UIT Report Vol. 11, No. 2, pp. 311~316, 1980 연구논문집 제11권 제2호 pp. 311~316, 1980

撓角法에 의한 建物構造 解析用 프로그램 開發에 관하여

김 진 근
건 축 학 과
(1980. 6. 10 접수)

〈要 約〉

本 論文의 主目的은 건축 구조물 해석을 위한 경제적인 컴퓨터프로그램을 개발하는데 있다. 이러한 경제적인 프로그램이란 해석하고자하는 구조물의 특징을 살린 해석법을 적용함으로써 얻을 수 있다.

撓角法은 건축구조물의 특징을 잘 나타내고 있다. 이 방법에 의한 프로그램은 건축구조 설계에서 만족할 만큼 정확도를 지니면서 多目的用 대형 프로그램보다 매우 경제적이다.

A Study on the Development of the Structural Analysis Program based on the Slope Deflection Method

Kim, Jin Keun
Dept. of Architecture
(Received June 10, 1980)

〈**Abstract**〉

The main objective of this report is to develop a more economical computer program for the structural analysis of buildings. It is necessary to develop a computer program by the analysis method utilising the characteristics of the structural system of buildings. The slope deflection method very well expresses these characteristics.

While maintaining the required accuracy for design purpose, the program by this method can analyse building structures more economically than the general purpose, finite element method.

I. 序 言

컴퓨터의 活用 範圍의 확대에 對한 硏究가 여러 分野에서 成果를 거두고 있지만, 建築分野에서도 많은 成果가 있으며, 또한 더욱 發展될 可能性이 많은 分野이다.

最近에 와서 大型컴퓨터뿐만 아니라 小型컴퓨터의 開發이 눈부시게 發展하여 小規模의 設計事務所 등에도 이러한 小型컴퓨터의 구입및 그 活用이 크게 나타나고 있다. 이러한 結果로 小型컴퓨터의 容量에 적합한 특징있는 구조물 해석용의 특별프로그램 開發이 건축구조 분야에서 크게 요망되고 있는 實情이다.

勿論 SAP Ⅳ, STRUDL 등의 多目的(General Purpose) 프로그램도 建築構造分野에서 필요하나, 이러한 프로그램은 많은 수의 요소(Element)가 필요하며, 따라서 入力데이타의 준비가 번거로울 뿐만 아니라 필요이상의 未知數가 포함되기 때문에 결과적으로 비경제적인 프로그램이 될 수도 있다. 또한 이러한 프로그램은 대부분의 事務所에서 소유하고 있는 小型컴퓨터로는 해결이 不可能한 것이다. 따라서 建物構造의 特性, 즉 建物은 주로 수직部材 및 수평部材만으로 이루어져 있으며, 部材의 軸變位는 굽變位에 비하여 무시할 수 있을 정도로 구조물에 영향을 적게 준다는 特性을 活用한 프로그램은 建物構造 解析에는 매우 경제적일 수 있다. 이 경우 프로그램은 규칙적 形態의 건물구조해석에 국한되

며, 보다 자유스런 형태의 건물구조해석에는 심한 제한을 받게되는 단점이 있으나, 大部分의 건축물은 규칙적인 경우가 많으며, 매우 비규칙적이고, 정밀도를 요하는 구조물이라면 다목적용 프로그램을 이용하면 좋을 것이다.

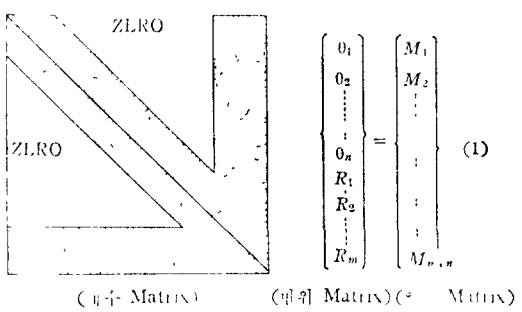
특히 이 글에서는 建築構造의 特性을 잘 活用하고 있는 構造解析法인 Slope Deflection Method의 性質을 도입한 Matrix Analysis에 의한 경제적인 프로그램을 만드는 것이 그 目的이다.

Ⅱ. Slope Deflection Method의 特性

이 구조해석법의 특징은 部材의 軸方向 變形은 무시되고 있으며, 節點角變位와 Side Sway에 의한 각 층의 橫方向變位만을 고려하고 있다는 點이다.

이러한 特性은 건축 구조물에서는 잘 부합되고 있음을 알 수 있다. 왜냐하면 모든 건축 구조물은 대개 바닥판(Slab)을 갖고 있으므로 보(Beam)의 軸變形은 이 바닥판의 강도를 고려하면 무시해도 좋을 강도이며, 기둥의 軸變形은 그 수직하중, 부재길이및 단면적에 좌우되는데, 보통 기둥 設計를 할 때 設計 斷面積은 수직하중에 비례하게 되고, 기둥의 길이는 각층에서 동일하므로 기둥의 축변위는 동일하게 됨으로서 그 軸變位를 무시할 수 있기 때문이다.

그래서 이 方法에 의한 變位 未知數는 각 節點의 회전각과 각 층의 Side Sway에 의한 部材회전각을 未知數로 한다. 즉 이러한 未知數를 포함하는 節點方程式(Joint Equations)과 층방정식(Shear Equations)으로 이루어지는 連立方程式을 解析함으로써 해결이 된다.



〈그림 1〉

이 連立方程式을 Matrix형식으로 나타내어보면 〈그림 1〉과 같다.

이 連立方程式의 계수 Matrix는 Matrix Analysis Method의 강도매트릭스 (Stiffness Matrix)와 類似한 형태를 갖는다. 즉, Stiffness Matrix의 특징인 (1)대칭성 (Symmetric) (2)대각선상의 항이 양(+) (Positive Definite) (3)벤드형(Banded)중 (1), (2)의 특징이 이 경우에도 나타나며, 미지수를 적당히 배열함으로써* (3)의 특징도 나타낼 수 있다.

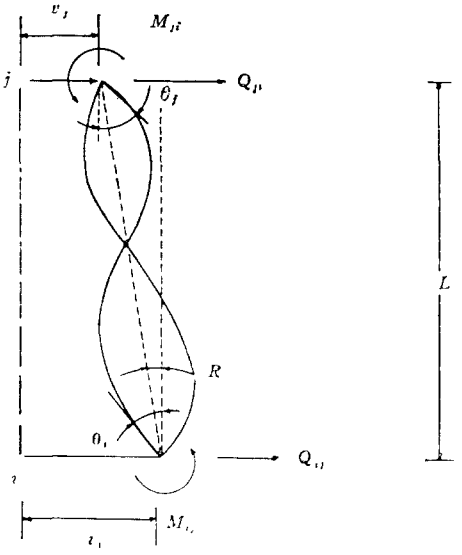
위에서 언급한 이러한 特徵, 즉 (1)未知數를 節點 회전각과 Side-Sway(부재회전각) 만으로 되며, (2) Matrix Analysis Method를 이용할 수 있다는 特徵을 살리면, 더 적은 未知數를 Matrix 방법에 의해 해결함으로써 건축구조물에 적합한 해석이 가능함을 알 수 있다.

Ⅲ. 계수 Matrix의 유도
—Matrix Analysis에 있어서 강도 메트릭스 (Stiffness Matrix)의 구성—

1. 각 부재의 Matrix계산

1) 撓角法(Slope Deflection Method)에 의해

(ㄱ) 기둥(Column)



〈그림 2〉

*다음의 Ⅳ. 계수 Matrix의 조립 참조.

軸方向 변위를 무시하면 〈그림 2〉에서 보는 바와 같이 기둥 부재의 요각방정식은 횡방향 변위 v_i 및 v_j, 즉 부재 회전 변위 R과 절점변위 θ_i및 θ_j로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} M_{ij}&=M_{Fij}+\frac{2EI}{L}(2\theta_i+\theta_j-3R)\\ M_{ji}&=M_{Fji}+\frac{2EI}{L}(2\theta_j+\theta_i-3R)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

단 $R=(v_i-v_j)/L$

여기서 다시 $R=(v_i-v_j)/L$을 式 (2)에 대입하여 정리하면

$$\left.\begin{aligned} M_{ij}&=\frac{4EI}{L}\theta_i+\frac{2EI}{L}\theta_j-\frac{6EI}{L^2}v_i\\ &\quad+\frac{6EI}{L^2}v_j+M_{Fij}\\ M_{ji}&=\frac{2EI}{L}\theta_i+\frac{4EI}{L}\theta_j-\frac{6EI}{L^2}v_i+\frac{6EI}{L^2}v_j\\ &\quad+M_{Fji}\\ Q_{ij}&=-(M_{ij}+M_{ji})/L+Q_{Fij}\\ &=-\frac{6EI}{L^2}\theta_i-\frac{6EI}{L^2}\theta_j+\frac{12EI}{L^3}v_i\\ &\quad-\frac{12EI}{L^3}v_j-\frac{M_{Fij}+M_{Fji}}{L}+Q_{Fij}\\ Q_{ji}&=(M_{ij}+M_{ji})/L+Q_{Fji}\\ &=\frac{6EI}{L^2}\theta_i+\frac{6EI}{L^2}\theta_j-\frac{12EI}{L^3}v_i+\frac{12EI}{L^3}v_j\\ &\quad+\frac{M_{Fij}+M_{Fji}}{L}+Q_{Fji}\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

단 M_{Fij}: 절점 i에서의 고정단 모멘트

M_{Fji}: 절점 j에서의 고정단 모멘트

Q_{Fij}: 절점 i에서의 고정단 전단력

Q_{Fji}: 절점 j에서의 고정단 전단력

을 얻는다. 위에서 유도된(3)式의 하중항을 이항하여 Matrix 형식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3}\\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\\ \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_i\\ v_i\\ \theta_j\\ v_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}M_i\\ Q_i\\ M_j\\ Q_j\end{Bmatrix}\cdots\cdots(4)$$

(ㄴ) 보(Beam)

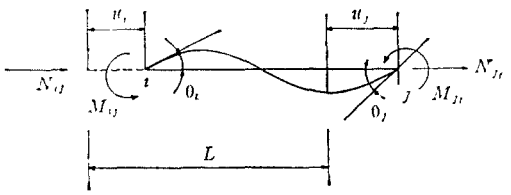
보에 있어서는 보의 軸方向 變形을 무시하므로 양 절점의 軸方向 變位, 즉 〈그림 3〉의 v_i와 v_j의 값이 동일하게 된다. 또한 기둥의 軸方向 變位가 동일하게 가정됨으로써 u_i와 u_j도 동일하게 된다.

그래서 보의 요각방정식은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} M_{ij}&=M_{Fij}+\frac{2EI}{L}(2\theta_i+\theta_j)\\ M_{ji}&=M_{Fji}+\frac{2EI}{L}(2\theta_j+\theta_i)\\ N_{ij}&=\frac{EA}{L}u_i-\frac{EA}{L}u_j=0\\ N_{ji}&=\frac{EA}{L}u_j-\frac{EA}{L}u_i=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

式 (5)를 기둥에서와 같이 Matrix형식으로 나타내면 다음과 같다.

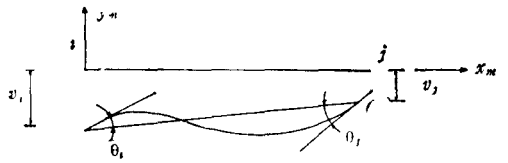
$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_i\\ u_i\\ \theta_j\\ u_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}M_i\\ N_i\\ M_j\\ N_j\end{Bmatrix}\cdots(6)$$



〈그림 3〉

2) 메트릭스 해석법(Matrix Analysis Method)에 의해 軸變位를 무시하면, 평면 Frame의 Element에 대한 방정식을 Matrix로 나타내면 다음과 같다.

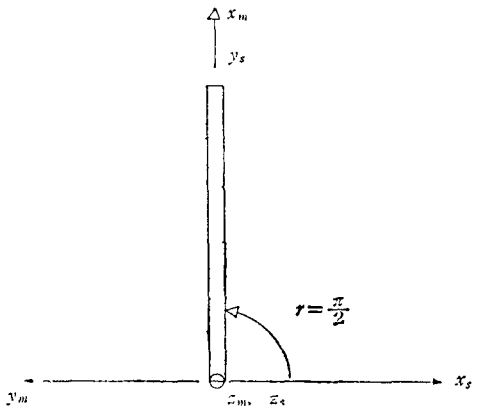
$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}\\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3}\\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}\\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_i\\ v_i\\ \theta_j\\ v_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}M_i\\ Q_i\\ M_j\\ Q_j\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$



〈그림 4〉

(ㄱ) 기둥(Column)

기둥의 국지좌표(Local Coordinate)와 전체건물 좌표(Global Coordinate)와의 관계는 다음 그림과 같다.



〈그림 5〉

*여기서 x_m, y_m은 부재의 좌표즉 Local Coordinate를 나타내고 x_s, y_s는 구조물의 좌표 즉 Global Coordinate를 나타낸다.

기둥부재의 변환메트릭스 (Rotation Matrix)는

$$R=\begin{bmatrix}\cos(z_s,z_m), & \cos(z_s,y_m)\\ \cos(x_s,z_m), & \cos(x_s,y_m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 0 , & \cos\frac{\pi}{2}\\ \cos\frac{\pi}{2}, & \cos\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1, & 0\\ 0 , & -1\end{bmatrix} \quad (8)$$

그러므로 Global Coordinate에 관한 Stiffness Matrix는

$$K=R^T\cdot\bar{K}\cdot R$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L}&\frac{6EI}{L^2}&\frac{2EI}{L}&-\frac{6EI}{L^2}\\ \frac{6EI}{L^2}&\frac{12EI}{L^3}&\frac{6EI}{L^2}&-\frac{12EI}{L^3}\\ \frac{2EI}{L}&\frac{6EI}{L^2}&\frac{4EI}{L}&-\frac{6EI}{L^2}\\ -\frac{6EI}{L^2}&-\frac{12EI}{L^3}&-\frac{6EI}{L^2}&\frac{12EI}{L^3}\end{bmatrix}$$

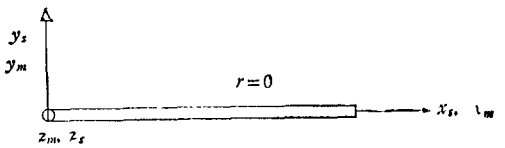
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L}&-\frac{6EI}{L^2}&\frac{2EI}{L}&\frac{6EI}{L^2}\\ -\frac{6EI}{L^2}&\frac{12EI}{L^3}&-\frac{6EI}{L^2}&-\frac{12EI}{L^3}\\ \frac{2EI}{L}&-\frac{6EI}{L^2}&\frac{4EI}{L}&\frac{6EI}{L^2}\\ \frac{6EI}{L^2}&-\frac{12EI}{L^3}&+\frac{6EI}{L^2}&\frac{12EI}{L^3}\end{bmatrix} \quad (9)$$

(ㄴ) 보(Beam)

기둥에서와 같은 방법으로 구해보면,

$$R=\begin{bmatrix}\cos(z_s,z_m), & \cos(z_s,y_m)\\ \cos(x_s,z_m), & \cos(x_s,y_m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 0, & \cos\frac{\pi}{2}\\ \cos\frac{\pi}{2}, & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & 0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (10)$$



〈그림 6〉

전체구조에 대한 Stiffness Matrix를 구하면

$$K=R^T\cdot\bar{K}\cdot R$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L}&\frac{6EI}{L^2}&\frac{2EI}{L}&-\frac{6EI}{L^2}\\ \frac{6EI}{L^2}&\frac{12EI}{L^3}&\frac{6EI}{L^2}&-\frac{12EI}{L^3}\\ \frac{2EI}{L}&\frac{6EI}{L^2}&\frac{4EI}{L}&-\frac{6EI}{L^2}\\ -\frac{6EI}{L^2}&-\frac{12EI}{L^3}&-\frac{6EI}{L^2}&\frac{12EI}{L^3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L}&0&\frac{2EI}{L}&0\\ 0&0&0&0\\ \frac{2EI}{L}&0&\frac{4EI}{L}&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (11)$$

위에서 式 (4)의 계수 Matrix와 式(9), 式(6)의 계수 Matrix와 式(11)을 비교하여 보면 동일함을 알 수 있다.

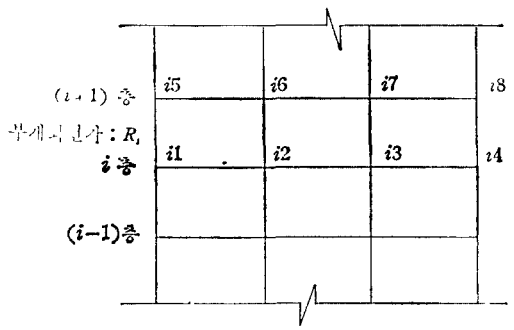
결론적으로 말해, 요각법의 요각방정식의 계수

Matrix를 이용함으로써 Matrix 해석법의 강도 Matrix를 축변환하는 번거러움이 없이 직접 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Ⅳ. 계수 Matrix의 조합

Ⅲ장에서 유도된 계수 Matrix를 전체 계수 Matrix로 조합해야 한다.

만약 변위 Vector를 式(1)에서 보는 바와 같이 배열하면 계수 Matrix는 式(1)에서와 같이 된다. 이 계수 Matrix를 그대로 콤퓨터 Core에 저장하면 큰 Core가 필요로 하게 된다. 그래서 이 Matrix를 밴드형(Banded)화하여, 작은 Core로서도 저장 가능케해야 한다. 그러기 위해서는 변위 Vector를 적당히 배열할 필요가 있다.

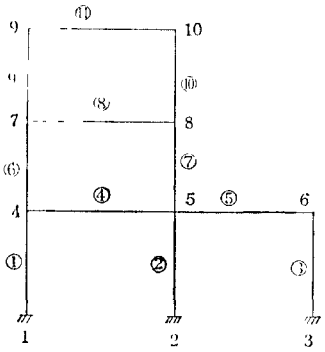


〈그림 7〉

〈그림 7〉에서 보는 바와 같이 i층과 $(i+1)$층 사이 기둥 부재의 부재회전각 R_i는 節點 $i1$에서 $i8$까지의 변위의 항으로 나타난다. 그래서 이 R_i의 항을 θ_{i4}와 θ_{i5}사이에 배열함으로써 가장 작은 Band Width를 갖게 할 수 있다.

Ⅲ장에서 언급한 Matrix Analysis 방법을 택함으로써 미지수의 항을 부재회전각 R대신 x방향 미지수로 대치시킨 수 있다.

〈그림 8〉을 예로 들면, Matrix Analysis 방법에 의해 계수 Matrix를 조합하면, 支點조건을 고려하더라도 14개의 미지수가 생길 것이다. 그러나 여기서 절점 9와 절점 10의 x방향 변위가 동일하며, 절점 7과 절점8, 절점 4와 절점 5및 절점 6의 x방향 변위가 각각 동일하므로 하나의 미지수로 할 수 있다. 이렇게 함으로서 총 미지수수는 절점회전각 미지수 7개와 x방향 변위 미지수 3개, 즉 각층마다 1개씩 하여 모두 10개이다.



〈그림 8〉 實例 구조물

그리고 Band Width를 줄이기 위해서, 절점 9와 절점 10의 x방향 변위 미지수항을 절점 8의 절점회전각 미지수 항과 절점 9의 절점회전각 미지수 항 사이에 배열함으로써 얻을 수 있으며, 절점 7과 8의 x방향 미지수 항, 절점 4, 5및 6의 x방향 미지수 항도 같은 방법을 택함으로써 Band Width를 줄일 수 있게 된다.

이렇게 함으로써 〈그림 8〉의 구조물의 계수 Matrix를 Matrix Analysis의 Stiffness Matrix 의 3가지 특징을 갖는 (10×10) Matrix를 얻을 수 있다.

Ⅴ. 部材力의 계산

앞 章에서 유도된 계수 Matrix는 言及된 바와 같이 Matrix Analysis의 강도 Matrix의 특징을 그대로 유지되고 있다.

따라서 解는 일반적으로 Matrix Analysis 방법에 의해 구할 수 있다. 즉 가우스소거법 (Gauss Elimination)이나 초레스키방법(cholesky's square root method)에 의해 최종적인 변위 벡터를 구할 수 있다.

일단 모든 변위가 구해지면, 요각방정식에 의해 쉽게 각 部材의 단부 Moment를 구할 수 있으며, 端部 Moment가 구해지면, 기둥에 있어서는 (아래서 위로 Numbering했을 경우)

$$Q_{ij}=Q_{Fij}+\frac{M_{ij}+M_{ji}}{L}$$

$$Q_{ji}=Q_{Fji}-\frac{M_{ij}+M_{ji}}{L}$$

보에 있어서는(왼쪽에서 오른쪽으로 Numbering 했

은 경우)

$$Q_{ij}=Q_{Fij}-\frac{M_{ij}+M_{ji}}{L}$$

$$Q_{ji}=Q_{Fji}+\frac{M_{ij}+M_{ji}}{L}$$

에 의해 구할 수 있으며, 軸力은 각각 部材들이 직교하고 있다는 性質을 이용하여 최상층의 임의의 절점에서 보의 전단력의 합은 바로 그 절점에 연결된 기둥의 수직하중이 되며, 그다음 층 기둥의 수직하중은 위에서 구한 수직하중에 그 층의 전단력의 합을 구함으로써 얻을 수 있다. 이렇게 계속함으로써 모든 축력을 구할 수 있게 된다.

Ⅵ. 結 論

앞에서 言及한 바와 같이 최근에는 소형 콤퓨터의 개발이 눈부시게 발달되고 있다. 따라서 이러한 콤퓨터의 용량에 적합한 프로그램의 개발이 요망되고 있다. 이에 부합하기 위해서는 해석하고자 하는 구조물의 특징을 이용한 특수프로그램 개발이 필요하다. 특히 건축 구조물은 여러가지 특징을 갖고 있다. 이러한 많은 특징을 고려함으로써 더욱 유용한 프로그램을 만들 수 있을 것이다.

여기서는 건축 구조물의 몇가지 특징을 살린 요각법의 성질을 이용한 프로그램 개발에 관한 것이었다.

그러나 건물이 초고층화됨에 따라 구조System이 달라지고 있으며, 그에 따라 그 구조적 특성 또한 많아지고 있다. 앞으로는 이러한 많은 특성을 고려한 특수 프로그램 개발에 관심이 집중될 것으로 보인다.

참 고 문 헌

1. William Weaver, Jr., Computer Program for Structural Analysis, D. Van Nostrand Co. (1967)
2. Chu-Kia Wang, Statically Indeterminate Structures, McGRAW-HILL (1953)
3. 洪性穆, 李鍵, 建築工學分野의 콤퓨터活用, 서울대학교 工科大學
4. 崔暢根, 고층건물의 입체적 구조해석을 위한 경제적인 콤퓨터 프로그램의 개발에 관한 연구, 과학기술처(1976).
5. KIST, KISTRAS 사용법(Version 3), KIST 전산개발센타(1978).
6. 李禹翰, FORTRAN Ⅳ 프로그래밍, 동명사(1974).