) 및 (15)에서

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum N_i w_i \\ &= \beta \cdot p_i \sum \frac{1}{A_i} \int_A \frac{N_i dA}{r} \\ &= \beta \cdot p_i \cdot f_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

가 되며 식(21), (24) 및 (25)는 共通點을 발견할 수 있어서 이미 發表된 등분포하중을 등가절점하중으로 바꾸는 Subroutine program을 利用할 수 있다.

이렇게 하여 구해진 영역 A_i 는 그림 6에서 보는 바와 같이 $a_i \times b_i$ 크기의 矩形領域으로 되어 있다고 생각할 때, 그림 7의 配分方法 등에 따라 後述하는 計算值를 비교하면 a/b 비에 크게 영향을 받지 않음을 볼 때⁽⁹⁾ $a/b=1$ 혹은 $4/3$ 으로 생각하거나 要素의 Gaussian point 좌표 $x_{GP(i)}$, $y_{GP(i)}$ 의 이웃한 점을 연결한 線의 x, y 좌표에 대한 길이의 합의 비로서 表示하기로 한다.

$$\left. \begin{aligned} AA &= \text{MAX}(|\Sigma(X_{GP(i)} - X_{GP(j)})|, \\ &\quad |\Sigma(X_{GP(i)} - Y_{GP(j)})|) \\ BB &= \text{MIN}(|\Sigma(X_{GP(i)} - X_{GP(j)})|, \\ &\quad |\Sigma(Y_{GP(i)} - Y_{GP(j)})|) \\ \frac{a}{b} &= AA/BB \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

따라서 影響係數 f_{ii} 의 식(16)은

$$f_{ii} = \frac{2}{a_i b_i} \int_{x=0}^{x=a/2} \int_{y=0}^{y=b/2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (27)$$

가 되며 f_{ii} 와 관련하여 아래와 같이 다른 영향계수 I_w , α , S_i 를 보이고 있다.

Steinbrenner는⁽⁸⁾ 여러가지 형태의 기호에 대한

表 1. Influence factor I_w

Shape	Flexible			Rigid
	Center	Corner	Average	
Circle	1.0	0.64	0.85	0.88
Square	1.12	0.56	0.95	0.82
Rectangle 1.5	1.36	0.68	1.15	1.06
$(\frac{a}{b})$	2	1.53	0.77	1.30
	5	2.10	1.05	1.83
	10	2.54	1.27	2.25
	100	4.01	2.00	3.69

영향계수 I_w 值를 表 1과 같이 提示하였으며 특히 矩形地盤의 모서리 部分에 對한 I_w 를 다음과 같이 나타내었다.

$$\left. \begin{aligned} I_w &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{a}{b} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{(a/b)^2 + 1}}{a/b} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \right] \right\} \\ f_{ii} &= \frac{\pi I_w}{a} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

趙・嚴은^(9,10) 영향계수 α_i 를 提示한 바

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{b} \left[a \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{\sqrt{a^2+b^2}-b} \right. \\ &\quad \left. + 4b \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b+\sqrt{a^2+b^2}-b}{\sqrt{2b}} \right] \\ f_{ii} &= \alpha_i/a \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

와 같으며, Timoshenko⁽¹¹⁾ 또 다른 영향계수 S_i 를提示하였다. 즉,

$$\left. \begin{aligned} S_i &= 2 \frac{a}{b} \left\{ \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{a} \ln \left[\frac{a}{b} + \left(-\frac{a^2}{b} + 1 \right)^{1/2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \right\} \\ f_{ii} &= S_i/a \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

와 같으며, 여러가지 係數에 대한 비교는 例에서 보이기로 한다.

Ⅶ. 解析方法

1. 板과 地盤의 連結

앞에서 다른 地盤모형에 근거하여서 地盤의 剛度 매트릭스를 구하고 여기에 板의 剛度 매트릭스를 組合하고 地盤上의 板의 평형방정식을 유도하고자 한다.

Winkler 지반에 대해서는 식(13)을 모든 結점에 대해서 생각하면

$$\{p\} = k[A_i]\{w\} = [K'_w]\{w\} \quad (31)$$

와 같고 여기서 $[K'_w]$ 는 Winkler 지반의 강도 매트릭스로서 對角 매트릭스이다. 즉

$$[K'_w] = k[A_i] = k \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (32)$$

Boussinesq 지반에 대해서는 임의의 i 結점의 침하량은 i 點 외의 作用하중으로 인한 沈沈량 식(14)의 累積值에 i 點에서의 하중으로 인한 값 식(15)를 합한 것이다. 즉

$$\left. \begin{aligned} w_i &= w_{ii} + \sum_{j=1}^n w_{ij} \\ &= \beta f_{ii} p_i + \beta \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{r_{ij}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

이며 沈沈점 n 개에 대한 식(33)을 매트릭스 형태로 나타내면

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} f_{11} & \frac{1}{r_{21}} & \frac{1}{r_{31}} & \dots \\ \frac{1}{r_{12}} & f_{22} & \frac{1}{r_{32}} & \dots \\ \frac{1}{r_{13}} & \frac{1}{r_{23}} & f_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (34)$$

즉, $\{w\} = [F_f]\{p\}$

로서 $[F_f]$ 는 지반의 柔軟度 매트릭스(Flexibility matrix)로서 대칭이지만 帶狀이 아니고 塊 狀 매트릭스이다.

식(34)를 $\{p\}$ 에 대해서 展開하면

$$\begin{aligned} \{p\} &= [F_f]^{-1}\{w\} \\ &= [K'_B]\{w\} \end{aligned} \quad (35)$$

로서 $[K'_B]$ 는 $[F_f]$ 의 逆 매트릭스이다.

지반의 作用하중 및 변위가 각각 p, δ 이고 板의 하중 벡터 및 변위 벡터가 $F_i = [p, M_x, M_y]^T$ 와 $\{\delta\} = [w, \theta_x, \theta_y]^T$ 임을 고려하면 식(31) 및 (35)는 板에 對應하도록 $3n \times 3n$ 크기로 확장하여서

$$\{F_w\} = [K_w]\{\delta\} \quad (36)$$

$$\{F_B\} = [K_B]\{\delta\} \quad (37)$$

가 되며 M_x, M_y 및 θ_x, θ_y 값은 0이다.

板의 結점에 作用하는 하중은 外的荷重 $\{F\}$ 이지만 地盤에 놓여있는 板임을 고려하면 效果的으로 미치는 Winkler 지반 基礎의 外力은^(2,5) $\{F\} - \{F_w\}$ 가 되며 따라서 식(10)은

$$\{F\} - \{F_w\} = [K_p]\{\delta\} \quad (38)$$

가 되고 여기에 식(36)을 代入하면

$$\begin{aligned} \{F\} &= [K_w]\{\delta\} + [K_p]\{\delta\} \\ &= ([K_w] + [K_p])\{\delta\} \\ &= [K_{w-p}]\{\delta\} \end{aligned} \quad (39)$$

가 되며, $[K_p]$ 의 對角線에 $k_{a,b}$ 值를 2칸씩 걸러서 重첩한 Winkler 지반상의 板의 剛度 매트릭스 $[K_{w-p}]$ 는 帶狀 매트릭스이므로 Band Method⁽¹²⁾를 適用하여서 식(39)를 풀 수 있다.



마찬가지로 Boussinesq 지반에 대해서도

$$\begin{aligned} \{F\} &= ([K_B] + [K_p])\{\delta\} \\ &= [K_{B-p}]\{\delta\} \end{aligned} \quad (40)$$

로 나타내어지며 Boussinesq 지반상의 板의 剛度 매트릭스 $[K_{B-p}]$ 는 帶狀의 $[K_p]$ 보다 큰 $3n \times 3n$ 크기의 塊 狀 매트릭스가 되어서 앞의 方法을 적용할 때 Band 幅이 $3n$ 이 되어서 特異한 Band Method의 적용이 되어지며 따라서 강도 매트릭스內의 많은 0 項을 消去하는 技法은⁽¹³⁾ 사용해야 하겠으며, 變位

가 구해지면 應力은 식(11)에서와 같이 구할 수 있다.

2. 프로그램의 構成

Hinton 과 Owen 이 開發한 板구조물의 해석 프로그램을⁽⁷⁾ 根幹으로 하여, 彈性地盤上的 板解析을 앞에서 論한 理論에 따라 이미 발표한 MATK 프로그램을, 영향영역의 自動的인 配分 및 여러가지 영향계수에 對한 Boussinesq 지반상의 板解析의 比較분석을 할 수 있는 프로그램 NMAT 로 發展시켰는 바, 이 프로그램의 General Flow Chart 는 그림 8과 같으며 Subroutine 중에서  表示는 Hinton-Owen 의 프로그램과 거의 일치되며  表示는

는 다소 改편한 것,  는 다른 기존의 프로그램을 이용한 것이며  는 이련에 改發한 것을 뜻한다.

3. 計算例

프로그램 NMAT 를 사용하여 그림 9와 같은 10ft × 10ft(두께 2ft)의 矩形基礎와 半徑 20ft(두께 1ft)의 圓形基礎에 대해서 몇가지 計算을 하고자 하는 바 그 전에 두께 40mm 의 1.05×1.05m 의 矩形인 鋼板에 對해 平板載荷試驗(Plate-load Test)을⁽¹⁴⁾ 行하여서 地盤의 反力係數 k 를 荷重強度와 沈下量사이의 關係曲線에서 구하고, 같은 형상의 70×70cm 板에 對해서 試驗을 하여서 表 1의 I_s 와 식(28)과

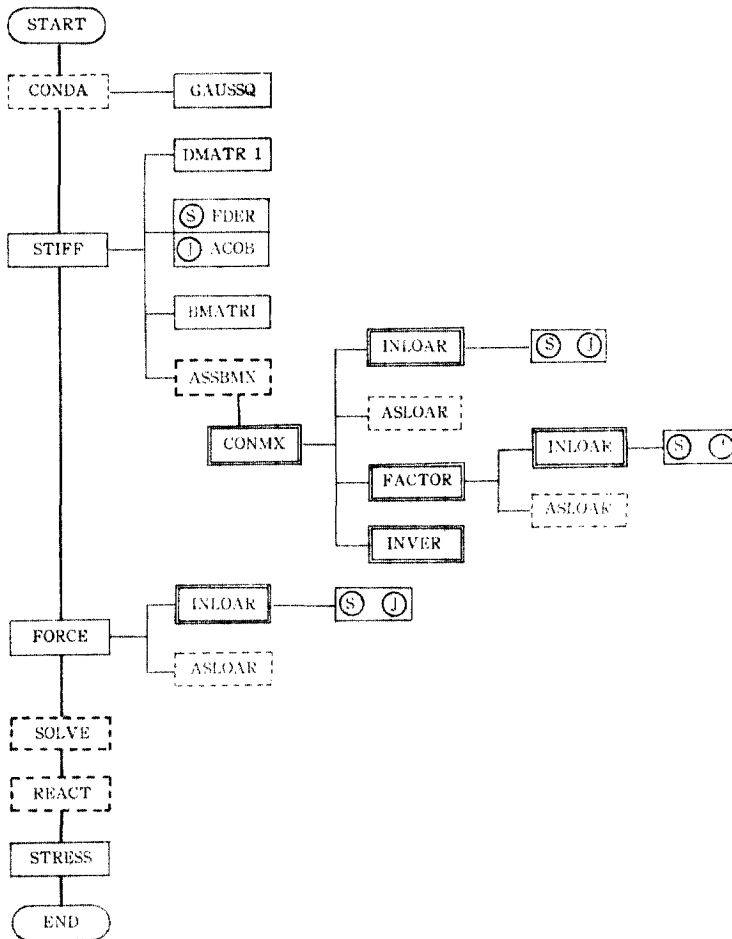


그림 8. General flow chart

식(15)에서 qb 와 沈下의 관계 곡선을 그릴 때 그 기울기가 $(1-\mu^2)I_w/E$ 이며 여기서 E 를 구한다.⁽⁶⁾ 이후의 여러 계산에 있어서 다른 값이 없으면 地盤에서 $k=500ksf$, $\nu_s=0.25$, $E_s=1,440ksf$ 로, 板은 $\nu=0.3$, $E=468,000ksf$ 로, 作用荷重은 中央點에 500kip가 加해지는 것으로 하겠으며, Winkler 地盤을 “Win”, Boussinesq 지반을 “Bou”로 略해 表示한다.

1) 影響領域의 幾何定的인 分配

영향영역을 數值的으로 配分하지 않고 그림 7에서와 같이 기하학적으로 적절한 크기의 $a \times b$ 인 矩形으로 하여서 프로그램 MATK에서 結節 입력자료

에 직접 두 변의 길이를 넣어서 계산한 값이 表 2에 있으며 여기서 配分形態에 無關하게 變位가 같음을 알 수 있다.

2) 影響領域의 數值的인 分配

영향영역을 프로그램 NMAT를 이용하여 수치적으로 배분하여서 계산한 변위가 역시 表 2에 나타나 있다.

表 2에서 “Win”에 대해 幾何學的, 數值的인 分配法에 關係없이 變位가 일치함을 알 수 있으며, “Bou”에 대해서도 I_w 值를 基準으로 한 方法과 $a/b=1.33$ 및 식(26)에 의한 a/b 比에 대한 變位가 같음을 알 수 있으나, 각 영향계수에 대한 解析方

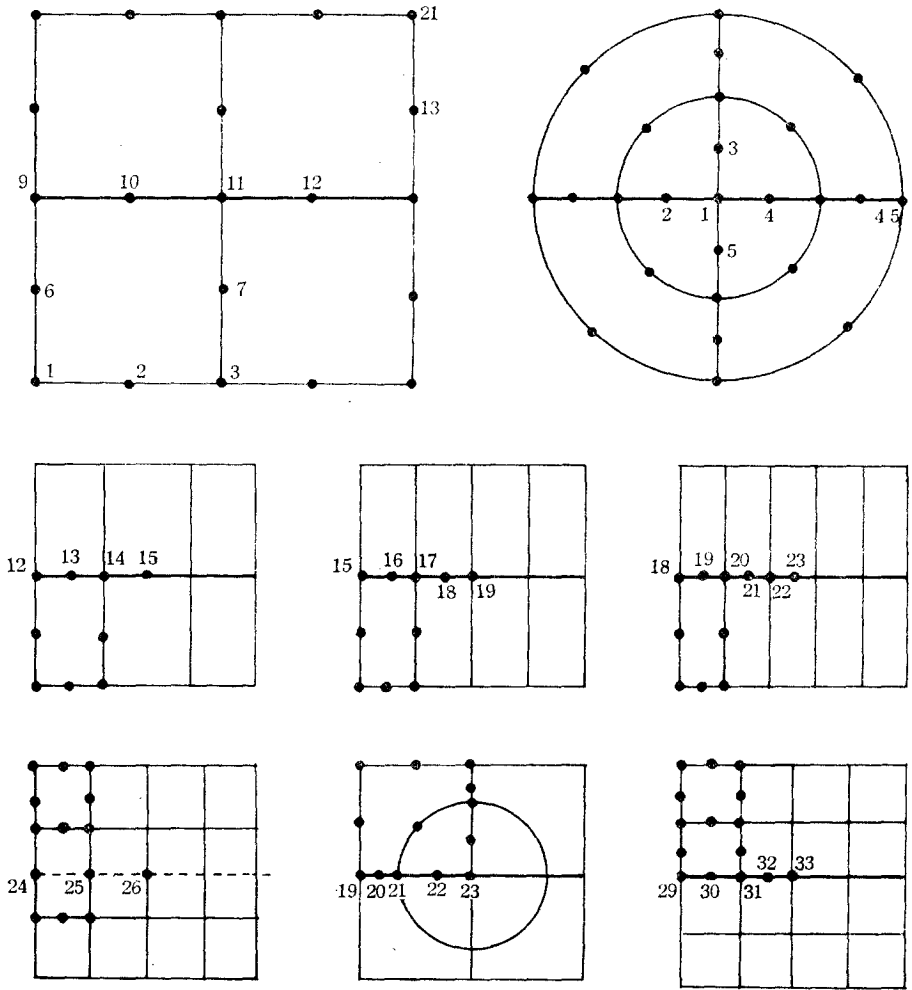


그림 9. Node numbering

表 2. Disp.—distribution type and influence factor

			Node 9	Node 10	Node 11	비 고
Win	MATK	그림 a	0.00961	0.01062	0.01168	
		그림 b	0.00971	0.01063	0.01168	
		그림 c	0.00965	0.01062	0.01168	
	NMAT		0.00963	0.01049	0.01157	
Bou	MATK	그림 a	0.02330	0.02459	0.02587	I_w 이용
		그림 b	0.02339	0.02461	0.02587	
		그림 c	0.02336	0.02461	0.02589	
	NMAT	I_w^*	0.02113	0.02235	0.02350	*: $\frac{a}{b} = 1.333$
		I_w	0.02117	0.02239	0.02354	
		α_r^*	0.02755	0.02860	0.02966	
		α	0.02763	0.02868	0.02974	
		S_i^*	0.02412	0.02525	0.02634	
		S_i	0.02473	0.02584	0.02693	
		f_{num}	0.02001	0.02137	0.02258	

法에서는 I_w 와 f_{num} 에 대한 變位가 비슷하며 S_i 와 α 에 대한 값이 다소 큼을 알았다.

3) 地盤狀態에 따른 比較

土性別 k 값 및 E_s 값은^(8,15) 그 變化의 幅이 至大하며 實驗으로도 그 값이 一定하지 않는 等의 어려움이 있어서 表 3에 나타난 k 및 E_s 의 地盤狀態에

表 3. Typical range of values for k & E_s

Win	Type of soil	$k(kcf)$
a	Loose sand	30—100
b	Medium sand	60—500
c	Dense sand	400—800
d	Clayey sand(medium)	200—500
e	Silty sand(medium)	150—300
f	Clayey soil	75—300

Bou	Type of Soil	$E_s(psi)$
1	Very soft clay	50— 400
2	Soft clay	250— 600
3	Medium clay	600—1,200
4	Hard clay	1,000—2,500
5	Sandy clay	4,000—6,000
6	Silty sand	1,000—3,000
7	Loose sand	1,500—3,500
8	Dense sand	7,000—12,000
9	Dense sand and gravel	14,000—28,000

다른 變位의 범위를 그림 10에서 볼 수 있다.

여기에서 우리는 “Win”의 k 값과 “Bou”의 E_s 値의 有關係를 찾아보고자 하는 바^(16,17), 두 常數의 相異性으로 일반적인 關係式의 유도가 어려운 바, 그림 10에서 처짐이 k 및 E_s 値에 一次의 比例하고 $E_s=1,440$ 의 變위에 對應되는 k 値가 240임을 볼 때 본 프로그램에서 아래의 關係式을 이룰 수 있다. 즉,

$$k = \frac{E_s}{6.4(1-\nu_s)} \tag{41}$$

위 식은 일반적인 地盤에 적용되는 式이라기 보 다 본 프로그램을 수행할 때 “Bou”의 컴퓨터사용량 等의 과다로 인한 많은 결점을 가진 해석에서는 E_s 에 對應하는 k 값을 구해서 “Bou”의 처짐을 간접으로 구하는 利點이 있다.

4) 要素數에 따른 比較

그림 9에서 볼 수 있는 바와 같이 같은 크기의 基礎의 要素數를 變化시켰을 때의 中心線上的 처짐이 表 4에 나타나 있는 바 기의 일치함을 알 수 있으며 이는 Isoparametric 要素를 사용한 點 等의 利點때문이다.

5) 圖形基礎의 解析

그림 9와 같은 圖形基礎^(11,18) ($E=432,000$ ksf, $\nu=0.2$, $E_s=2,000$ ksf, $\nu_s=0.3$)이 中央點에 集中

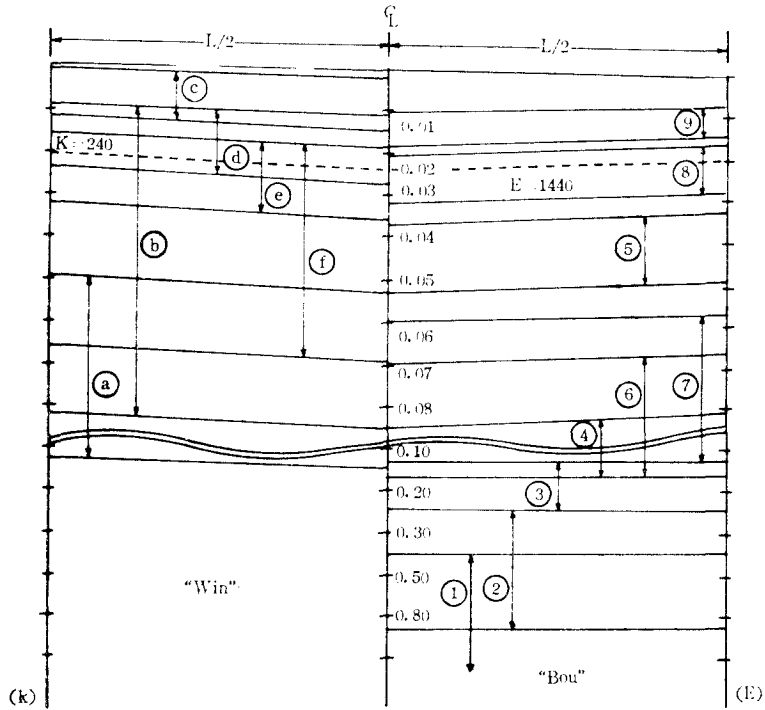


그림 10. Disp. depending on type of soil

表 4. Disp. — number of elements

	4el.	6el.	8el.	10el.	12el.	12el. -R	16el.
Win	⑨0.9631 E-02	⑫0.9633 E-02	⑮0.9736 E-02	⑱0.9606 E-02		⑲0.9712 E-02	㉑0.9696 E-02
	⑩0.1049 E-01	⑬0.1011 E-01	⑯0.9998 E-02	⑳0.9932 E-02	㉒0.9650 E-02	㉓0.9938 E-02	㉕0.1001 E-01
	⑪0.1157 E-01	⑭0.1070 E-01	⑰0.1037 E-01	㉑0.1022 E-01	㉔0.1038 E-01	㉖0.1019 E-01	㉗0.1050 E-01
		⑰0.1126 E-01	⑱0.1102 E-01	㉒0.1067 E-01	㉕0.1134 E-01	㉘0.1088 E-01	㉙0.1099 E-01
			㉑0.1169 E-01	㉓0.1115 E-01		㉖0.1164 E-01	㉙0.1170 E-01
			㉔0.1143 E-01				
Bou (I_w)	⑨0.2001 E-01	⑫0.2202 E-01	⑮0.2253 E-01	⑱0.2242 E-01		⑲0.2421 E-01	㉑0.2373 E-01
	⑩0.2137 E-01	⑬0.2264 E-01	⑯0.2291 E-01	㉑0.2283 E-01	㉒0.2324 E-01	㉓0.2455 E-01	㉕0.2421 E-01
	⑪0.2258 E-01	⑭0.2332 E-01	⑰0.2335 E-01	㉑0.2340 E-01	㉔0.2430 E-01	㉖0.2489 E-01	㉗0.2475 E-01
		⑰0.2395 E-01	⑱0.2416 E-01	㉒0.2398 E-01	㉕0.2537 E-01	㉘0.2570 E-01	㉙0.2543 E-01
			㉑0.2436 E-01	㉓0.2446 E-01		㉖0.2650 E-01	㉙0.2618 E-01
			㉔0.2472 E-01				
Bou (f_{sum})	⑨0.2117 E-01	⑫0.2038 E-01	⑮0.2139 E-01	⑱0.2121 E-01		⑲0.2390 E-01	㉑0.2287 E-01
	⑩0.2239 E-01	⑬0.2160 E-01	⑯0.2186 E-01	㉑0.2160 E-01	㉒0.2224 E-01	㉓0.2433 E-01	㉕0.2338 E-01
	⑪0.2354 E-01	⑭0.2235 E-01	⑰0.2235 E-01	㉑0.2200 E-01	㉔0.2343 E-01	㉖0.2462 E-01	㉗0.2395 E-01
		⑰0.2301 E-01	⑱0.2321 E-01	㉒0.2269 E-01	㉕0.2454 E-01	㉘0.2545 E-01	㉙0.2464 E-01
			㉑0.2397 E-01	㉓0.2335 E-01		㉖0.2628 E-01	㉙0.2540 E-01
			㉔0.2367 E-01				

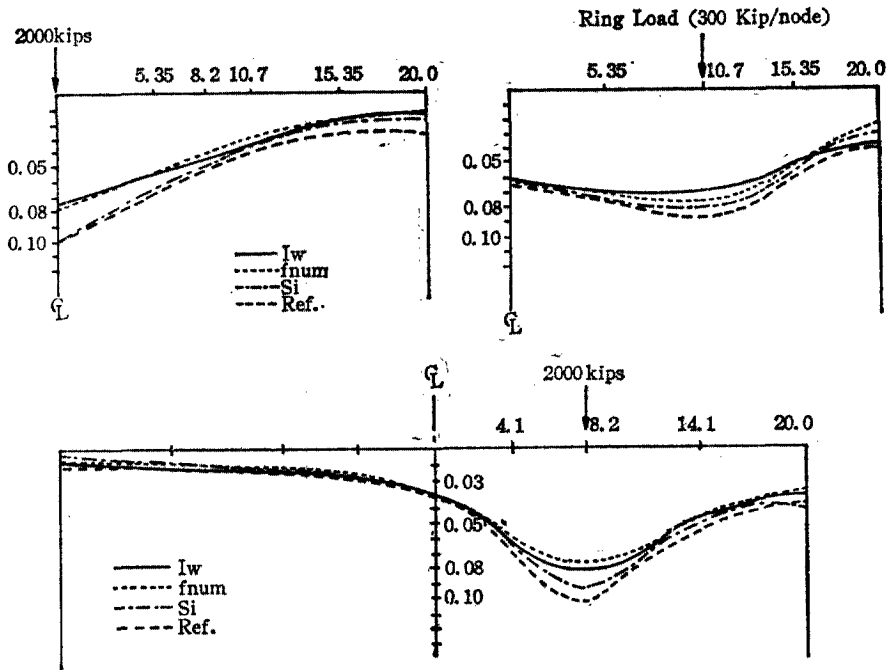


그림 11. Disp. of circular mat

荷重이 작용할 때, 偏心된 한 點에 集中荷重이 작용할 때와 圓環荷重이 작용할 때에 여러가지 영향 계수를 이용했을 때의 “Bou”의 처짐이 그림 11에 나타나 있는 바 I_w 및 f_{num} 에 대한 값이 S_i 에 대한 값보다 다소 작은 것을 지적할 수 있겠다.

V. 結 論

(가) 彈性地盤上的 板구조물에 對한 解析을 Winkler 地盤 및 Boussinesq 地盤모델을 通하여서 8-Node Isoparametric 要素를 使用한 有限要素法으로 푸는 理論體系를 發展시키고 電算프로그램 MATK를 補完하여서 NMAT를 만들었다.

(나) 地盤에서의 節點力의 影響領域의 數值的인 自動配分方法을 提示하고, 機何學的인 配分方法 및 既發表된 影響係數 I_w, α, s_i 를 利用한 方法과 比較를 하고, 그 結果 既存의 解析方法보다도 더 效果的인 結果를 알 수 있었다.

(다) 이제까지 發表된 論文은 두 모델의 理論體系에 對해서 論했거나 Winkler 地盤에 대한 電算解만을 發表하였으나 여기서는 Boussinesq 地盤에 대한 電算解를 밝혔으며, 後者에서 컴퓨터 記憶容量의

過多로 因해서 解析의 어려움이 있을 때 $k = \frac{E_s}{6.4(1-\nu_s^2)}$ 值를 前者에 人力하여 本 프로그램을 代置해서 利用할 수도 있다.

(라) 要素數를 變化시켜도 中心線上的 沈下量이 같았으며 圓形基礎와 같이 形狀이 바뀌어도 適切한 解를 얻었으나, 같은 形態의 地盤이라도 흙의 特性을 나타내는 地盤反力係數 및 彈性係數의 選擇이 모델화 및 解析方法에 못지 않게 重要함으로 適切한 係數의 使用이 要求된다.

參 考 文 獻

- (1) 金聲得, 地盤-基礎-構造 相互影響의 모델化에 關한 研究, 蔚山大 研究論文集, 第14卷 1號, pp.99~112(1983).
- (2) A. P. S. Selvadurai, Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, pp.13--21, Elsevier Scientific Publishing Co. (1979).
- (3) B. Goschy, Soil-Foundation-Structure Interaction, ASCE, ST5, pp.749--761(1978).
- (4) Y. K. Cheung and O. C. Zienkiewicz, Plates and Tanks on Elastic Foundations, Int. J.

- Solids Structures, Vol. 4, pp. 451—461(1965).
- (5) 崔暢根, 有限要素法講座, 大韓土木學會論文集, 第24卷 第2號, pp. 27—32(1976).
- (6) 金聲得, 有限要素法에 의한 全面基礎의 解析, 釜山大 大學院論文集(1981).
- (7) E. Hinton and D. R. J. Owen, Finite Element Programming, Academic Press(1977).
- (8) J. E. Bowlds, Foundation Analysis and Design, 2nd ed., Ch. 5, 9, 10, McGraw Hill (1974).
- (9) 趙顯榮, 彈性地盤에 놓인 板-보 繫의 有限要素法에 의한 解板, 釜大 構造研究室(1981).
- (10) 嚴采永, 地盤과 構造物間의 相互作用을 고려한 暗渠解析에 관한 研究, 東亞大 工學博士 學位論文(1982).
- (11) A. Banerjee and Z. D. Jankov, Circular Mats under Arbitrary Loading, ASCE, ST10, pp. 2133—2145(1975).
- (12) W. Weaver, Computer Programs for Structural Analysis, pp. 8—47, Van Nostrand Co., (1967).
- (13) O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw Hill(1977).
- (14) 崔癸弼, 土木材料 試驗法과 解說 및 應用, 螢雪出版社, pp. 486—510(1982).
- (15) H. F. Winterkorn and H.-Y. Fang, Foundation Engineering Handbook, V. N. B. Co., pp. 516—518, p. 567(1975).
- (16) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd ed., pp. 259—281, McGraw-Hill(1981).
- (17) I. K. Lee and P. T. Brown, Structure-Foundation Interaction Analysis, ASCE ST 11, pp. 2413—2431(1972).
- (18) R. Bolton, Stresses in Circular Plates on Elastic Foundations, ASCE, EM3, pp. 629—640(1972).