

구형셸-노즐부의 응력해석

朱 永 祐
기계공학과

〈요 약〉

얇고 두께가 일정한 구형셸의 노즐 접착부의 응력해석을 하였다. 구형셸-노즐부의 근사해를 구하여서 다른 연구자가 발표한 실험치 및 이론치와 비교하였다. 비교결과 본 논문의 결과는 실험치와 잘 일치하였으며, 타 이론식보다 유용하다는 결론을 얻었다.

Stress Analysis of Spherical Shell-Nozzle Juncture

Young Woo Ju
Dept. of Mechanical Engineering

〈Abstrat〉

Stress Analysis of thin, constant-thickness, spherical shell-nozzle juncture was performed. Approximate solution was derived and compared with the experimeneal results and theory of other investigators. The comparison shows good agreement with experimental result. It is concluded that the method derived in this paper is feasible for stress analysis of the spherical shell-nozzle juncture.

I. 서 론

구형셸 또는 원통셸에 노즐이 접속 되었을 경우에 대한 이론적 연구는 Galletly^(1,2), Bijlaard^(3,4) 등에 의하여 많이 연구되었다.

근년에 와서도 Witt, Gwantney, Maxwell 및 Holland⁽⁵⁾는 오오크리지 국립연구소에서 계산치와 실험치의 모든 값이 일치하지는 않으나 최대응력치는 대체로 일치하는 결과를 보였다. 최근에 金天旭⁽⁶⁾은 노즐의 지름이 구형셸의 지름의 $\frac{1}{3}$ 을 넘지 않는다고 생각하여 근사해를 구해서 실험치와 비교한 논문을 발표했다.

본 연구에서는 Timoshenko⁽⁷⁾에 의해서 소개된 근사방법의 해를 사용하여 다른 연구자들의 결과와 비교하였다.

II. 구형셸의 이론

얇은 구형셸의 선형이론에 의하면 최대칭하중을 받는 구형셸의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d^2 Q_\phi}{d\phi^2} + \cot\phi \frac{dQ_\phi}{d\phi} - (\cot^2\phi - \nu)Q_\phi = EhV \quad (1)$$

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} + \cot\phi \frac{dV}{d\phi} - (\cot^2\phi + \nu)Q_\phi = -\frac{a^2 Q_\phi}{D} \quad (2)$$

여기에 새로운 변수

$$Q_\phi = \frac{Q_1}{\sqrt{\sin\phi}}, \quad V = \frac{V_1}{\sqrt{\sin\phi}}$$

를 도입하여 식 (1)과 (2)에 대입하고, 좌변에서 Q_1 과 V_1 을 포함하는 항은 Q_1 과 V_1 의 2차도함수 항에 비교하여 작아서 무시하면 다음 식 (3)을 얻게 되며

$$\frac{d^2 Q_1}{d\phi^2} = EhV_1 \quad (3-a)$$

$$\frac{d^2 V_1}{d\phi^2} = -\frac{a^2}{D} Q_1 \quad (3-b)$$

식 (3)에서 한 변수를 소거하면

$$\frac{d^4 Q_1}{d\phi^4} - 4\lambda^4 Q_1 = 0 \quad (4)$$

를 얻는다. (7)

여기서 $\lambda^4 = 3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2$ 이다.

식 (4)의 일반해는 식 (5)와 같으며

$$Q_1 = c_1 e^{\lambda\phi} \cos\lambda\phi - c_2 e^{\lambda\phi} \sin\lambda\phi - C_3 e^{-\lambda\phi} \cos\lambda\phi + c_4 e^{-\lambda\phi} \sin\lambda\phi \quad (5)$$

식 (5)에서 $e^{\lambda\phi}$ 를 포함하고 있는 항은 ϕ 가 증가하면 증가하고, $e^{-\lambda\phi}$ 를 포함하는 항은 감소한다.

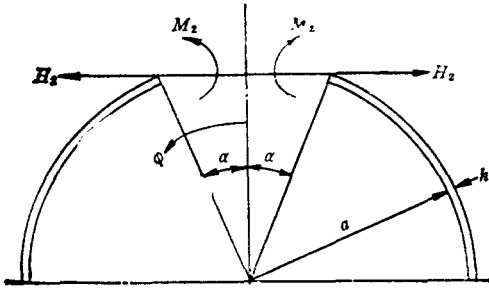


Fig. 1 Geometry of Spherical Shell with Opening and Edge Forces

Fig. 1과 같이 단부에 작용하는 하중의 영향은 단부에서 멀어짐에 따라 감소하여야 한다.

그러므로 우리가 구하는 해는 $e^{-\lambda\phi}$ 를 포함하는 항이 되어야 한다.

따라서 식 (5)는 다음 식 (6)과 같이

$$Q_1 = C_3 e^{-\lambda\phi} \cos\lambda\phi + c_4 e^{-\lambda\phi} \sin\lambda\phi \quad (6)$$

로 된다.

식 (6)으로부터 Q_ϕ 를 구하면

$$Q_\phi = \frac{1}{\sqrt{\sin\phi}} e^{-\lambda\phi} (C_3 \cos\lambda\phi + C_4 \sin\lambda\phi) \quad (7)$$

로 표시되며, 식 (7)을 사용하여, 그 밖의 양들을 구하면

$$N_\phi = -\cot\phi \frac{e^{-\lambda\phi}}{\sqrt{\sin\phi}} \{C_3 \cos\lambda\phi + C_4 \sin\lambda\phi\} \quad (9-a)$$

$$N_\theta = \frac{\lambda}{2} \frac{e^{-\lambda\phi}}{\sqrt{\sin\phi}} \left[C_3 \{ (k_1 + k_2) \cos\lambda\phi + 2 \sin\lambda\phi \} + C_4 \{ (k_1 + k_2) \sin\lambda\phi - 2 \cos\lambda\phi \} \right] \quad (9-b)$$

$$V = \frac{2}{Eh} \frac{\lambda^2 e^{-\lambda\phi}}{\sqrt{\sin\phi}} \{ C_3 \sin\lambda\phi - C_4 \cos\lambda\phi \} \quad (9-c)$$

$$M_\phi = \frac{a}{2\lambda} \frac{e^{-\lambda\phi}}{\sqrt{\sin\phi}} \left[C_3 \{ k_1 \sin\lambda\phi - \cos\lambda\phi \} - C_4 \{ k_1 \cos\lambda\phi - \sin\lambda\phi \} \right] \quad (9-d)$$

$$M_\theta = \frac{a}{4\nu\lambda} \frac{e^{-\lambda\phi}}{\sqrt{\sin\phi}} \left[C_3 \{ (1+\nu^2) (k_1 - k_2) - 2k_2 \} \sin\lambda\phi - 2\nu^2 \cos\lambda\phi \right] - C_4 \{ (1+\nu^2) (k_1 + k_2) - 2k_2 \} \cos\lambda\phi + 2\nu^2 \sin\lambda\phi \} \quad (9-e)$$

$$\delta = \frac{a \sin\phi}{Eh} \frac{\lambda e^{-\lambda\phi}}{\sqrt{\sin\phi}} \left[C_3 \{ k_2 \cos\lambda\phi + \sin\lambda\phi \} - C_4 \{ k_2 \sin\lambda\phi - \cos\lambda\phi \} \right] \quad (9-f)$$

로 되며, 여기서

$$k_1 = 1 - \frac{1-2\nu}{2\lambda} \cot\phi, \quad k_2 = 1 + \frac{1+2\nu}{2\lambda} \cot\phi$$

이다.

Fig. 1과 같이 변하증을 받을 경우의 단부 α 에서의 경계조건은

$$(M_\phi)_{\phi=\alpha} = M_\alpha \quad (10-a)$$

$$(N_\phi)_{\phi=\alpha} = -H_\alpha \cos\alpha \quad (10-b)$$

이며, 식 (10)을 다음과 같이 Matrix로 표시할 수 있으며

$$\begin{bmatrix} H_\alpha \\ M_\alpha \end{bmatrix} = [T_\alpha] \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서

$$[T_\alpha] = \frac{e^{-\lambda\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sin\alpha} \cos\lambda\alpha, & \frac{1}{\sin\alpha} \sin\lambda\alpha \\ \frac{a}{2\lambda} (k_1 \sin\lambda\alpha - \cos\lambda\alpha), & -\frac{a}{2\lambda} (k_1 \cos\lambda\alpha + \sin\lambda\alpha) \end{bmatrix}$$

이다.

단부에서 변하증에 의한 회전각 V_α 와 수평방향 변위 δ_α 는 다음과 같이

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ \delta_\alpha \end{bmatrix} = [T_\beta] \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

로 표시할 수 있으며, 식 (11)에서 C_3, C_4 를 변하증으로 구하여 식 (12)에 대입하면 단부에서 V_α 와 δ_α 는

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ \delta_\alpha \end{bmatrix} = [T_\beta] [T_\alpha]^{-1} \begin{bmatrix} H_\alpha \\ M_\alpha \end{bmatrix} \quad (13)$$

과 같이 변하증으로 표시된다.

여기서

$$[T_\beta] = \frac{\lambda}{Eh} \frac{e^{-\lambda\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}}$$

$$\begin{bmatrix} 2\lambda \sin \alpha & -2\lambda \cos \alpha \\ a \sin \alpha (k_2 \cos \alpha + \sin \alpha) & a \sin \alpha (k_2 \sin \alpha - \cos \alpha) \end{bmatrix} [T_\beta] [T_\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{E h k_1} & \frac{4\lambda^3}{E h a k_1} \\ \frac{a \lambda \sin^2 \alpha}{E h} \left(k_2 + \frac{1}{k_1} \right) & \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{E h k_1} \end{bmatrix}$$

이다.

III. 셸-노즐부의 해석

내압 P 를 받는 경우의 구형셸의 단부에서 회전각 V_s^β 와 수평변위 δ_s^β 는 각각

$$V_s^\beta = 0 \tag{14-a}$$

$$\delta_s^\beta = \frac{p a^2}{2 E h_s} (1 - \nu) \sin \alpha \tag{14-b}$$

로 주어지며, 원통셸은

$$V_c^\beta = 0 \tag{15-a}$$

$$\delta_c^\beta = \frac{P R_c^2}{2 E h_c} (2 - \nu) \tag{15-b}$$

로 주어진다.

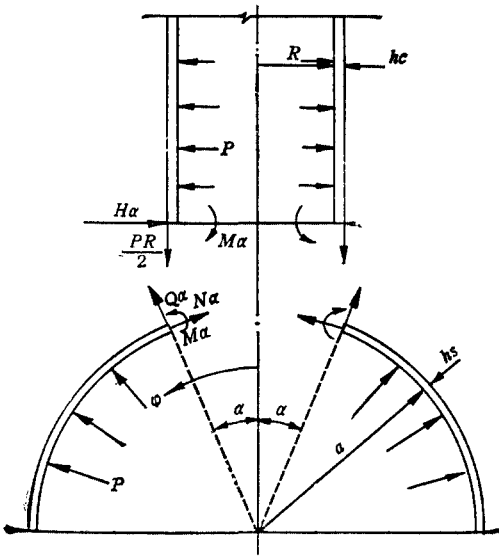


Fig. 2 Load State of Spherical Shell-Nozzle Juncture

구형셸-노즐부의 접속부의 자유물체도는 Fig. 2와 같다.

Fig. 2에서 접속부에 노즐길이 방향으로 $\frac{PR}{2}$ 이 변하중과 압력에 의해 더 부가된 상태가 된다. 이 부가된 힘을 Fig. 3과 같이 분해할 수 있으며 따라서

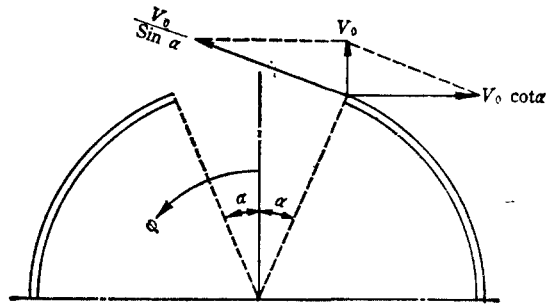


Fig. 3 Spherical Shell Subjected to Vertical Load

구형셸의 단부에서 수평력 H_2 는 노즐단부의 수평력 H_α 와는

$$H_\alpha = H_2 - \frac{PR}{2} \cot \alpha \tag{16}$$

관계를 갖게 된다.

원통셸단부에서 변하중 H_α 와 M_α 에 의한 회전각 V_c^α 와 수평변위 δ_c^α 는

$$\delta_c^\alpha = -\frac{1}{2\beta^2 D_c} H_\alpha + \frac{1}{2\beta^2 D_c} M_\alpha \tag{17-a}$$

$$V_c^\alpha = \frac{1}{2\beta^2 D_c} H_\alpha - \frac{1}{\beta D_c} M_\alpha \tag{17-b}$$

로 주어지며

여기서 $D_c = \frac{E_c h_c^3}{12(1-\nu^2)}$ 이며 E_c 는 원통셸의 영률이다.

접속부의 기하학적 연속을 유지하기 위하여

$$V_c = V_s \tag{17-a}$$

$$\delta_c = \delta_s \tag{18-b}$$

로 되어야 한다.

그런데 V_s 와 δ_s 는 원통셸의 단부에서 압력과 변하중에 의한 회전각과 수평변위이므로

$$V_c = V_c^\beta + V_c^\alpha \tag{19-a}$$

$$\delta_c = \delta_c^\beta + \delta_c^\alpha \tag{19-b}$$

로 표시되며 V_s 와 δ_s 는 구형셸의 단부에서 압력과 변하중에 의한 회전각과 수평변위이므로

$$V_s = V_s^\beta + V_s^\alpha \tag{20-a}$$

$$\delta_s = \delta_s^\beta + \delta_s^\alpha \tag{20-b}$$

로 표시된다.

식 (19)와 (20)을 식 (18)에 대입하면

$$-\frac{1}{2\beta^2 D_c} \frac{PR}{2} \cot \alpha = \left(\frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{E h} \frac{1}{k_1} - \frac{1}{2\beta^2 D_c} \right) H_\alpha + \left(\frac{4\lambda^3}{E h a k_1} + \frac{1}{\beta D_c} \right) M_\alpha \tag{21-a}$$

$$\begin{aligned} & \frac{PR^2}{2E_c h_c} (2-\nu) - \frac{Pa^2}{2Eh_s} (1-\nu) \sin\alpha \\ & = \left\{ \frac{a\lambda}{Eh_s} \sin^2\alpha \left(k_2 + \frac{1}{k_1} \right) + \frac{1}{2\beta^3 D_c} \right\} H_\alpha \\ & + \left(\frac{2\lambda^2}{Ehk_1} \sin\alpha - \frac{1}{2\beta^2 D_c} \right) M_\alpha \\ & + \frac{1}{2\beta^3 D_c} \frac{PR}{2} \cot\alpha \end{aligned} \quad (21-b)$$

식 (21)을 얻게 된다.

식 (21)에서 H_α 와 M_α 를 구할 수 있다.

구형셸에서의 응력은

$$\rho_\theta = \frac{M_\theta}{h} \pm \frac{6M_\theta}{h^2} + \frac{pa}{2h} \quad (22-a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{M_\theta}{h} \pm \frac{6M_\theta}{h^2} + \frac{pa}{2h} \quad (22-b)$$

로 주어지며, +는 안쪽, -는 바깥쪽 응력을 구할 때 사용된다.

원통셸에서의 응력은

$$\sigma_t(x) = \frac{EW(x)}{R} \pm 6\nu \frac{M(x)}{h_c^2} \pm \frac{PR}{h_c} \quad (23-a)$$

$$\sigma_r(x) = \pm \frac{6M(x)}{h_c^2} + \frac{PR}{2h_c} \quad (23-b)$$

로 주어지며, 여기서 $W(x)$ 와 $M(x)$ 는

$$W(x) = -\frac{H_\alpha}{2\beta^3 D_c} f_1(\beta x) + \frac{M_\alpha}{2\beta^2 D_c} f_2(\beta x)$$

$$M(x) = -\frac{H_\alpha}{\beta} f_4(\beta x) + M_\alpha f_3(\beta x)$$

$$f_1(\beta x) = e^{-\beta x} \cos \beta x$$

$$f_2(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$$

$$f_3(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$$f_4(\beta x) = e^{-\beta x} \sin \beta x$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h_c^2}}$$

이다.

구형셸 단면부에 Fig.3과 같이 노즐길이 방향으로 외력이 작용할 때 膜이론으로부터

$$N_\theta^m = -N_\theta^m = \frac{V_0 \sin \alpha}{\sin^2 \phi} \quad (24)$$

즉 얻는다.

III. 수치 예

수치예로는 문헌 (5)의 실험치와 문헌 (6)의 이론치를 비교하기 위해 동일한 형상과 외력의 경우를 계산하였다.

Fig.4에서 용기의 단면도를 보여주고 있으며, 용기재료의 $E=30 \times 10^6 \text{psi}$, $\nu=0.3$ 으로 하였다.

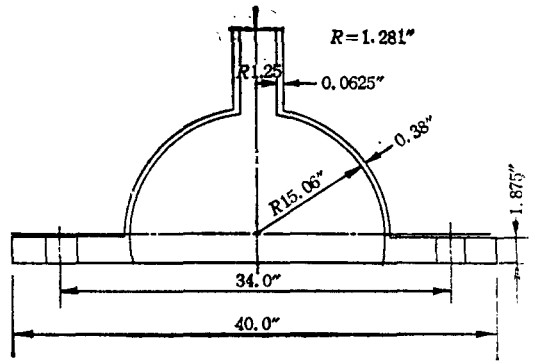


Fig. 4 Sectional View of Spherical Shell-Nozzle

내압 $p=200 \text{psi}$ 를 받을 때의 응력분포를 Fig.5에 나타냈으며, 문헌 (5)와 문헌 (6)의 결과를 같이 표시하였다.

구형셸에서 감쇠각도⁽⁸⁾는 $\phi_c = \frac{180}{\lambda} (\text{deg.})$ 이고,

원통셸에서는 감쇠길이 $L_c = \frac{\pi}{\beta}$ (in)이므로, 수치예에서 ϕ_c 와 L_c 를 계산하면, $\phi_c = 22.15^\circ$, $L_c = 0.6912 \text{in}$ 이다.

따라서 구형셸은 단부에서 22° , 원통셸은 단부에서 0.7in 멀어지면 단부의 영향은 무시할 수 있게 된다. 그러므로 Fig.5에서 구형셸은 28° 까지, 원통셸은 2.5in 까지 표시하였다.

V. 결과분석

Fig.5에서 이론치와 실험치가 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

그러나 구형셸의 부응력에서 본 논문의 결과는 실험치와 같은 경향을 보여 주지만 문헌 (6)은 상반된 결과가 나타났다. 이것은 접속부의 수직응력을 고려하지 않은 것 같다.

감쇠각도 ϕ_c 와 감쇠길이 L_c 를 경과한 후에는 변화중 영향이 거의 무시할 수 있음을 알 수 있다.

응력최대치는 노즐부에 생겼으며 최대응력집중계수는 약 10을 나타내었다.

VI. 결론

구형셸에 노즐을 접속시킨 압력용기의 응력해석을 Intersection Method에 의하여 해석할 수 있었다.

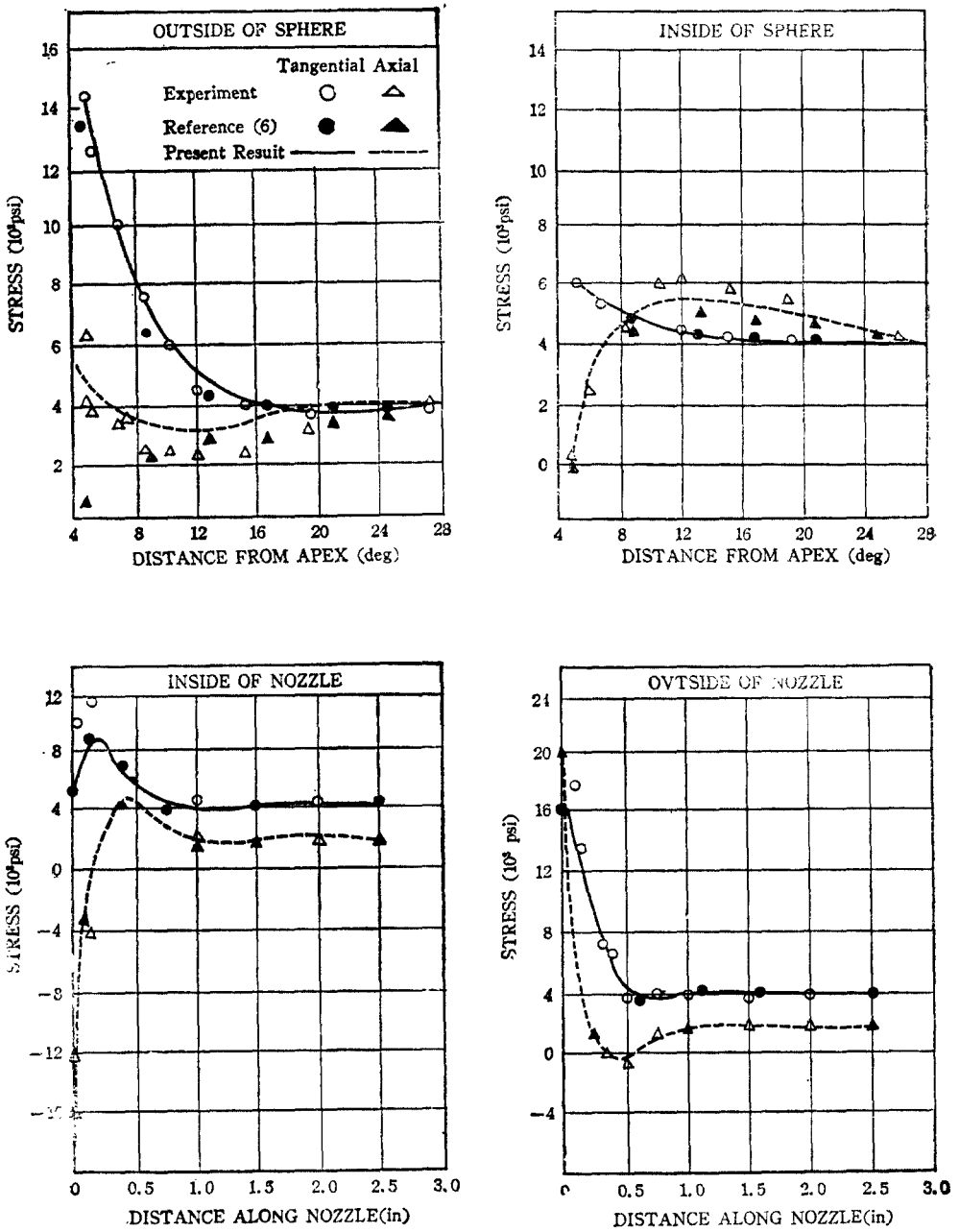


Fig. 5 Stress Distributions

본 논문의 근사해는 정확하며, 사용하기에 편리하고, 구형셀-노즐 접속부의 응력해석에 직접 이용할 수 있다.

〈사 사〉

본 논문을 지도하여 주신 연세대학교 金天旭 교수께 감사 드린다.

참고 문헌

1. Galletly, G.D., "Influence Coefficients for Hemispherical Shells with Small Openings at the Vertx", J. of Applied Mplied Mechanics, Vol.22, Trans. ASME, Vol.77, Series E, pp. 20~24. (1955)
2. Galletly. G.D., "Influence Coefficents for Open-Crown Hemispheres", Trans. ASME, Series B, Vol.82, 1950, pp.73-81. (1960)
3. Bijlaard P.P., "Computation of Stresses from Local Loads in Spherical Pressure Vessels or Pressure Vessel Heads", Welding Research Council Bulletin No.34, (1957)
4. Bijlaard, P.P., "Stresses in a Spherical Shells from Radial or Moment Loadings", Welding Journal, Vol.36, Research Supplement, pp.240s-243s, (1957)
5. Witt, F.J., Gwaltney, R.C., Maxwell, R. L., and Holland, R.W., Comparison of Theoretical and Experimental Results from Sphe rical Shells with a Single Radially Attached Nozzle", J. of Engineering for Power, Trans ASME, Series A. Vol.89, 1967, pp.333-340. 6. pp.108-115. (1976)
6. 全天旭, "壓力容器 노즐부의 應力解析" 大韓機械가學會誌 第十六卷二號, 1976, pp.108-115
7. Timoshenbo, S., Theory of Plates and Shells. 2nd ed., McGraw-Hill, pp.540-560. (1959)
8. Harry Kraus, Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, pp.131-134. (1967)