UOU Report Vol. 16. No. 2. pp. 181~184. 1985 연구논문집 제16권 제 2 호 pp. 181~184. 1985

정기검사 예방정비 모형

공 명 복
산 업 공 학 과
(1985. 4. 29 접수)

〈요 약〉

본 논문은 체계의 고장이 시간에 대하여 연속적으로 누적되는 체계의 상태에 의존하여 발생하는 경우 정기검사에 의한 예방정비모형을 제시하고 있다. 체계의 사용연한이 무한한 경우 재생이론을 적용함으로써 단위사용시간당 평균비용을 최소화하는 최적교체수준을 구하였다.

A Periodic Inspection Preventive Maintenance Model

Gong, Moung-Bock
Dept. of I.E.
(Received April 29, 1985)

〈**Abstract**〉

This paper deals with a periodic inspection preventive maintenance model for the systems whose failures are dependent only on their states accumulated continuously in time. The optimal replacement level which minimizes the expected cost per unit time for an infinite time span is obtained by the applications of Renewal Theory.

I. 서 론

사용 중인 체계의 고장은 대부분의 경우 큰 비용의 부과를 초래하든지 인명에 위험을 끼친다. 사용중 발생하는 고장을 줄이기 위해서 체계를 잘 설계하든지 아니면 사용시에 이를 잘 운용해야 한다. 따라서 체계를 잘 운용하기 위한 방편으로써 정비문제가 중요하게 되었다.

지난 25년동안 고장이 확률적으로 발생하는 체계에 대한 정비정책모형이 계속적으로 연구되었고 대부분의 정비모형은 체계가 취할 수 있는 상태를 두개의 상태인 정상과 고장으로 구분하여 체계의 고장이 시간에 대하여 확률적으로 표시되는 경우, 시간을 결정변수로 하는 것이었다. 그러나 실제로 많은 체계들은 두 개의 상태 뿐만 아니라 여러 중간 상태를 가질 수 있으며 고장은 시간이 경과함에 따라 확률적으로 변화하는 이들 상태에 의존해서 나타난다.

Klein[5]은 체계의 상태가 유한한 상태의 Markov chain으로 표시되고 검사에 의해서만 체계의 상태를 알 수 있을 때 최적정비정책에 대하여 연구했다. Luss[6]는 체계의 상태가 유한한 상태의 Markov process를 이루며 검사에 의해서만 체계의 상태를 알 수 있을 때 최적정비를 연구했다. 이밖에도 체계의 상태를 유한한 상태의 Semi-Markov process로 하는 경우 등은 (4)에 잘 정리되어 있다. 체계의 상태를 시간에 따라 이산적으로 발생하는 충격의 누적으로 보는 Shock model을 생각하고 최적정비정책을 구하는 문제는 Taylor[8], Nakagawa[7], Feldman[3], Bergman[2], Abdel-Hameed and Shimi[1] 등이 연구했으며 Zuckerman[9]은 검사비용도 고려해서 연구했다.

본 논문에서는 시간에 따라 연속적으로 변화하는

체계의 상태를 생각하고 검사비용도 고려해서 최적 정비정책을 구하고 있다.

Ⅱ. 기호 및 가정

사용된 기호와 가정은 다음과 같다.

〈기 호〉

K: 사용도중 고장으로 인하여 부과되는 비용

C: 체계를 교체하는데 들어가는 비용

C_i: 체계를 검사하는데 들어가는 비용

b: 고장수준

r: 교체수준 ($0 \leq r \leq b$)

r^*: 최적교체수준

$X(t)$: 시간이 t만큼 경과했을 때 체계의 상태를 나타내는 확률변수

$T(x)$: 체계의 상태가 x가 되기까지 요하는 시간을 나타내는 확률변수

$G^{(t)}(x)$: $X(t)$의 분포함수, 단 t가 자연수일 때 $G(x)$의 t^{th} Stieltjes convolution을 의미한다.

$F_x(t)$: $T(x)$의 분포함수

$g^{(t)}(x)$: $\dfrac{d}{dx}G^{(t)}(x)$

$f_x(t)$: $\dfrac{d}{dt}F_x(t)$

C_r: 체계가 사용 후 고장을 일으키지 않고 예방교체되는 경우, 한 Cycle 동안 부과되는 비용.

C_b: 체계가 사용 후 고장으로 교체되는 경우, 한 Cycle 동안 부과되는 비용.

T_r: 체계가 고장을 일으키지 않고 예방교체될 때까지 요하는 시간.

T_b: 체계가 고장으로 교체될 때까지 요하는 시간.

$C(r) = \dfrac{E[C_r + C_b]}{E[T_r + T_b]}$: 단위사용시간당 평균비용.

〈가 정〉

① $K \geqslant C_i$(등호는 $K=0$ 때 성립) : $K + C < C_i + C$이면 체계가 사용된 후 검사기간 중에 교체하는 것이 사용도중 고장을 일으켜서 교체되는 것보다 더 비경제적이므로 검사정책이 의미를 가지려면 $K + C > C_i + C$여야 한다. 즉 $K > C_i (K \neq 0)$여야 한다.

② 체계의 상태는 Stationary independent increment이다.

③ 사용도중 고장이 발생하면 다음 검사시점에서 교체한다.

④ 검사 및 교체에 소요되는 시간은 무시한다.

⑤ 새로운 체계의 상태는 0이다.

Ⅲ. 모형화 및 최적교체수준 r^*

새로운 체계의 사용 후 이 체계가 교체될 때까지의 한 Cycle을 생각하자. 체계의 교체는 두 가지 경우로써 일어날 수 있다. 첫째로, 체계가 고장을 일으키지 않았지만 예방정비의 수단으로 교체되는 경우와 둘째로, 사용도중 고장을 일으킴으로써 교체되는 경우이다.

우선 한 Cycle 동안 부과되는 비용을 구해 보자. 만일 체계가 사용도중 고장을 일으키기 전에 정기적으로 행하는 검사기간 중에 교체된다면 즉, 첫번째 정기검사 기간중에 관측된 체계의 상태가 r과 b 사이에 있든지 $j(j=1,2,3,\cdots)$번째 정기검사기간중에 관측된 체계의 상태가 r에도 미치지 못했으나 $j+1$번째 정기검사기간중에 관측된 상태가 r과 b 사이에 있다면 이때 부과되는 기대비용을 구하면 다음과 같다.

$$E[C_r] = (C_i + C)\{G(b) - G(r)\} + C_i \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) \int_0^r \{G(b-u) - G(r-u)\} dG^{(j)}(u) + C \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^r \{G(b-u) - G(r-u)\} dG^{(j)}(u) \quad (1)$$

만일 체계가 정기적으로 행하는 검사전에 사용도중 고장을 일으켜 교체된다면, 즉 체계가 첫번째 정기검사를 받기 전에 사용도중 체계의 상태가 b를 넘어 가든지 $j(j=1,2,3,\cdots)$번째 정기검사기간중에 관측된 상태는 r에도 미치지 못했으나 $j+1$번째 정기검사를 받기 전에 체계의 상태가 b를 넘어간다면 이때 부과되는 기대비용을 구하면 다음과 같다.

$$E[C_b] = (C+K)\{1 - G(b)\} + C_i \sum_{j=1}^{\infty} j \int_0^r \{1 - G(b-u)\} dG^{(j)}(u) + (C+K) \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^r \{1 - G(b-u)\} dG^{(j)}(u) \quad (2)$$

한편 재생이론에서 재생함수 $M(r)$과 분포함수 $G(r)$ 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$M(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G^{(j)}(r) \quad (3)$$

이때 재생방정식에서

$$G(r) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^r \{1 - G(r-u)\} dG^{(j)}(u) \quad (4)$$

또한

$$M(r) = \sum_{j=1}^{\infty} j \int_0^r \{1 - G(r-u)\} dG^{(j)}(u) \quad (5)$$

따라서 식 (1)과 식 (2)에서 식 (3), 식 (4), 식 (5)를 이용하면

$$E[C_r+C_b]=E[C_r]+E[C_b]$$
$$=KM(r)-(K-C_i)\int_0^r G(b-u)dM(u)$$
$$-(K-C_i)G(b)+(C+K) \qquad (6)$$

다음으로 한 Cycle의 평균시간을 구해 보자. 체계가 고장을 일으키기 전에 정기적으로 행하는 검사기간중에 교체되는 평균교체시간을 구하면 다음과 같다.

$$E[T_r]=\{G(b)-G(r)\}$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty} j\int_0^r \{G(b-u)-G(r-u)\}dG^{(j)}(u)$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^r \{G(b-u)-G(r-u)\}dG^{(j)}(u) \quad (7)$$

체계가 정기적으로 행하는 검사를 받기 전에 사용도중 고장을 일으키는 경우 평균교체시간을 구하면 다음과 같다.

$$E[T_b]=\{1-G(b)\}+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^r \{1-G(b-u)\}dG^{(j)}(u)$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty} j\int_0^r \{1-G(b-u)\}dG^{(j)}(u) \qquad (8)$$

식 (7)과 식 (8)에서 식 (3), 식 (4), 식 (5)의 관계식을 이용하면 한 Cycle의 평균시간은 다음과 같다.

$$E[T_r+T_b]=E[T_r]+E[T_b]=1+M(r) \quad (9)$$

따라서 단위사용시간당 평균비용 $C(r)$은 다음과 같이 주어진다.

$$C(r)=\frac{KM(r)-(K-C_i)\int_0^r G(b-u)dM(u)-(K-C_i)G(b)+(C+K)}{1+M(r)} \qquad (10)$$

식 (10)은 r에 대한 함수이며 특히 $r=0$인 경우는 체계가 사용된 후 첫번 정기검사기간중에 무조건 교체하는 것이며 이때 부과되는 비용은 식 (10)에 $r=0$을 대입하면

$$C(0)=-(K-C_i)G(b)+(C+K) \qquad (11)$$

$r=b$인 경우는 체계가 사용된 후 정기적으로 검사를 계속하며 고장을 일으킨 경우 교체하는 것이며 이때의 비용은 마찬가지로 식 (10)에 $r=b$를 대입하면

$$C(b)=\frac{C_iM(b)+(C+K)}{1+M(b)} \qquad (12)$$

이제 식 (10)을 최소화하는 $r^*(0\leq r^*\leq b)$를 구하기 위하여 식 (10)에서 $\frac{d}{dr}C(r)$을 구하고 이를 0으로 하면 다음을 얻는다.

$$\{K-(K-C_i)G(b-r)\}\{1+M(r)\}$$
$$-\{KM(r)-(K-C_i)\int_0^r G(b-u)dM(u)$$
$$-(K-C_i)G(b)+(C+K)\}=0 \qquad (13)$$

식 (13)에서 r에 대한 식을 등호의 오른쪽으로 이항하면

$$(K-C_i)G(b)-C=(K-C_i)\{M(r)G(b-r)$$
$$+G(b-r)-\int_0^r G(b-r)dM(u)\} \qquad (14)$$

식 (14)에서 등호의 오른쪽은 r에 대한 연속함수이고 이를 미분하면 $(C_i-K)g(b-r)+(C_i-K)M(r)g(b-r)$이므로 항상 음이다. 따라서 식 (14)의 오른쪽은 단조감소함수이다.

한편 식 (14)의 오른쪽은 r의 0과 b에 대한 극한치가 $(K-C_i)G(b)$와 $-(K-C_i)(M(b)-G(b))$이므로 식 (14)의 왼쪽과 비교하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

① $(K-C_i)M(b)>C$, $K>0$, $C>0$인 경우, 식 (14)를 만족하는 r^*는 $(0, b)$에 오직 한개 존재하면, 이때 단위사용시간당 평균비용은 식 (10)으로부터 다음과 같다.

$$C(r^*)=K-(K-C_i)G(b-r^*) \qquad (15)$$

② $(K-C_i)M(b)=C$, $K>0$, $C>0$인 경우, 식 (14)를 만족하는 $r^*=b$가 되고 이때 단위사용시간당 평균비용은 식 (12)와 같다.

③ $(K-C_i)M(b)<C$, $K<0$, $C>0$인 경우는 식 (14)를 만족하는 r^*는 존재하지 않지만 식 (13)의 왼쪽은 항상 음이 되어 $\frac{d}{dr}C(r)<0$이 되고 따라서 $r^*=b$가 되고 이때 비용은 식 (12)과 같다.

④ $K=0$, $C>0$인 경우 ③과 같다.

⑤ $K>0$, $C=0$인 경우는 식 (14)를 만족하는 $r^*=0$이 되고 이때의 비용은 식 (11)과 같다.

Ⅳ. 예 제

어떤 체계의 상태는 시간에 따라 연속적으로 변화하며 위험수준은 5mm이다. 실험에 의한 자료분석 결과, t년이 경과했을 때 체계의 상태분포는 Parameter $\alpha=2t$, $\beta=1$인 Gamma 분포를 이룬다는 것을 알았다. 이때 체계를 1년마다 검사하는 경우 최적교체수준을 구하여라. 단, 체계를 새로운 것으로 교체하는데 10만원이 들어가고 만약 사용도중 고장을 일으켜서 교체되는 경우는 100만원이 추가로 부과된다. 체계의 검사비용은 1만원이다.

〈풀이 과정〉

t 년 동안의 체계의 상태가 Parameter $\alpha=2t$, $\beta=1$인 Gamma 분포를 이루므로 1년 동안의 체계의 상태는 Parameter $\alpha=2$, $\beta=1$인 Gamma 분포이다. 따라서 $g(r)=re^{-r}$

$$G(r)=-(r+1)e^{-r}+1$$

$$M(r)=\frac{r}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2r}$$

$$G(b-r)=-(b-r+1)e^{(r-b)}+1$$

$$\int_0^r G(b-u)dM(u)=\frac{1}{2}\Big\{-(b-r+2)e^{(r-b)} -(b-r)e^{(r-b)}+\frac{1}{2}e^{-2r} +2(b+1)e^{-b}+r-\frac{1}{2}\Big\}$$

우선 $M(5)=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\times 5}=2.25$

따라서

$$M(5)` \ \frac{10만}{100만-1만}$$

식 (14)에 위에서의 $G(r)$, $M(r)$, $G(b-r)$, $\int_0^r G(b-u)dM(u)$, $b=5$, $K=100$만, $C=10$만, $C_i=1$만을 대입하고 이를 만족하는 r^*를 구하면 $r^*=2.6064$ mm, 이때 단위사용시간당 평균비용은 식 (15)로부터 $C(2.6064)=31.6738$만원이다.

Ⅴ. 결 론

지금까지 연구된 체계의 상태를 결정변수로 하는 정비모형은 체계의 상태를 유한하다고 가정하였거나 무한한 경우도 체계의 상태변화가 시간에 대하여 이산적으로 나타나는 경우였다. 그러나 본 논문에서는 체계의 상태가 시간에 대하여 연속적으로 변화하는 경우 체계를 정기적으로 검사하여 예방정비의 기준으로 사용하는 모형을 제시하고 있다. 만일 체계의 상태로써 재고수준을 사용하는 경우 본 모형은 재고문제에도 적용될 수 있다. 그러나 검사시간 간격을 해석적으로 구하지 못했으며 이것은 앞으로 계속 연구해야 할 과제이다.

References

(1) Abdel-Hameed, M. and Shimi, I.N., "Optimal replacement of damaged devices," J. Appl. Prob., 15, 153—161(1978).

(2) Bergman, B., "Optimal replacement under a general failure model," Adv. Appl. Prob., 10, 431—451(1978).

(3) Feldman, R.M., "Optimal replacement with semi-Markov shock models," J. Appl. Prob., 13, 108—117(1976).

(4) Gertsbakh, I.B., Models of Preventive Maintenance, North-Holland, Amsterdam (1978).

(5) Klein, M., "Inspection-maintenance-replacement scheudules under Markovian deterioration," Management Sci., 101, 185—190(1962).

(6) Luss, H., "Maintenance policies when deterioration can be observed by inspections," Operat. Res., 24, 359—366(1976).

(7) Nakagawa, T., "On a replacement problems for a cumulative damage model," Opl. Res. Q., 27, 895—900(1976).

(8) Taylor, H.M., "Optimal replacement under additive damage and other failure models," Nav. Res. Log. Q., 22, 1—18(1975).

(9) Zuckerman, D., "Inspection and replacement policies," J. Appl. Prob., 17, 168—177 (1980).