경영학연구논문집 제5권 제1호 pp. 17~32, 울산대학교.
Journal of Mangement Vol 5, No. 1, pp 17~32, 1998
University of Ulsan

수치 해석 기법을 이용한 국내 전환사채의 유통시장 분석
- C언어를 이용한 알고리즘 구현 -

조 희연
경영대학 경영학부

<요 약>

전환사채는 주식으로 전환할 수 있는 권리를 갖는 채권으로 채권의 안정성과 주식의 수익성을 겸비한 증권이다. 본 연구에서는 전환사채에 대한 유통시장의 문제점을 검토하기 위하여 McConnell과 Schwartz의 모형 (1986)을 기반으로 국내 전환사채의 가치를 평가할 수 있는 모형을 개발하고 C언어를 이용하여 그 알고리즘을 구현하였다. 또한 이 모형을 이용하여 국내 유통시장에서 거래된 전환사채들의 가치를 평가하고 유통시장의 특성을 분석하였다

Analysis of Convertible Bond Market Using Numerical Methods

He Youn Cho
Professor of Management Information Systems

<Abstract>

The convertible bond is a hybrid security which, while retaining most of the characteristics of straight bond, offers, in addition, the upside potential associated with the underlying common stock. This paper extends the work of McConnell and Schwartz (1986) to the pricing of convertible bonds. The differential equation and boundary conditions governing the value of the bond are derived, and an algorithm is presented for solving the differential equation Also, this paper analyzes the convertible bond market using the valuation model.

I. 서 론

전환사채는 일반적인 채권의 특성을 갖는 동시에 추가적으로 주식으로 전환할 수 있는 권리가 주어지는 합성증권이다 따라서, 주가 하락시에는 채권의 특성을 가지게 되어 가치 하락 위험으로부터 방어되지만 주가 상승시에는 주식으로 전환되어 주가 상승에 대한 이익을 향유할 수 있다 전환사채 발행은 주식시장의 상황에 따라서 민감한데 그 이유는 주식시장이 활황이면 투자가는 주가 상승으로 인한 전환사채의 기대수익률이 증가하므로 투자를 늘이고, 발행기업은 전환사채의 수요증가에 따라 낮은 금리로 자금을 조달할 수 있기 때문이다 국내 전환사채 시장은 발행시장을 중심으로 발전하여 왔으나 유통시장의 미비로 인하여 활성화되고 있지 못한 실정이다.

전환사채는 일반 채권에 전환권인 옵션이 내재되어 있는 구조이므로 채권의 가격결정 모형과 옵션 가격결정 모형을 이용하면 가격산정이 가능하고 실무에서도 이러한 방법이 종종 이용된다 그러나 이러한 가격 결정방식은 전환사채의 전환권이외의 다른 특성들을 간과하게 되는 문제점을 갖는다 즉 전환사채에는 전환권이외에 전환 금지기간이나, 이산적으로 지급되는 이자, 수의 상환조항(Call provisions), 풋 조항 등 가격결정에 영향을 주는 여러 요인들이 포함되어 있어 단순한 옵션 가격결정 이론만으로는 그 가치를 구할 수 없다 이에 따라, Brennan과 Schwartz (1977)는 Morton의 Callable Warrant에 대한 가격결정 공식을 확장하여 전환사채의 가격을 결정할 수 있는 편 미분 방정식을 유도하고 이에 대한 수치 해석적 해를 구하였다 Brennan과 Schwartz (1977)의 방식은 해석적 해(Analytic solution)대신에 수치 해석적 해를 추구함으로써 다음과 같은 현실적 문제들을 고려할 수 있다. 첫째로, 이산적으로 기급되는 전환사채의 이자를 고려할 수 있다 둘째로, 이산적으로 발생하는 보통주에 대한 배당문제를 고려할 수 있다. 셋째로, 일정 기간동안 전환을 금지하는 전환금지기간 문제를 고려할 수 있다. 넷째로, 전환사채 발행기업의 수의 상환 조항이나 투자가의 풋 조항 등을 쉽게 고려할 수 있다.

반면에 Ingersoll (1977)은 이론적 측면에서 전환사채의 특성을 분석하였는 바, 그는 Morton (1974)의 옵션평가 모형을 이용하여 몇 가지 특수한 경우에 있어서 전환사채에 대한 해석적 해를 유도하였다 즉 그는 수의상환이 가능한 무이자 전환사채와 수의상환 조항이 없는 전환 연금사채 (Console bond)에 대한 해석적 해를 유도하였다 그의 분석은 전환사채의 제반 특성을 이해하는 데는 도움을 주지만 실제 시장에서 거래되는 전환사채의 가격결정에는 유용하지 못하다 왜냐하면, 실제 거래되고 있는 대부분의 전환사채는 다양한 조건들이 내재되어 있어 그의 방법으로는 이에 대한 해석적 해를 구할 수가 없기 때문이다 그후, Brennan과 Schwartz (1980)는 기존의 연구에서 상수항으로 고려하였던 무위험 이자율을 또 하나의 확률변수로 취급하여 전환사채의 가치가 두 확률변수에 의존하는 평가 모형을 제시하였다. 연구결과, 기업가치와 이자율이 동시에 변화하는 모형은 모형적으로 복잡성만 증가될 뿐 정확성 측면에서는 한 개의 상태변수 모형과 별 차이가 발생되지 않았다. Brennan과 Schwartz 모형 (1977, 1980)의 문제점은 중요한 확률변수인 기업가치를 측정하기 어렵다는 것이다. 즉, 이론적으로 볼 때 전환사채의 가치가 기업의 가치에 의존한다는 가정은 적절하고 또한 발행기업이 파산하는 경우도 가격결정에 포함시킬 수 있는 장점이 있지만 현실적 측면에서 볼 때 기업가치는 측정상의 어려움이 있다 이러한 Brennan 과 Schwartz 모형의 단점을 극복하기 위해, McConnell과 Schwartz (1986)는 기

업가치 대신에 그 기업의 주가를 상태 변수로 하여 전환사채에 대한 가격결정 모형을 유도하였다. 그들은 Merrill Lynch White Weld Capital Markets Groups에 의해서 1985년에 개발된 LYON (Liquid Yield Option Note)이라는 전환사채의 가격 결정 모형을 주가를 상태 변수로 하여 유도하였다. 그들은 실증분석을 통하여 그들 모형의 이론적 가격이 실제 거래가격과 거의 일치함을 보임으로써 그들 모형의 타당성을 입증하였다. 그후, 다양한 조건부 청구권 (Contingent claims)에 대한 가격결정 모형이 개발되었는데 이러한 모형들은 전환사채의 가격결정에도 사용될 수 있다. 특히 Two-jump process 모형이나 Three-jump process 모형 등 다수의 격자 (Lattice) 모형들이 개발되었는데 이들을 이용한 전환사채의 평가도 가능하다 (Boyle, 1988; Cho and Lee, 1996 등). 국내의 경우에는 이상빈과 손규현 (1989)이 수치 해석적 기법을 이용하여 국내 전환사채의 발행시장을 분석하였다.

본 연구에서는 McConnell과 Schwartz (1986)의 전환사채 가격결정 모형을 국내 전환사채의 특성을 고려할 수 있도록 개선하여 국내 전환사채 평가 모형을 구성하고 이를 이용하여 국내 전환사채의 유통시장을 분석하고자 한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다 II장에서는 국내 전환사채의 가격을 구하는 알고리즘을 유도하고 또한 이 알고리즘을 C언어를 이용하여 구현한다. III장에서는 II장의 알고리즘을 이용하여 국내 전환사채의 유통시장에 대한 실증적 분석을 실시하고 IV장에서는 본 연구의 결론을 제시한다.

II. 국내 전환사채 가격결정 알고리즘의 개발

국내 전환사채는 1963년에 쌍용양회가 표면이자율 연 10%, 만기 6년이라는 조건으로 발행한 것이 최초로 80년대의 주식시장 활황에 힘입어 활성화되기 시작하였다 그후, 90년대의 주식시장 침체로 전환사채 시장도 위축되었으나 최근의 금융시장 개방과 자유화로 인하여 활성화가 예상된다. 국내 전환사채의 발행조건은 아직까지도 단순한 형태로 외국에서는 일반화된 수의상환 조건이나, 풋 조항 등이 포함되어 있지 않다. 그러나, 국내 전환사채의 경우 다음과 같은 몇 가지 특징으로 인하여 가격결정을 어렵게 한다. 첫째는, 전환사채권자가 전환하고자 할 때 전환을 청구한 후 실물을 받기까지 최단 20일에서 최장 50일이 소요되므로 그 동안의 주가 변동위험을 회피할 수 없다는 점이다. 둘째는 전환사채권자가 만기시까지 전환권을 행사하지 않을 경우 낮은 전환사채의 금리를 보전해 주기 위해 일정한 수익률에 근거하여 원금의 일정비율을 추가로 상환하는 만기 보장 수익률 제도이다. 셋째는 발행후 일정 기간동안 전환을 금지하는 전환 금지기간의 설정이다. 본 장에서는 McConnell과 Schwartz (1985)의 모형에 근간을 두고 국내 전환사채의 특징중 만기보장 수익률과 전환금지 기간의 특징을 포함하는 국내 전환사채의 평가 모형을 구성한다. 본 연구에서는 전환사채의 가격결정 모형을 유도하기 위하여 다음과 같은 5가지 가정을 한다.

첫째, 시간에 따른 전환사채의 가치는 하나의 확률변수인 주식가격에 의존한다. 즉, t 시점에서의 전환사채의 가치는 $W(S,\ t)$의 형태를 갖으며 주식가격에 대해서는 2차 미분 가능하며 시간에 대해서는 1차 미분 가능한 함수이다.

둘째로, 이자율의 기간구조는 수평이고 확정적이다. 현실적으로 이자율은 변화하고 기간구조도 수평의 형태가 아니므로 이러한 가정은 전환사채의 가격을 왜곡하게 한다. 특히 전

환사채에 콜 조항이나 풋 조항이 있는 경우에는 이들 조항의 가치가 이자율 변동에 많은 영향을 받기 때문에 왜곡현상이 심화될 수 있다 그러나 현재 국내 전환사채의 경우 수의상환 조항이나 풋 조항이 없고 또한 Brennan과 Schwartz (1980) 의 연구결과 이자율을 확정적으로 가정한 모형과 확률적으로 가정한 모형사이에 전환사채의 가격차이가 작기 때문에 현실적으로 이자율의 확정적 가정을 사용해도 별 무리가 없다

셋째로, 주식가격 (S)은 일정한 분산 (σ)을 갖는 Markov Diffusion Process를 따른다고 가정한다 즉

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

여기서 dz 는 standard wiener process이고 μ는 단위 시간당 주가의 기대수익률, σ는 단위 기간당 주가수익률의 표준편차를 나타낸다

넷째로, 완전자본 시장을 이루며, 모든 투자가는 비용 없이 모든 정보에 접근 가능하다.

다섯째, 투자가는 최적 전환전략 (Optimal Conversion Strategy)을 따른다 최적 전환전략이란 투자가가 각 시점에서 전환사채의 가치를 극대화시키는 전략으로 전환사채의 가치가 전환가치보다 작게 되자마자 전환하는 것이 최적 전환전략이 된다 (Brennan과 Schwartz, 1977, Ingersoll, 1977). 그러나 네 번째와 다섯 번째 가정은 국내 전환사채 시장과는 거리가 있는 가정들이다. 국내 전환사채 시장의 경우 거래의 유동성이 낮고 거래정보의 획득이 용이하지 않을 뿐만 아니라 전환 신청 후 실물의 인도까지 상당한 기간이 소요되므로 이 기간동안 주가 변동 위험을 갖게 되기 때문에 최적 전환 전략을 추구하기가 어렵다 그러나 이러한 가정들은 국내 전환사채 시장의 거래가 활성화되어 유동성이 증가하고 제도개선으로 실물 인도기간을 줄이면 적합한 가정이 될 것이다.

2.1 가격결정 공식의 유도

위의 가정에서 전환사채는 시간과 주식가격의 함수이며 주식가격에 대해서는 2차 미분 가능하며 시간에 대해서는 1차 미분 가능한 함수이므로 ITO'S Lemma를 적용시키면 다음의 식을 유도할 수 있다

$$dW = [\mu S W_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 W_{ss} + W_t]dt + \sigma S W_s dz \tag{1}$$

여기서, $W =$ 전환사채의 가격,

$$W_s = \frac{\partial W}{\partial S},\ W_{ss} = \frac{\partial^2 W}{\partial S^2},\ W_t = \frac{\partial W}{\partial t},$$

$S =$ 주가, $t =$ 시점.

또한 식 (1)과 전환사채와 무위험 자산으로 구성되는 Hedged Portfolio의 개념을 이용하면 다음과 같은 전환사채 가격에 대한 편 미분 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 W_{ss} + rSW_s + W_t - rW = 0 \tag{2}$$

여기서 r = 무위험수익률.

위의 편 미분 방정식에 전환사채의 제반 발행조건을 나타내는 경계 조건들을 적용하여 해를 구하면 전환사채에 대한 이론적 가치를 구할 수 있다. 그러나, 실제 거래되고 있는 국내 전환사채들은 이산적 이자 지급이나 전환 금지 기간의 설정, 만기보장 수익률의 설정 등 다양한 조건이 내재되어 있어 위의 식에 대한 해석적 해(Analytic Solution)를 구할 수가 없다. 따라서 수치 해석기법을 이용하여 위의 전환사채에 대한 편 미분 방정식을 풀 수 밖에 없다 편 미분 방정식 (2)에 대한 근사적인 해를 구할 수 있는 방법에는 크게 유한 차분법 (Finite Difference Method)과 유한 요소법 (Finite Elements Method)이 있는데 본 연구에서는 개념적으로 이해하기 쉽고 많이 알려진 기법인 유한 차분법을 이용한다.

유한 차분법에는 내재적 유한 차분법 (Implicit Finite Difference Method) 및 외재적 유한 차분법 (Explicit Finite Difference Method)이 있는데 외재적 유한 차분법은 연립방정식을 풀 필요가 없기 때문에 내재적 유한 차분법에 비해서 계산상 효율성이 높으나 안정성 측면에서 불리하다. 그러므로 본 연구에서는 내재적 유한 차분법을 이용하여 편 미분 방정식을 풀도록 한다.

유한 차분법을 적용시키기 위해서는 편 미분 방정식을 유한 차분형태로 변화시키는 것이 필요하다. 전환사채는 주식가격과 시간의 함수로 나타나므로 그림 개념으로 볼 때 주식가격은 X축, 시간은 Y축, 전환사채의 가격은 Z축에 나타난다고 할 수 있다. 변화할 수 있는 주식가격의 최대 값이 S_{max}이고, 전환사채의 만기가 T일 때 주식기격 축을 m구간으로 나누고 시간 축을 n구간으로 나누면 주식가격의 단위변화량 h와 시간의 단위변화량 k는 다음과 같이 나타난다.

$$h = \frac{S_{max}}{m}, \quad k = \frac{T}{n} \tag{3}$$

전환사채에 대한 시간의 편 미분은 다음과 같이 정의한다.

$$W_t = \frac{W_{i,j} - W_{i,j-1}}{k} \tag{4}$$

내재적 유한 차분법과 외재적 유한 차분법의 차이는 전환사채에 대한 주식가격의 편 미분을 정의하는 데서 발생한다. 내재적 유한 차분법의 경우 전환사채에 대한 주식가격의 편 미분을 중심 차분을 이용해서 표시하면 다음과 같다.

$$W_s = \frac{W_{i+1,j-1} - W_{i-1,j-1}}{2h},$$

$$W_{ss} = \frac{W_{i+1,j-1} - 2W_{i,j-1} + W_{i-1,j-1}}{h^2}, \qquad (5)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

식 (4)와 식 (5)를 식 (2)에 대입하고 또한 $S = hi$, $W = W_{i,j-1}$ 을 사용하면 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$W_{i,j} = a_{i-1}W_{i-1,j-1} + a_i W_{i,j-1} + a_{i+1}W_{i+1,j-1} \qquad (6)$$

여기서 $a_{i-1} = \frac{1}{2}rki - \frac{1}{2}\sigma^2 ki^2$,

$a_i = 1 + \sigma^2 ki^2 + rk$,

$a_{i+1} = -\frac{1}{2}rki - \frac{1}{2}\sigma^2 ki^2$.

위 연립방정식은 j-1시점의 전환사채 가격 $\overline{W}_{j-1}$이 주어졌을 때 j시점의 가격 $\overline{W}_j$를 구하는 식이 된다. 그러나 본 연구의 계산 방식은 만기 시점의 전환사채 가격으로부터 역으로 구해서 현재시점의 가치를 구하는 방식이므로 형태를 바꾸어야 한다. 즉, $[a_{i-1}, a_i, a_{i+1}]$ (i =1, , m-1)로 구성된 행렬을 A라고 할 때, 식 (6)의 형태를 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$\overline{W}_{j-1} = A^{-1}\overline{W}_j \qquad (7)$$

여기서,

$A = [a_{i-1}, a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m-1$,

$\overline{W}_{j-1} = [W_{0,j-1} \; W_{1,j-1} \; W_{2,j-1} \cdots W_{m,j-1}]$,

$\overline{W}_j = [W_{0,j} \; W_{1,j} \; W_{2,j} \cdots W_{m,j}]$.

위 식은 j시점의 각 상태 (i=0, m)에서의 전환사채 가격, $\overline{W}_j$가 주어졌을 때 j-1시점의 각 상태에서의 전환사채 가격 , $\overline{W}_{j-1}$를 구하는 식이 된다 그런데, 변수의 수는 ($W_{0,j-1} \; W_{1,j-1} \cdots W_{m,j-1}$) 으로 m+1개 이지만 방정식의 수는 m-1개 이므로 위 연립방정식을 풀기 위해서는 두 개의 방정식이 부족하게 된다. 이것을 해결하기 위해서는 전환사채의 주식가격에 대한 두 가지 조건을 이용하면 된다. 주식가격이 극히 작은 값으로

떨어지면 전환사채는 주식으로의 전환가치가 거의 없어지고 채권으로써의 가치만 갖게 되므로 주식가격 변화에 대한 전환사채의 가치 변화는 0으로 접근하게 된다 즉 $\lim_{s \to 0} W_s(S, t) = 0$ 의 조건이 성립한다. 이것을 이산적으로 표현하면

$\frac{W_{s+1,t} - W_{s,t}}{\Delta s} = 0$이 되므로 주식가격이 0으로 근접하는 경우에는 $W_{s+1,t} = W_{s,t}$ 이 성립하게 된다 식 (7)에서 현재시점은 j-1이므로 t대신에 j-1를 대입하고 주가(S)를 0으로 설정하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$W_{1,j-1} = W_{0,j-1} \tag{8}$$

또한, 주가가 매우 큰 값으로 상승하면 전환사채는 주식의 성격을 갖게 되므로 전환사채의 가치는 전환가치에 접근하게 된다 전환사채를 전환한 경우의 가치인 전환가치는 전환비율(C_r)*주가(S)이므로 $\lim_{s \to \infty} W_s(S, t) = C_r$ 이 성립한다. 위의 식을 이산적으로 표현하면 $\frac{W_{s+1,t} - W_{s,t}}{\Delta s} = C_r$이 되므로 주식가격이 매우 높게 상승한 경우에는 $W_{s+1,t} = W_{s,t} + C_r * \Delta S$ 의 식이 성립하게 된다. 여기서도 현재시점을 j-1로 대입하고 주가(S)를 최대치인 m으로 놓고 ΔS는 h로 대체하면 다음의 식을 얻을 수 있다

$$W_{m,j-1} = W_{m-1,j-1} + C_r * h \tag{9}$$

위의 두 공식 (8)과 (9)를 식 (7)에 첨가하면 변수의 수와 방정식의 수가 같아지므로 선형 연립 방정식을 풀 수 있다. 그러므로, 만기시점 T로부터 식 (7)을 적용하여 한 단계씩 선형 연립 방정식을 풀면서 역으로 구해 오면 시점 0에서의 전환사채 가격을 구할 수 있다. 내재적 유한 차분법의 단점은 위에서도 알 수 있듯이 매 단계마다 연립방정식을 풀어야 하므로 계산시간이 외재적 유한 차분법에 비해서 많이 걸리게 된다. 그러나 외재적 유한 차분법은 점근성을 보장하지 못하나 내재적 유한차분법은 점근성을 보장받을 수 있다.

2.2 전환사채의 제반 조건에 대한 고려

단순 전환사채의 가격은 만기 시점 T로부터 식 (7)을 적용하여 한 단계씩 선형 연립방정식을 풀어서 구하면 되지만 일반 전환사채의 경우에는 다양한 조건을 갖고 있기 때문에 이들을 위한 경계조건을 유도해야 한다. 첫째는 만기 조건으로, 전환사채의 만기 시점에 투자가는 전환가치가 상환금액보다 크면 전환하고 전환가치가 상환금액보다 적으면 상환금액을 받게 된다 일반적으로 만기시 상환금액은 전환사채의 원금 (Par Value)이지만 국내 전환사채의 경우 만기까지 전환하지 않고 보유하는 경우 원금에 일정한 금액을 추가로 더해 주는 만기 보장 수익률이라는 개념을 사용하므로 국내 전환사채의 경우, 만기시 상환

금액은 만기보장수익률*원금 (Par Value)이 된다. 즉

$$W_{i,T} = Max(C_r * S_i, \text{원금} * \text{만기보장수익률}), \ i = 1, \ldots, m, \qquad (10)$$

여기서, C_r = 전환비율, S_i = 만기시 i 상태의 주가($S_i = h*i$),

T = 전환사채의 만기.

둘째는 전환조건으로, 전환사채의 투자가는 임의의 시점 j-1과 상태 i에서의 전환사채 가치 ($W_{i,j-1}$)가 전환가치 (Cr*S_i) 보다 작게 되면 전환하는 것이 최적 전환전략이므로 다음의 경계조건이 유도된다 그러나 Brennan과 Schwartz (1977)의 Lemma에 따르면 이자 지급일 이나 배당 지급일, 만기일이외에는 전환하는 것이 불필요하므로 이들 시점에만 다음의 조건을 적용하면 된다

$$W_{i,j-1} \geq C_r S_i \qquad (11)$$

여기서, S_i는 $j-1$ 시점, i 상태에서의 주가.

셋째는, 이자지급일 조건으로 전환사채에 대하여 이자가 지급되면 전환사채의 투자가는 이자만큼 부가 증가하기 때문에 이자지급일 전후로 전환사채의 가치는 지급이자 만큼 차이가 발생한다 그러나 이자지급은 기업가치를 이자지급 분만큼 줄이게 되므로 이자지급일 전후로 기업가치는 이자지급 분만큼 감소하게 된다. Brennan과 Schwartz의 모형과 같이 전환사채의 가치가 기업가치에 의존한다고 가정하면 이자지급 후에는 기업가치가 이자지급 분만큼 감소되는 것을 고려할 수 있다 그러나 전환사채의 가치가 주식가격에 의존한다고 가정하는 경우에는 이자지급으로 인한 주식가격의 하락을 측정하기 힘들기 때문에 이자지급 후에도 주식가격이 변동하지 않는다고 가정할 수밖에 없다. 이러한 측면에서는 Breenan과 Schwartz의 모형이 우월하지만 기업가치의 변화는 현실적으로 측정이 어렵기 때문에 주식가격을 상태변수로 잡게 된다 그러므로, 이자지급일 전후에는 다음과 같은 조건이 만족된다.

$$W_{i,j} = W_{i,j^+} + \text{지급이자}, \qquad (12)$$

여기서 j = 이자지급 바로 전 시점,
j^+ = 이자지급 바로 후 시점.

2.3 C언어를 이용한 전환 사채 가격 결정 알고리즘의 구현

본 절에서는 2.1과 2.2의 내용을 바탕으로 전환사채의 가격결정 알고리즘을 C언어를 이용하여 구현하고자 한다. 전환사채의 가격결정 알고리즘에는 자료화일의 입출력, 날짜 세

산, 이자 지급 시점의 결정, 일반 채권의 가격 결정 등의 알고리즘이 필요하지만 이들은 전환사채 가격 결정의 핵심적 알고리즘이 아니므로 이들은 생략하고 전환사채 가격결정의 핵심적 알고리즘만 구현한다.

(1) 주가 및 시간 축에 대한 차분

```
limit = sprice*10.0;   /* 주식가격의 최대 변화량 (현재주가*10) */
m = 100.0;             /* 주식가격 축의 구간수 */
h = limit / m; /* 주식가격의 단위 변화량 */
n = 현재시점과 만기사이의 개월 수
/* 시간의 단위는 1개월이 됨*/
```

(2) 만기시 전환사채의 가치

```
/* 만기조건의 결정 */
for (i = 0; i < m+1; i++){
     if ( i*h*전환비율 < (만기보장수익+지급이자))
          r[i] = 만기보장수익+지급이자;
     else
          r[i] = i*h*conversion_ratio;
}

/* r[i]는 만기시 i상태에서의 전환사채의 가치 */
```

(3) 각 단계별 전환사채의 가치를 구하기 위한 반복 알고리즘

만기 시점에서의 전환사채 가치는 (2)단계에서 구했기 때문에 식 (7)을 반복적으로 적용하여 한 단계씩 선형 연립방정식을 풀면 전환사채의 가격을 구할 수 있다. 단, 이때 각 단계에서 경계조건은 포함시켜야 한다.

식 (7)을 풀기 위해서는 우선 선형 연립방정식의 계수인 a_{i-1}, a_i, a_{i+1}의 값을 구해야 한다.

① 선형 연립방정식의 계수 계산

```
/* sigma는 주식수익률의 표준편차 */

k = 1.0/12.0;     /* 단위기간이 1개월임 */
for ( i = 1; i < m; i++)
{
    a[i] = (0.5*r1*k*i - 0.5*sigma*sigma*k*i*i);
```

```
    b[i] = (1.0+r1*k+sigma*sigma*k*i*i);
    c[i] = (-0.5*r1*k*i - 0.5*sigma*sigma*k*i*i);
}
```

② 식 (6)을 이용한 각 단계별 전환사채의 가격결정

```
for (j = n-1; j >= 0; j--){   /* 시간축 : 시간의 경과 */

/* 선형 연립방정식 알고리즘 */
    if (b[1] == 0.0) printf("error");
       bet = b[1];
       w[1] = r[1]/bet;
    for (i = 2; i <= m-1; i++) {
          gam[i] = c[i-1]/bet;
          bet = b[i] - a[i]*gam[i];
          if (bet == 0.0) printf(" Error 2 in Tridag");
             w[i] = (r[i]- a[i]*w[i-1])/bet;
       }
     for (i = (m-2); i >= 1; i--)
           w[i] -= gam[i+1]*w[i+1];
```

/* 식(8) 에서 주식가격이 극히 작은 값이면 $W_{1,j-1} = W_{0,j-1}$이 됨*/

```
           w[0] = w[1];
```

/* 식(9) 에서 주식가격이 높게 상승하면 $W_{m,j-1} = W_{m-1,j-1} + C_r * h$이 됨 */

```
           w[m] = conversion_ratio*h+w[m-1];
/* Boundary condition 적용  이자지급 및 전환조건 적용 */
       for (i = 0; i < m+1; i++)
       {
         if (전환 가능기간 && w[i] <= conversion_ratio*i*h)
             w[i] = conversion_ratio*i*h;
           if (이자지급 시점)  w[i] = w[i] + interest;
       }
}
```

III. 전환사채의 유통시장에 대한 분석

3.1 모형의 계수 결정 및 자료

(1) 모형의 계수 결정

전환사채의 모형가격을 구하기 위해서는 II장에서 구성한 모형의 Parameter들인 h와 k

의 값을 설정해야 한다. h는 주식가격의 이산적 증가분을 나타내고 k는 시간축의 이산적 증가분을 나타낸다. 첫째로 h의 값을 구하기 위해서는 주식가격이 변할 수 있는 최대값인 S_{max}와 주식가격의 단계수 (number of steps)인 n이 필요한데 본 연구에서는 주식 가격 변동 최대값은 현재 주식가격의 10배로 설정하였다. 또한 주식가격 변동 최소값은 0으로 설정하고 주식가격의 단계수인 n은 100으로 설정하였다. 시간축의 이산적 증가분을 나타내는 k는 1개월로 설정하였다

(2) 전환사채 자료

전환사채에 대한 발행조건, 전환사채 발행기업의 주가 시리즈, 할인율 자료가 요구된다. 첫째로 전환사채의 발행조건으로는 발행일, 전환청구기간, 전환가격, 만기일, 만기상환액, 연이율, 전환주식의 종류, 이자지급기간, 보증기관 등이 필요하다 본 연구에서는 1994년 12월부터 1995년 4월까지 거래된 전환사채 중에서 무작위로 선택된 97개의 거래자료를 대상으로 분석하였다.

(3) 주가 데이터

전환사채 발행기업의 주가 시리즈로써 이것은 평가 모형에서 사용되는 주식수익률의 분산을 계산하는 데 사용된다 전환되는 주식의 종류가 보통주인 경우에는 보통주의 과거 주가 시리즈를 이용하여 분산을 구하고 전환되는 주식의 종류가 우선주인 경우에는 우선주의 과거 주가 시리즈를 이용하여 분산을 구한다. 주식 수익률의 분산은 여러 가지 방법을 통하여 구할 수 있지만 II장의 모형은 주식가격이 Diffusion Process를 따른다고 가정했기 때문에 이 가정 하에서 분산을 계산하였다. 또한 주식수익률 분산을 구할 때 이용한 기간은 거래일 이전의 2년간 일별 수익률로 추정하였다

(4) 할인율 자료

할인율로는 전환사채가 은행보증인 경우에는 전환사채와 만기가 유사한 은행보증 회사채의 수익률을 사용하고 전환사채가 기타보증인 경우에는 전환사채와 만기가 유사한 기타보증 회사채 수익률을 사용한다. 또한 무보증인 경우에는 무보증 회사채의 수익률을 할인율로 사용한다

3.2 유통시장에서 거래된 전환사채의 가치분석

II장의 수치해석 기법을 이용하여 전환사채의 거래자료에 대하여 모형가격을 구한 결과, 국내 전환사채의 경우 시장 거래가격은 모형가격보다 훨씬 저평가되어 있으며 약 76% 정도가 되었다. 이러한 모형가격과 시장 거래가격과의 괴리는 첫째로, 전환사채를 거래하는 실무자들이 옵션에 대한 개념이 낯설고 그로 인하여 전환사채에 포함되어 있는 옵션의 가치를 제대로 평가하여 거래하고 있지 않다는 점과 전환사채 평가모형의 가정이 현실을 제대로 반영하지 못한 데서 그 원인을 찾을 수 있다.

전환사채의 저 평가 문제를 분석해 보기 위하여 우선 전환사채의 가치를 순수 채권의 가치와 옵션인 전환권의 가치로 나누어서 살펴보자. 전환사채의 순수 채권가치는 전환사채의 지급이자와 이자 지급기간, 만기, 만기시의 만기 보장수익률을 알면 이들을 시중금리로

할인하여 구할 수 있다. 이러한 채권가치는 전환사채의 전환권을 사용하지 못한 경우의 가치로써 전환사채 가치에 대한 Lower Bound를 형성한다 또한 전환권의 가치는 전환사채의 가치에서 채권가치를 차감하면 구할 수 있다. <표 1>은 97개의 전환사채 거래자료에 대하여 모형에서 구한 평균 전환사채 가치, 평균 채권 가치, 평균 옵션 가치를 나타낸다

<표 1> 전환사채의 채권가치와 옵션가치

전환사채의 평균 모형 가치	전환사채의 평균 채권 가치	전환사채의 평균 옵션 가치
158,984.6	85,439.9	73,544 7

<표 1>로부터 볼 때 본 연구에서 고려한 전환사채 자료의 경우 모형에서 구한 전환권의 평균가치는 73,544 7원으로 전환사채 가치의 약 46%를 자지한다는 것을 알 수 있다 그러나 전환사채의 시장가격에 내재되어 있는 전환권의 평균 가치를 구해보면 35,831.7원이 된다 그러므로 시장에서는 전환권의 모형 가치중 약 50%정도만 반영해 주는 것을 알 수 있다

이에 대한 분석을 하기 위하여 전환사채의 이론적 가치와 시장가격과의 차이를 종속변수로 설정하고 수익률의 변동성, 페러티, 만기, 이자율을 종속변수로 설정하여 식 (13)과 같은 다중 회귀분석을 실시한다

$$Y_i = a_1 X_{1,i} + a_2 X_{2,i} + a_3 X_{3,i} + a_4 X_{4,i} + \varepsilon_i \tag{13}$$

Y_i = i 번째 전환사채의 모형가격과 시장가격과의 차이,
$X_{1,i}$ = i 번째 전환사채의 전환주식에 대한 수익률 표준편차,
$X_{2,i}$ = i 번째 전환사채의 페러티,
$X_{3,i}$ = i 번째 전환사채의 만기,
$X_{4,i}$ = i 번째 전환사채 거래시점의 시중 이자율,
ε_i = 오차항.

우선 각 독립변수간의 상관관계를 분석하기 위하여 독립변수간 상관계수를 구하면 <표 2>과 같다.

<표 2> 독립변수간 상관분석

	분산	만기	페러티	시중이자율
분산	1	-0.2590	0.2865	-0 0724
만기	-0 2590	1	-0.2181	0.0282
페러티	0.2865	-0 2181	1	-0.1469
시중이자율	-0.0724	0.0282	-0.1469	1

<표 2>의 상관분석으로부터 볼 때 각 독립변수간 상관관계는 높지 않다는 것을 알 수 있다. 따라서 다중회귀분석을 할 때 다중공선성 문제는 특별히 고려하지 않아도 된다 식 (13)에 대한 다중회귀분석을 실시하면 조정된 결정계수 (R2)가 0.679로써 높은 설명력을 보이고 있다. 또한 각 독립변수의 계수와 t값은 <표 3>과 같다.

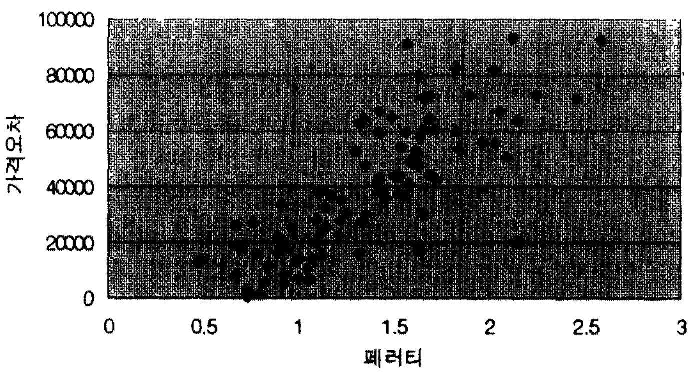
<표 3> 회귀분석 결과

변 수	계 수	표준오차	t통계량
분산	54,375	13,195.4	4.15
페러티	37,345.3	3,249.8	11.49
만기	-23.79	2,824.1	-0.008
시중이자율	-3,260	2,735.1	-1.19
Y 절편	20,800.2	43,336	0.48

위의 표에서 보면, 독립변수 중 분산과 페러티 변수는 통계적으로 매우 유의적인 결과를 보여주고 있어, 전환사채의 이론가격과 실제 거래가격과의 오차는 Noise term이 아니고 분산과 페러티 변수에 의해서 상당부분 설명된다는 것을 알 수 있다. 앞에서도 언급했듯이 전환사채는 일반채권에 콜 옵션인 전환권이 결합되어 이루어진 합성증권인데, 전환권의 가치는 주로 분산과 페러티에 의하여 결정된다. 그런데, 전환사채의 이론가격과 실제 거래가격과의 오차가 분산과 페러티 변수에 의해서 주로 설명된다는 것은 오차가 주로 전환권의 가치로 구성되어 있다는 것을 의미한다. 이것은 전환사채의 시장가격이 전환권의 가치를 제대로 평가하고 있지 않다는 것을 의미한다. 즉, 전환사채를 거래하는 실무자들이 옵션에 대한 개념이 낯설고 그로 인하여 전환사채에 포함되어 있는 옵션의 가치를 제대로 평가하여 거래하고 있지 않다는 것을 나타낸다.

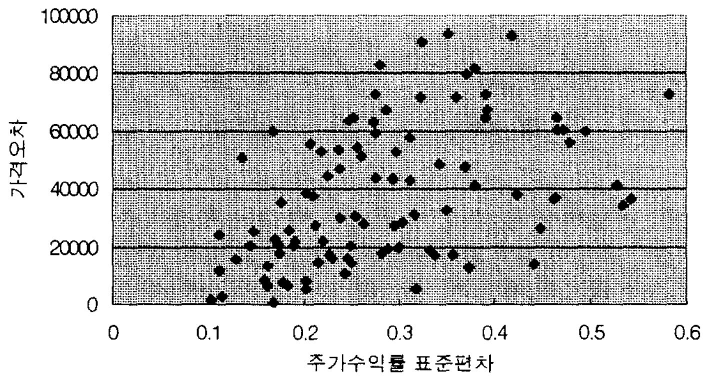
주가 변동성과 페러티 변수와 가격 오차와의 관계를 좀더 직관적으로 보기 위하여 각 독립변수와 가격 오차와의 관계를 Scatter Diagram으로 그리면 <그림 1>과 <그림 2>와 같다.

<그림 1> 전환사채의 페러티와 가격오차와의 관계



<그림 1>은 97개의 전환사채 거래자료에 대한 페러티와 가격 오차와의 관계를 나타낸다. <그림 1>에서 페러티가 커질 수록 두 가격 사이의 오차가 커진다는 것을 알 수 있다. 이것은 페러티 증가로 인한 전환사채의 가치 증가를 시장에서 충분히 반영하고 있지 못하다는 것을 의미한다. 즉 페러티가 커지면 전환사채에 포함된 옵션인 전환권의 가치가 커지게 되지만 시장에서는 옵션의 가치 증가를 충분히 반영하고 있지 못하다는 것이다. 그러므로 페러티가 큰 전환사채일수록 저평가 되어 있다고 볼 수 있다.

<그림 2> 전환사채의 주가변동성과 가격오차와의 관계



<그림 2>는 주식수익률의 변동성과 가격오차와의 관계를 나타낸다. <그림 2>에서 주식수익률의 변동성이 커질수록 가격오차가 커진다는 것을 볼 수 있는데 이것은 페러티와 가격오차와의 관계보다는 약하게 나타남을 볼 수 있다.

주식수익률의 변동성과 가격오차와의 관계는 두 측면에서 볼 수 있는데, 첫째는 페러티와 마찬가지로 주식수익률의 변동성이 증가하면 전환사채의 가치중 옵션부분인 전환권의 가치가 증가하게 되는데 이 증가분을 시장에서 반영하고 있지 못하다는 것이다. 둘째는, 국내 전환사채의 경우 전환하고자 할 때 전환을 청구한 후 실물을 받기까지 최단 20일에서 최장 50일이 소요되므로 그 동안의 주가 변동위험을 회피할 수 없다. 그러므로 투자가는 전환 후 가능하면 가격 변동이 적은 주식을 선호하게 되기 때문에 시장에서는 변동성 증가로 인한 전환권 가치의 증가를 상당부분 상쇄하게 되고 이로 인하여 모형가격과 시장거래가격의 차이가 커지게 된다.

이러한 문제는 페러티를 이용해서도 확인할 수 있다. 페러티란 현재 주가를 전환가격으로 나눈 값으로 전환사채를 전환했을 때의 가치는 {페러티*전환사채액면가}가 된다. 예를 들어 95년 1월 2일에 거래된 한일합섬 전환사채의 경우 페러티가 1.72로써 현재 주식으로 전환해서 주식시장에서 매각하면 172,000원을 받게 되므로 이론적으로 볼 때 본 전환사채의 가격은 최소한 이보다는 커야 된다. 그러나 본 전환사채의 시장가격은 158,000으로 이보다 훨씬 적게 된다. 이러한 차이는 전환청구 후 실물 인도까지 많은 기간이 소요되고 또한 실물인도 후에도 거래의 유동성이 낮기 때문에 발생된다.

그러므로 전환사채의 이론가격과 실제 거래가격과의 차이는 거래자들이 과학적인 평가모형에 기반하여 거래하지 않는 부분과 평가모형의 가정과 현실이 다른 부분이 결합되어

서 발생한다고 볼 수 있다

IV. 결론 및 제언

전환 사채는 채권의 안성성과 주식의 수익성을 겸비한 특성으로 인하여 좋은 투자 대안이 될 수 있다 그러나 국내 전환사채 시장의 경우 발행시장 규모는 어느 정도 성장하였으나, 유통시장에서의 거래는 활발하지 못한 실정이다. 본 연구에서는 이러한 유통시장의 문제점을 검토하기 위하여 Brennan과 Schwartz 및 McConnell과 Schwartz의 모형을 기반으로 국내 전환사채의 가치를 평가할 수 있는 모형을 설명하고, 이를 이용하여 국내 유통시장에서 거래된 전환사채들의 가치를 평가하였다. 분석 결과, 국내 전환사채의 경우 시장거래가격은 모형가격보다 훨씬 저 평가되어 있어, 시장 거래가격이 모형가격의 약 76% 정도에 지나지 않았으며 시장 거래가격과 모형가격의 평균 절대오차도 37,940원에 달했다.

이러한 모형가격과 시장 거래가격과의 괴리는 국내 전환사채의 경우 대부분을 기관에서 거래하는데 이들 금융기관들이 아직까지 이론적 평가모형을 기반으로 거래하고 있지 않다는 점이다. 즉 이들 기관들은 대부분 기초적이 방법에 의존하여 거래를 함으로써 전환사채에 포함되어 있는 옵션의 가치가 저 평가되어 있다는 것이다. 회귀분석 결과, 독립변수 중 주가 변동성과 페러티 변수는 매우 유의적으로 전환사채의 이론가격과 실제 거래가격과의 오차를 설명하였다 전환사채는 일반채권에 콜 옵션인 전환권이 결합되어 이루어진 합성증권이며 전환권의 가치는 주로 주가 변동성과 페러티에 의하여 결정된다 그런데, 전환사채의 이론가격과 실제 거래가격과의 오차가 주가 변동성과 페러티 변수에 의해서 설명된다는 것은 가격 오차가 주로 전환가치로 구성되어 있다는 것을 의미한다. 이것은 전환사채의 시장가격이 전환권의 가치를 제대로 평가하고 있지 않다는 것을 의미한다

또 다른 이유는 전환사채 평가모형의 가정이 국내 전환사채 시장의 현실을 제대로 반영하지 못한 데서 그 원인을 찾을 수 있다. 국내 전환사채의 경우 전환하고자 할 때 전환을 청구한 후 실물을 받기까지 최단 20일에서 최장 50일이 소요되므로 그 동안의 주가 변동위험을 회피할 수 없다. 그러므로 투자가는 전환 후 가능하면 가격 변동이 적은 주식을 선호하게 되기 때문에 시장에서는 변동성 증가로 인한 전환권 가치의 증가를 상당부분 상쇄하게 되고 이로 인하여 모형가격과 시장 거래가격의 차이가 커지게 된다 즉 국내 전환사채 시장의 경우는 모형에서 가정하는 유동성에 대한 가정이나 최적 전환전략에 대한 가정이 약하게 성립된다는 점이다.

그러므로 전환사채의 이론가격과 실제 거래가격과의 차이는 평가 모형의 가정이 현실을 제대로 반영하지 못한 부분과 거래 기관들의 평가 모형부족이 결합되어서 나타난 결과로 볼 수 있다 이러한 결과로부터 볼 때 국내 전환사채 시장의 경우 아직까지 이론적인 평가모형을 이용한 투자 전략을 구사하는데 어려움이 있다. 그러나 향후 증권시장에 대한 제반 규제가 완화되고 제도개선이 이루어지면 국내 전환사채 시장에 대한 유동성이 증가되고 효율성이 제고될 것이므로 이론적인 평가 모형에 기반을 둔 투자 전략이 필요하게 될 것이다.

참 고 문 헌

이상빈, 손규현 "수치해석에 의한 전환사채의 가격결정", 제 11집, 증권학회지 (1989), 167-197

우영호 "국내 전환사채시장의 정비방안", 증권, (1993 12), 5-25.

조희연, 양진설. "파생 금융 상품의 가격결정을 위한 인공신경망 기법의 이용", *전문가시스템학회지* (1997. 6), 1-12

Black, F. and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81, (May-June 1973), 637-659.

Boyle, P.P. "Option Valuation using a Three Jump Process" *International Options Journal* 3, (1986), 7-12

----------, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, (March 1988), 1-12

Brennan, M.J. and E S. Schwartz, "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds." *Journal of Banking and Finance* 3, (April 1979), 133-155

----------, "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, (Sept. 1978), 461-474

----------, "Analysing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15, (Nov 1980), 907-929

Cho, H. Y. and K Y Lee, "An Extension of the Three Jump-Process Model for Contingent Claim Valuation." *Journal of Derivatives* 3, (Fall. 1995), 102-108.

Courtadon, G., "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Value of Options" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, (Dec. 1982), 697-703

Cox, J.C, S A Ross, and M Rubinstein, "Option Pricing A Simplified Approach" *Journal of Financial Economics* 7, (Sept 1979), 229-263

Geske. R. and K Shastri, "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20, (March 1985), 45-71

Hull J, and A White, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, (Sept. 1988), 237-251

----------, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25, (March 1990), 87-100.

Johnson, H., "Options on the Maximum or the Minimum of the Several Assets." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, (Sept. 1987), 277-283.

Morton, R., "The Theory of Rational Option Pricing" *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, (Spring 1973), 141-183.

McConnell, J. J, and E. S. Schwartz, "LYON Taming" *Journal of Finance* 41, (July 1986), 561-577.

Stulz, R. M., "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications." *Journal of Financial Economics* 10, (July 1982), 161-185.