

## 속도 및 온도분포가 동시에 성장하고 있는 환상공간 내의 입구영역에 대한 연구

남궁규완  
기계·자동차공학부

### <요약>

본 연구는, 속도 및 온도분포가 동시에 성장하는 동심환형관의 입구영역에서, 층류 및 난류 비압축성 유동이 존재할 때의 운동량 및 열전달 문제들을 다루었다. 우선, 미분식들은 수치계산을 위하여 유한 차분식들로 변환했고, Prandtl 수  $Pr = 0.7$  인 유체가 반경비  $r^* = 0.001, 0.01, 0.06, 0.1, 0.4, 0.9$  등의 환상공간 내를 유동할 때, 수력학적 및 열적 입구영역에서 입구길이, 표면 마찰계수 및 열전달계수 등의 해를 계산하여, 다음의 주요 결과들을 얻었다. 즉, 최대속도가 존재하는 위치는,  $r^*$  가 "0"에 접근할수록, 하류로 진행함에 따라 중심으로부터 내측 벽면 쪽으로 치우치고, 수력학적 입구길이는,  $Re$  가 증가하거나 반경비가 감소할수록 증가한다. 또한  $r^*$  가 작은 경우, 내면 마찰계수  $C_{f,i}$  는 하류로 진행함에 따라 감소하며 최소값 이후에는, 증가하여 완전성장 값을 갖으나, 내면 Nusselt 수  $Nu_i$  는 계속 감소하며 완전 성장했다.  $C_{f,i}$  또는  $Nu_i$  수는 외면보다 내면이 높으며, 그 차이는  $Re$  가 증가할수록 감소한다. 그러나  $r^*$  증가에 따라,  $C_{f,i}$ ,  $Nu_i$  는 감소하고,  $C_{f,o}$ ,  $Nu_o$  는 증가하므로,  $r^* = 1$  근처에서 서로 같은 값을 갖는다.

## Study on the Entrance Region Flow in a Concentric Annulus with Simultaneously Developing Velocity and Temperature Distributions.

Kyuwon Namkoong  
School of Mechanical and Automotive Engineering

## &lt;Abstract&gt;

In this paper, we considered the problem of momentum and convective heat transfer in a concentric annulus with laminar and turbulent incompressible flow, simultaneously developing velocity and temperature distributions in the entry region. The differential equations for the annulus flow are transformed into finite difference equations first, for the numerical calculation. And the solutions combined hydrodynamic and thermal entry region, such as entry length, surface friction factor and heat transfer coefficient, are found for the fluid of  $Pr = 0.7$  and radius ratio  $r^* = 0.001, 0.01, 0.06, 0.1, 0.4, 0.9$ .

The useful results are as follows ; The point of maximum velocity is initially at center but tends to move toward inner tube further downstream and the hydrodynamic entry length increases as Reynolds number increase. And the inner wall friction factor for small  $r^*$  tends to reach a minimum going downstream and then rise to the fully developed value, but the Nusselt number is continuously decrease in the entry region. The inner wall friction factor  $C_{f,i}$  and Nusselt number  $Nu_i$  are greater than that of outer wall, and the differences between inner surface and outer surface are decrease as Reynolds number increase. But  $C_{f,i}$  and  $Nu_i$  are decrease at inner surface and those at the outer surface are increase as  $r^*$  increase, so their differences became zero near  $r^* = 1$ .

## 1. 서론

본 연구는 동심축의 두 원통 사이에서 형성되는 환상 공간에서 내/외 원통벽 사이에 온도 또는 열유속 차이가 존재하며, 축방향의 유동을 수반할 때의 열전달에 대한 것이다.

기하학적 조건만으로, 원관내의 형상은 환상공간에서 내원통의 반경이 '0' 인 경우로서 전개시킬 수 있지만, 유체 및 열유동이 수반되는 경우에는 이러한 방법이 적용될 수 없다. 그 원인은, 환상공간 내원통 벽면에서 속도는 '0' 이지만 원관내에서는 이와 같은 조건이 적용되지 않으며, 또한 열전달에서도, 환상통로는 두 면에 의하여 제한되어, 두 면중 한 면 또는 두 면이 모두 가열/냉각될 수 있으므로, 열적 조건은 다양하게 변할 수 있다.

환상공간 유동에 대하여 많은 연구 결과들이 있으며, 이들중 상당한 연구가 완전성장영역에 대하여 언급했거나 또는 원관과 평행평판 간의 유동에 연관하여 발표되었다.(1, 2)

Murakawa(3)는 환형 공간의 입구영역에서 무차원 속도함수를, 급수해 방법에 의하여 정리했으나, 반경비의 영향을 무시하는 등 지나치게 단순화했고, 또한 완전 성장되는 위치, 즉 입구영역의 길이에 대한 정보를 알아야만 사용될 수 있는 단점이 있다.

Langhaar(4)는, 원형관 입구영역 전체에 걸쳐 비교적 잘 맞는 근사적인 속도함수를 적분식에 적용하여, 층류유동 문제를 해결했으며, 속도함수는 momentum 식을 선형화하여 미지의  $\gamma$  를 포함하는 함수로 직접 구했고,  $\gamma$  와 입구로부터의 거리  $x$  의 관계는 적분식으

로부터 결정했다. 이와 같이 구한 속도함수는 입구 뿐아니라, 완전 성장영역에 근접해서도 우수한 결과를 얻었으며, 이 방법은 후에 4각 duct의 평행평판 사이의 유동에 적용했다.

Heaton(5)등도 Langhaar(4)와 유사한 방법을 사용하여 환상공간 입구영역에서 유체유동 및 열전달을 해석했으나, 무한급수 형태의 해를 얻었으며, 그 적용범위는 층류에 한정되었다. 이와 같이 동심환상공간에 대한 해석적 접근방법은 완전성장영역이나, 입구영역에서는 층류에 한정되어있고, 수치적 계산 결과들은 다양한 내/외벽면 조건들의 조합으로, 적합한 모델이나 계산자료가 부족한 실정이다. 따라서 본 연구에서는, 속도 및 열경계층이 동심 환상공간 입구에서 동시에 성장하는, 입구영역의 벽면 마찰계수 또는 열전달계수 등의 영향인자들에 대한 수치적 계산방법을 제시하고, 아울러 열장치 설계에 유용한 추가적 정보를 제공하려 한다. 이를 위하여, 환상공간 내/외경비,  $r_i / r_o = r^*$  는 0.001~0.9의 범위에서  $Re_{Dh} \approx 500 \sim 10^5$  으로 변화시키며, 입구길기와 벽면 마찰계수 등을 계산했다.

일정열유속 조건은 내면이 단열된 경우와 내/외면에서 서로 다른 크기의 열유속이 공급되는 경우에 대하여 각 Reynolds 에 해당하는 Nusselt 값의 변화를 계산했다. 동온조건에서도 내/외벽면과 유체의 온도 조합에 따른 여러 조건들이 있을 수 있으나, 본 계산에서는 내/외면이 유체보다 높은 동온조건과, 내/외면 간에 온도차이가 존재하는 경우에 대하여만 언급하겠다.

## 2. 이론적 해석

### 2.1 지배식과 난류항의 계산(6)

Fig.1 과 같은 환상공간 축방향 유동의 입구영역에 대한 지배식은 다음의 가정, 즉 비압축성 축대칭 정상상태유동, 반경방향의 압력변화와 축방향의 전도항 무시, 점성소산 에너지항들을 무시, 열경계층 및 속도 경계층은 모두 입구에서 동시에 발생 동에 의하여 시간 평균항으로 나타내면 연속식과 운동량식은 식(1),(2)이고, 엔탈피식은 식(3)과 같다.

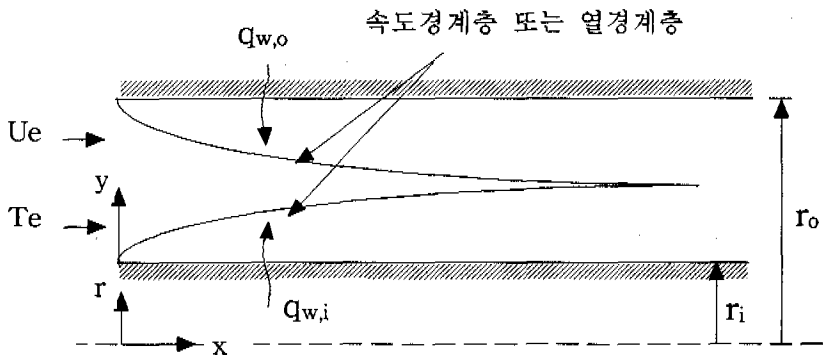


Fig.1. Coordinate System for an Annulus.

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r\rho v) = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r \cdot \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial h^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h^*}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ r \left[ \frac{\mu_{eff}}{\text{Pr}_{eff}} \frac{\partial h^*}{\partial y} + \mu_{eff} \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}_{eff}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (3)$$

윗식에서  $u, v$  는  $x$  및  $y$  방향의 속도,  $\rho$  는 유체밀도이고,  $\mu_{eff}$  는 층류와 난류점성값의 합으로  $\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} = \rho(\nu + \varepsilon_m) \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \overline{u'v'}$ 의 관계에서 얻은 항이다.

또한, 식(3)의 정체엔탈피  $h^* = h + \frac{u^2}{2}$  이고,  $\text{Pr}_{eff}$  도 층류와 난류가 결합된 Prandtl수로서,  $k$ 를 열전도계수,  $c_p$ 는 정압비열이라면,

$$\text{Pr}_{eff} = \frac{\mu_{eff}}{\left( \frac{k}{c_p} \right)_{eff}} = \frac{(\mu + \mu_T)c_p}{k + k_T} = \frac{1 + \frac{\varepsilon_m}{\nu}}{\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_m}{\nu} \frac{1}{\text{Pr}_T}} \quad \text{으로 표시되며,}$$

이것은 난류항  $-\rho \overline{h^*v'} = -\rho \overline{h'v'} - \rho u \overline{u'v'} = \frac{k_T}{c_p} \frac{\partial h^*}{\partial y} + \mu_T \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right)$ 으로 표시하여 얻은 항이다. 단,  $\varepsilon_m$ 은 와동 운동량 확산계수이고, 첨자 T는 난류를 의미한다.

한편, 지배식들에 대한, 동심 환상공간 입구유동에서 경계조건들은 다음과 같다.

- no slip, no mass flow :  $u(x, r_i) = u(x, r_o) = 0, v(x, r_i) = v(x, r_o) = 0$
- 벽면 등엔탈피 조건(동은) :  $h^*(x, r_i) = h_i(x), h^*(x, r_o) = h_o(x)$  또는
- 벽면 일정열유속 조건 :  $q''(x, r_i) = q_i''(x), q''(x, r_o) = q_o''(x)$

이상의 지배식들에서 층류의 경우 난류항은 "0"이지만, 난류의 경우 적절한 난류모델이 선정되어야 하며, 본 연구에서는 가장 많이 선택되어온 Prandtl의 혼합거리(mixing length) 모델을 사용했다. 즉, 난류 질량당여리의 평균 이동거리를 혼합길이  $l$ 로 정의하면, 와동운동량 확산계수,  $\varepsilon_m = l^2 \cdot |\partial u / \partial y|$ 로 계산하며, 여기서  $l$ 은 각 영역의 난류층에 따라 식(5)를 적용했다.

$$l = x \cdot y [1 - \exp(-y^+ / A^+)] \quad ; \quad 0 < y < (\lambda \cdot \delta) / x \quad (5)$$

$$l = \lambda \cdot \delta \quad ; \quad (\lambda \cdot \delta) / x > y > \delta$$

식(5)에서  $x = 0.41$ 의 값이 일반적으로 사용되며,  $y^+$ 는 벽면좌표로 무차원화한  $y$ 의 값, 즉  $y^+ = y \cdot \sqrt{\tau_0 / \rho} / \nu$ 이고,  $\tau_0$ 는 벽면에서의 전단력이다. 또한  $\delta$ 는 난류 경계층의 두께이고  $A^+$ 는 층류저층의 유효두께로서 난류경계층 계산에 주요한 영향을 미치고 있으므로, 본 계산에서는 넓은 범위의 압력조건에서 얻어진 식(6)의 실험식을 사용했다.

$$A^+ = \frac{25}{a \cdot b \cdot P^+ + 1} \quad (6)$$

윗 식에서  $a = 7.1$ ,  $b = 4.25$  이고,  $P^+ = \frac{\nu}{\rho} \cdot \left(\frac{\rho}{\tau_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{dP}{dx}$  이다.

경계층내 바깥쪽의 wake영역에서는  $l$ 이  $\delta$ 에 직접 비례하는 관계식을 사용했으며, 이 영역에서  $\lambda = 0.25 \cdot Re^{-1/8}$ 로 계산했고,  $\lambda \leq 0.085$ 인 경우,  $\lambda = 0.085$ 의 일정한 값을 사용했다.

한편, 난류 Prandtl수에 대한 제일 단순한 모델은  $Pr_T = 1$ 의 Reynolds Analogy이지만, 실험에 의하면,  $Pr_T$ 는 벽면으로부터의 거리에 의하여 변화하므로, 본 계산에서는 이러한 경향을 고려하여 보완된 식(7)로 계산했다.

$$Pr_T = \left[ \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \cdot c \cdot Pe_t - (c \cdot Pe_t)^2 \cdot (1.0 - \exp(-\alpha / Pe_t)) \right] \quad (7)$$

여기서  $Pe_t$ 는 난류 Peclet수로서  $(\varepsilon_m / \nu) \cdot Pr$ 로 정의하고,  $c = 0.2$ 의 상수이다. 또한  $\alpha = \sqrt{1/PRT}$ 로서  $PRT$ 는 매우 큰 wake영역에서 접근하는  $Pe_t$ 의 값이며,  $Pr \approx 1$ 에서  $PRT = 0.86$ 의 값이 사용된다. 이 관계식에 의하면 벽면에 인접한 점성영역에서는  $Pr_T > 1$ 의 값을 갖고, wake영역에서는 1보다 작은 값을 갖는다.

## 2.2 지배식의 변환과 유한차분식의 설정

우선, y 축을 유선(stream lines)에 따른 좌표축으로 변환하기 위하여, 식(1)의 연속식으로부터 얻은 유선함수  $\psi$  관계식(8)을 식(2), (3)에 대입 정리하면, 식(9), (10)을 얻는다.

$$u = \frac{1}{r \cdot \rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{r \cdot \rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ r^2 \cdot \rho \cdot u \cdot \mu_{eff} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] = -\frac{dP}{dx} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h^*}{\partial x} - \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ r^2 \cdot \rho \cdot u \cdot \frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \frac{\partial h^*}{\partial \psi} \right] \\ = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \mu_{eff} \left( 1 - \frac{1}{Pr_{eff}} \right) r^2 \cdot \rho \cdot u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

식(9), (10)의  $\psi$  좌표계는 경계층이 내면(첨자 "I"로 표시)과 외면(첨자 "E"로 표시)사이에서 제한되므로 식(11)과 같이 정의되는  $\omega$ 로 변환하고, "내/외벽면 질량유출입 = 0"을 적용하면, 식(12)의 형태로 정리할 수 있고, 상수  $c$ ,  $d$ 에 해당하는 항들은 표.1과 같다.

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( c \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right) + d \quad (12)$$

Table. 1. The Appropriate terms of c, d in a equation (12)

	운동량식 ( $\phi = u$ )	엔탈피식 ( $\phi = h^*$ )
c	$\frac{r^2 \rho u \mu_{eff}}{(\phi_E - \phi_I)^2}$	$\frac{r^2 \rho u \mu_{eff}}{(\phi_E - \phi_I)^2 Pr_{eff}}$
d	$-\frac{1}{\rho u} \cdot \frac{dP}{dx}$	$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{r^2 \rho u}{(\phi_E - \phi_I)^2} \mu_{eff} \left( 1 - \frac{1}{Pr_{eff}} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right]$

위의 편미방식을 차분식으로 정리하기 위하여, Fig.2 와 같은  $x \sim \omega$  격자 좌표와 검사체적을 사용하고, 식(12)의 각 항을 검사체적에 대하여 적분하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1}{\delta x} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} (\phi_D - \phi_U) d\omega = \frac{(\phi_{i,D} - \phi_{i,U})}{\delta x} (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) \\ & \cdot \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) d\omega = \frac{1}{(\phi_E - \phi_I)_U} [ T_{i+\frac{1}{2}} (\phi_{i+1} - \phi_i)_D - T_{i-\frac{1}{2}} (\phi_i - \phi_{i-1})_D ] \\ & \cdot \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} d d\omega = d_{i,D} (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) \equiv \frac{S_i + S'_i \cdot \phi_{i,D}}{(\phi_E - \phi_I)_U} \end{aligned}$$

$$\text{단, } T_{i+\frac{1}{2}} \equiv (r \frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}})_{i+\frac{1}{2}} / (y_{i+1} - y_i)_U, T_{i-\frac{1}{2}} \equiv (r \frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}})_{i-\frac{1}{2}} / (y_i - y_{i-1})_U$$

이고, 운동량식에서  $Pr_{eff} = 1$  의 값을 대입한다.

이상의 결과들을 식(12)에 대입하고,  $\phi_{i,D}$  에 대하여 정리하면 식(13)의 차분식을 얻을 수 있다.

$$\phi_{i,D} = A_i \cdot \phi_{i+1,D} + B_i \cdot \phi_{i-1} + C_i \quad (13)$$

$$\text{윗식에서 } A_i = T_{i+\frac{1}{2}} / [ T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + P \cdot (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) - S'_i ]$$

$$B_i = T_{i-\frac{1}{2}} / [ T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + P \cdot (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) - S'_i ]$$

$$C_i = \frac{\phi_{i,U} \cdot P \cdot (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) + S_i}{T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + P \cdot (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) - S'_i}$$

이며,  $P = (\phi_E - \phi_I) / \delta x$  이다.

식(13)의 일반화된 차분식은 하류(D) 임의의 단면상에 존재하는 모든 격자에 적용되어, 선형화되어 표시되며, 포함된 상수항들은 상류(U)격자들로부터 계산된다. 결국,  $i = 2$ 부터  $i = N+2$  까지의 각 격자에서 차분식들은 일련의 연립방정식을 구성하며, 해는 TDMA방법(tri-diagonal matrix algorithm)에 의하여 구할수 있다. 계산과정은, 우선, 각 식의 상수항들을 계산하고 이들을 해당격자의 선형화된 식에 대입하여,  $\phi_i$  를 구한다. 한 단면의 격자들의 해가 모두 결정되면, 하류 쪽으로  $\delta x$  만큼 이동하여 같은 계산을 반복하며, 이러한 과정을 유동이 완전 성장할 때까지 계속한다.

완전 성장조건은, 벽면에서의 마찰계수 또는 열전달계수의 변화가 유동방향( $x$ -방향)에 무관하여 일정한 값을 갖는 것이므로, 계산에서는 환상공간 폭에 해당하는 길이만큼 하류로 이동했을 때의 값들이 상류 값의 99.9%에 도달할 때를 입구영역이 끝나는 조건으로 했다.

### 3. 계산결과 및 검토

본 계산에서 환상공간의 내·외경비,  $r_i/r_o = r^*$  는 0.001, 0.01, 0.06, 0.1, 0.9, 유체의 Prandtl 수,  $Pr = 0.7$  의 값을 선택했으며, 유체속도는  $Re = 500 \sim 10^5$  범위의 층류 및 난류를 포함할 수 있도록 변화시켰고,  $Re$  와  $Nu$  등에서 특성길이는 수력직경,  $D_h = 4 \cdot A/P$  를 사용했다.

우선 Fig.3은,  $r^* = 0.001, 0.1, 0.9$  이고 층류유동인 경우, 입구영역내의 각 단면에서 속도분포를 나타낸 것으로, 각 단면의 위치는 수력학적 입구길이  $x_M$  에 대한 임의 위치  $x$  의 비, 즉  $x/x_M$  으로 나타냈다. 또한  $y$  축은 환상공간내 임의 위치에서 반경  $r$  을  $(r-r_i)/(r_o-r_i) = \bar{r}$  로 무차원했고,  $x$  축은 속도  $u$  를 그 단면에서의 평균속도  $u_m$ , 또는 입구에서 균일한 진입속도  $u_e$  로 무차원한  $u/u_m$  으로 나타냈다. 여기서  $r^* = 1$  에 근접할수록, 즉 유동통로가 좁아질수록 최대속도는 환상공간의 중심근처에서 일어나며,  $r^*$  가 적어질수록 그 위치는 내부원통 벽쪽으로 치우침을 알 수 있다. 그 원인은 외측관벽에 의한 영향이 내측관벽에 의한 영향보다 더욱 크고 이러한 경향은 내측관의 직경이 작을수록 더욱 심하게 나타나기 때문인 것이다.  $r^* = 0.001$  의 경우는 내측관이 매우 작은 경우이므로 실용적인 의미는 별로 없지만  $r_i$  가 "0" 에 근접할 때 해의 접근 경향을 얻기 위하여 계산했다. 따라서 Fig.3. (a) 에 원형관의 완전 성장된 속도분포를 중첩하여 도시한 결과, 환상공간에서는 비록 내부관의 직경이 매우 작다하더라도 "0"의 속도를 갖는 면이 존재하므로 유동현상은 원형관과 상당한 차이가 있다.

Fig.4 는 수력학적 입구길이  $x_M$  을  $D_h \cdot Re$  로 무차원한  $x_M/(D_h \cdot Re) = X_M$  과  $Re$  의 관계를 나타냈다. 전반적으로  $Re$  증가 및  $r^*$  증가에 따라  $X_M$  도 감소하는 경향이 있다. 특히  $Re$  에 대한  $X_M$  변화율, 즉,  $\frac{d(\ln X_M)}{d(\ln Re)} = -C$  을 그림의 좌표로부터 평

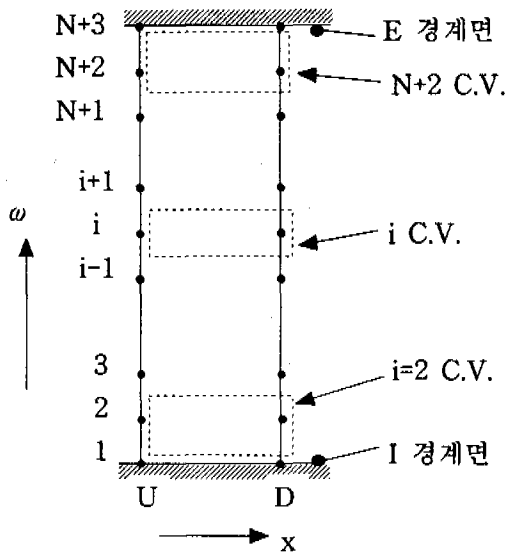


Fig.2. Grid and C.V. of  $\omega$ - $x$  Coordinate.

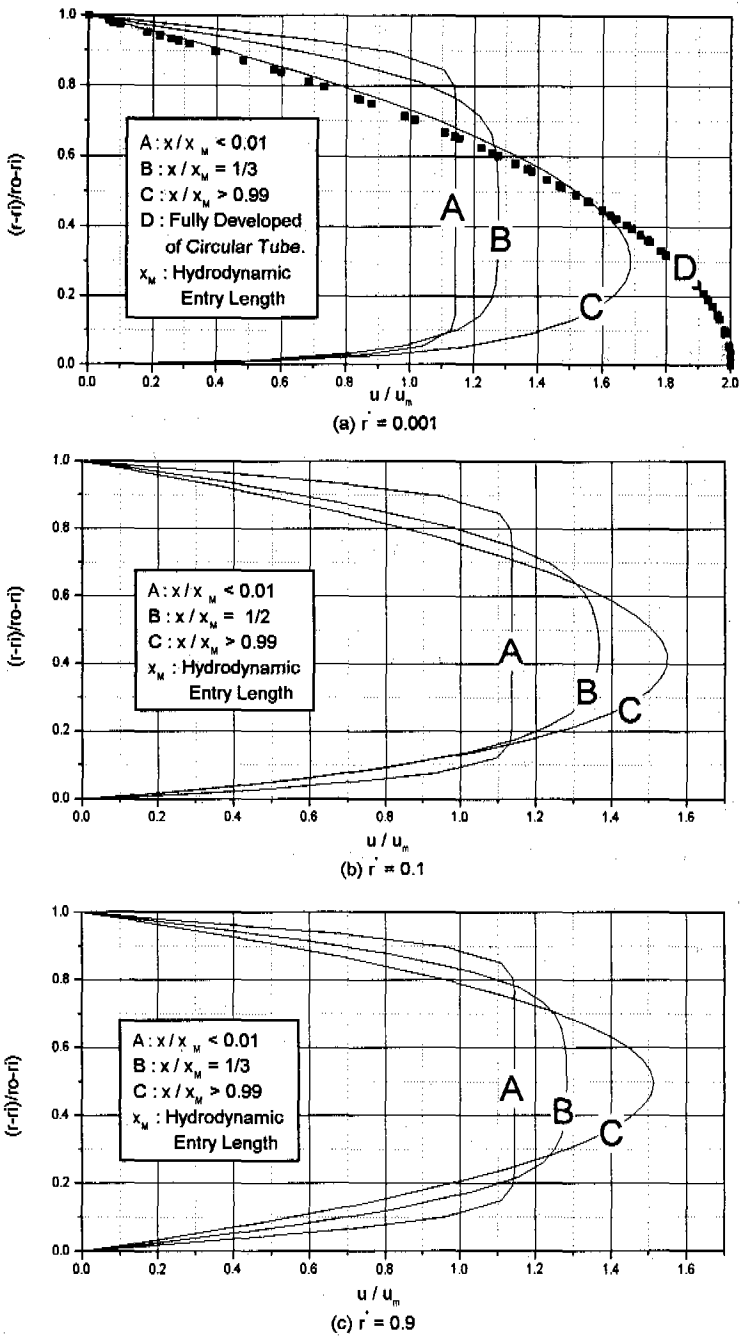


Fig.3. Developing Velocity Profiles for  $Re = 1000$  of an Annulus.



가하기 위하여  $C=1$ 의 경우를 도시한 결과, 층류영역인  $Re < 2000$ 에서  $C < 1$ 이고, 천이영역인  $2000 < Re < 6000$ 에서  $C > 1$ , 난류영역인  $Re > 6000$ 에서  $C \leq 1$ 의 값을 갖는다. 이것은 층류영역에서  $Re$  증가에 따라  $x_M / D_h$ 도 같이 증가하나, 천이영역에서는  $Re$  증가에 따라  $x_M / D_h$ 가 감소하여 난류유동이 시작되는 근처에서 최소값에 도달했다가 난류유동에서는  $Re$ 의 증가에 따라 다시  $x_M / D_h$ 가 증가한다는 것을 의미한다. 즉 층류에서는 경계층 성장속도가 늦으므로  $Re$  증가에 따른 입구길어도 상당히 증가되나, 천이영역에서는 난류와동의 생성으로 층류인 경우보다 입구길이가 짧아진다. 그러나 난류와동만 존재하게 되면,  $Re$  증가에 따라 경계층 성장이 늦어지므로 다시 입구길이가 길어지나, 성장율은 층류인 경우보다 높으므로 층류시의 입구길이가 증가율보다는 낮다.

Fig.5는 입구 영역에서 환상공간 내·외면 마찰계수와  $Re$ 수의 곱, 즉  $C_{f,i} \cdot Re$  또는  $C_{f,o} \cdot Re$ 와  $x / (D_h \cdot Re) = X$ 의 관계를 각  $Re$ 에 대하여  $r^* = 0.01, 0.1, 0.9$

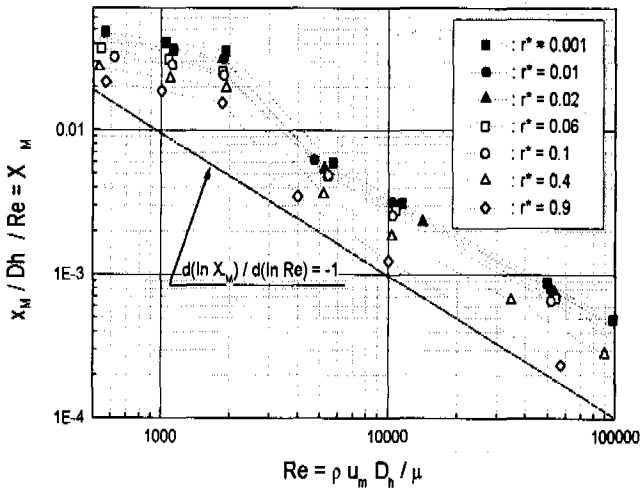


Fig.4. Hydrodynamic Entry Length for various  $r^*$ .

라 감소하다가 다시 증가하여 완전 성장하는 경향이 있으며, 그 원인은, 계산오차보다 다음과 같은 현상으로 해석할 수 있다. 즉 반경이 작은 관의 유동은 무한유동장내의 관외유동과 같은 특성을 가지므로, 짧은 거리의  $X$  범위에서는  $C_{f,i}$ 는 감소한다. 그러나  $X$ 가 증가함에 따라 환상공간 외벽의 마찰력이 유동장내로 전파되어 내부관벽 영역까지 영향을 미치며, 결과적으로 내면의 마찰력을 다시 증가시킨다. 따라서, 이와 같이 내·외벽 반경비가 큰 환상공간에서 내면의 마찰계수는 최소치에 도달 후, 다시 증가하여 완전성장에 도달하지만, 이러한 경향은  $r^* = 0.9$ 와 같이 내·외면 마찰력이 거의 동등한 경우에는 발생하지 않는다.

의 경우 도시한 것이다. 전반적으로 내면의 마찰계수는, 반경이 외면보다 작으므로, 외면에 비하여 상당히 높으며, 이러한 차이는 내·외경비  $r^*$ 가 커질수록 적어져서  $r^* = 0.9$ 에는 내·외면이 마찰계수가 거의 일치하고 있다. 입구( $x = 0$ )에서 속도는 벽면에서 연속이므로 내·외면 전단력은  $\infty$ 의 값을 갖으나, 하류로 진행할수록 벽면에서의 완만한 속도구배로 인하여 점성력은 감소한다. 그러나  $r^* = 0.01$ 과  $0.1$ 의 내경이 작은 환상공간에서 내면의 마찰계수는 하류로 진행함에 따

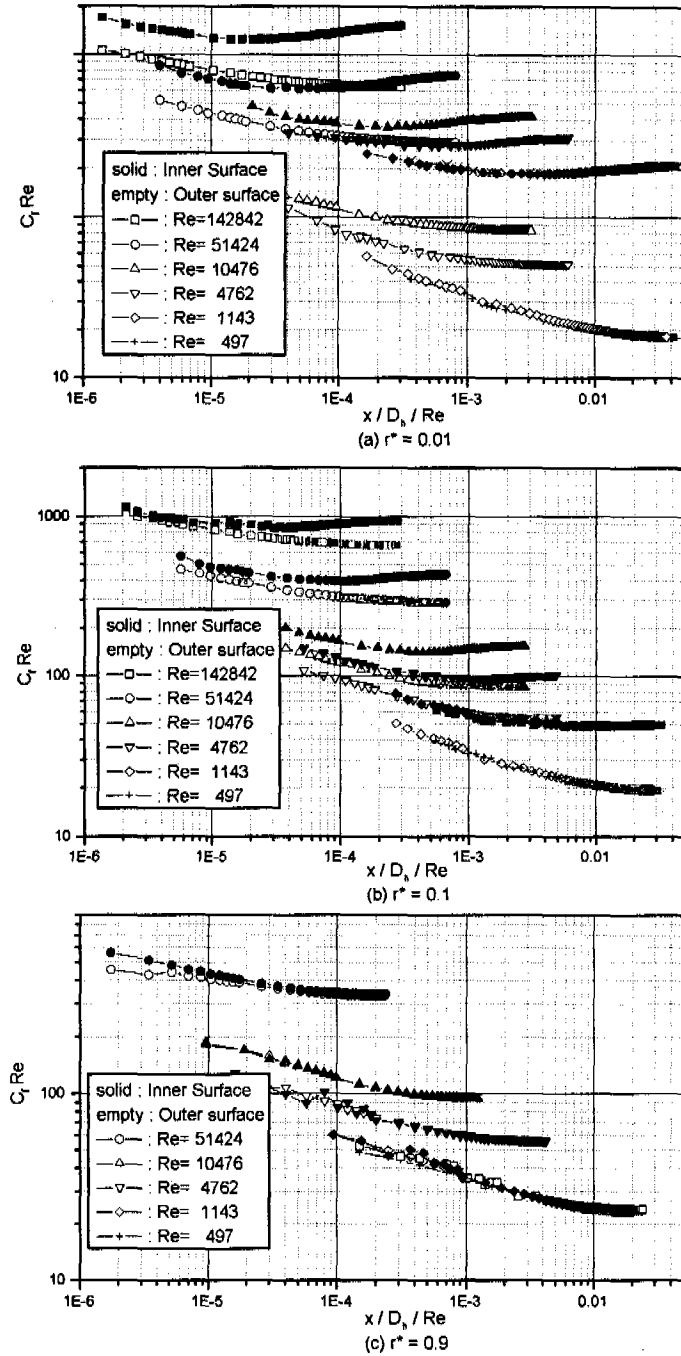


Fig.5. Friction Factor of the Entry Region for Various Reynolds Number.

난류의 경우, 내·외벽의  $C_{f,i} \cdot Re$  는,  $Re$  증가에 따라 함께 증가하나, 층류 범위 내에서  $C_{f,i}$  는  $Re$  에 따라 거의 변화 없고, 단지  $X$  와  $r^*$  에 대하여만 변화하고 있다. 또한 내면  $C_{f,i} \cdot Re$  는  $r^*$  가 감소할수록 증가하나, 외면의  $C_{f,o} \cdot Re$  는  $r^*$  가 증가할수록 증가하고 있다. 그 원인은, Fig.3 의 속도분포에서  $r^*$  가 작을수록 최대속도는 내측면에 근접하여 발생하므로 내측면에서 큰 전단력은 기대할 수 있는 반면,  $r^*$  가 증가할수록 최대속도는 내측면 근처에서 환상공간의 중심 축으로 이동하므로 외측면의 전단력이 증가하는 효과를 얻게되기 때문이다.

Fig.6 은  $r^* = 0.1$ ,  $Re \approx 5000$  에서 벽온이 유체 평균온도보다 높은 경우, 등은 및 일정 열유속 조건에서  $\bar{r}$  에 대한 무차원 온도분포를 나타낸 것이다. 온도의 무차원화는, 등은조건인 경우, 벽온도  $T_w$  와 유체 입구온도  $T_e$  의 차이로 무차원하여,  $(T - T_e) / (T_w - T_e) = \bar{T}$  로 표시하고,  $T_w$  는 내/외벽 온도 중, 높은 벽면 온도를 선택했다. 일정 열유속 조건에서는 벽면 열유속  $q_w$  와 전도열저항  $D_h/k$  로 인한 온도차로 무차원하여  $(T - T_e) / (q_w \cdot D_h/k) = \bar{T}$  로 표시했고,  $q_w$  역시, 높은 값의 벽면의 것을 사용했다.

Fig.6(a)의 등은조건에서는  $(T_{w,o} - T_e) / (T_{w,i} - T_e) = 0.5$ , 즉,  $T_{w,o} < T_{w,i}$  와 내/외면 온도가 서로 동일한  $T_{w,o} = T_{w,i}$  에 대하여 도시했다. 두 경우, 무차원 내측 벽온은 서로 같아도, 외측벽온이 낮으면, 유체 입구온도와 벽온도 간의 차이가 작으므로, 훨씬 먼저 완전성장 온도분포에 도달한다. 결과적으로,  $T_{w,o} < T_{w,i}$  경우, 유체 최저온도가 발생하는 위치도 공간의 중심에서 약간만 내측으로 이동했다. 한편,  $T_{w,o} = T_{w,i}$  인 경우, 최소온도 위치는 중심으로부터  $\bar{r}_T \approx 0.32$  까지 이동했고, 이 기간 중 유체도 상당한 온도까지 가열된 동시에 열적 입구영역 길이도 증가했다. 이와 같이 내/외면의 온도조건이 동일할 때의 최저온도 위치  $\bar{r}_T$  를, Fig.3(b) 의 최고속도 위치  $\bar{r}_u \approx 0.4$  와 비교하면, 서로 차이가 존재하지만, 난류 Prand 수,  $Pr_t = 0.7 \sim 0.9$  를 고려하면, 서로 일치함을 알 수 있다.

Fig.6(b) 에서는 내·외벽의 열유속비  $q_i/q_o = 0.5$  와 내벽이 단열된 경우의 성장과정에서 온도분포를 도시했다. 여기서도 내벽이 단열된 경우가 보다 빨리 완전성장 상태에 도달하며, 비록 내면조건이 서로 같지 않더라도, 외벽에서는 두 경우가 서로 동일한 경향 또는 동일한 온도구배를 갖고 성장하고 있음을 알 수 있다. 이것은 내·외면에 서로 다른 크기의 열유속 조건들이 존재하더라도, 각각의 면에 단열조건을 부여하여 구한 해를 중첩해도 원래의 해와 차이가 없다는 것을 의미한다. 또한 등은조건과는 달리 일정 열유속을 유지하기 위하여 하류로 진행할수록 벽온은 계속 증가하고 있으며, 단열면에서도 유체와 같은 온도로 가열되고 있다. 최저온도는,  $q_o > q_i$  에서, 등은 조건시보다 훨씬 더 내측벽으로 접근하여  $\bar{r} \approx 0.2$  에서 발생하며, 이는 최대속도가 내측으로 접근하려는 영향 외에 외측벽은 보다 내측벽온이 낮음으로 인한 추가적 효과 때문이다.

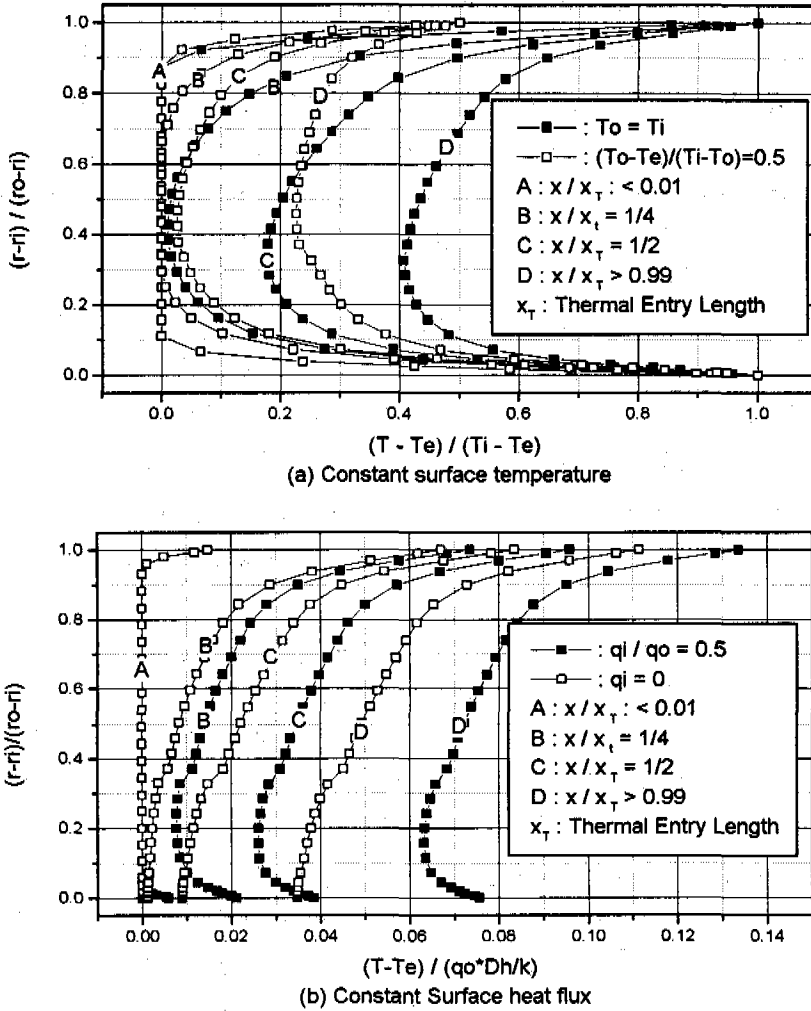


Fig.6. Temperature Profile for  $r^* = 0.1$  and  $Re = 10390$ .

Fig.7 은  $r^* = 0.01, 0.1, 0.9$  의 경우, 입구영역에서 내·외면의  $Nu$  (Nusselt No.) 와 무차원 유동방향 길이  $(x/D_h)/(Re \cdot Pr) = Z$  의 관계를 각  $Re$  에 대하여 계산한 결과이다.

열전달과 마찰계수는 상사성이 존재하므로 Fig.5 의  $C_f \cdot Re - X$  관계와 거의 유사한 관계를 얻었다. 전반적으로 내면의 열전달계수는 외면에 비하여 높으며, 그 차이는 내·외경비  $r^*$  가 커질수록 작아져서  $r^* = 0.9$  의 경우에는 서로 일치하고 있다. 입구에서는 벽면에서 불연속적인 온도 변화로  $Nu$  의 값은 무한대이지만, 환상관내로 진입한 즉시, 유동장내로의 열전달로 인한 연속적인 온도구배에 의하여 유한한  $Nu$  값을 가지며, 하류로 진행할수록 구배는 완만해져서  $Nu$  값이 점점 감소한다. 본 계산에서는 하류로 환상공간 폭만큼 유동하여, 하류  $Nu$  값이 상류 것의 0.01% 이내에서 감소했을 때를 열적 입구영역

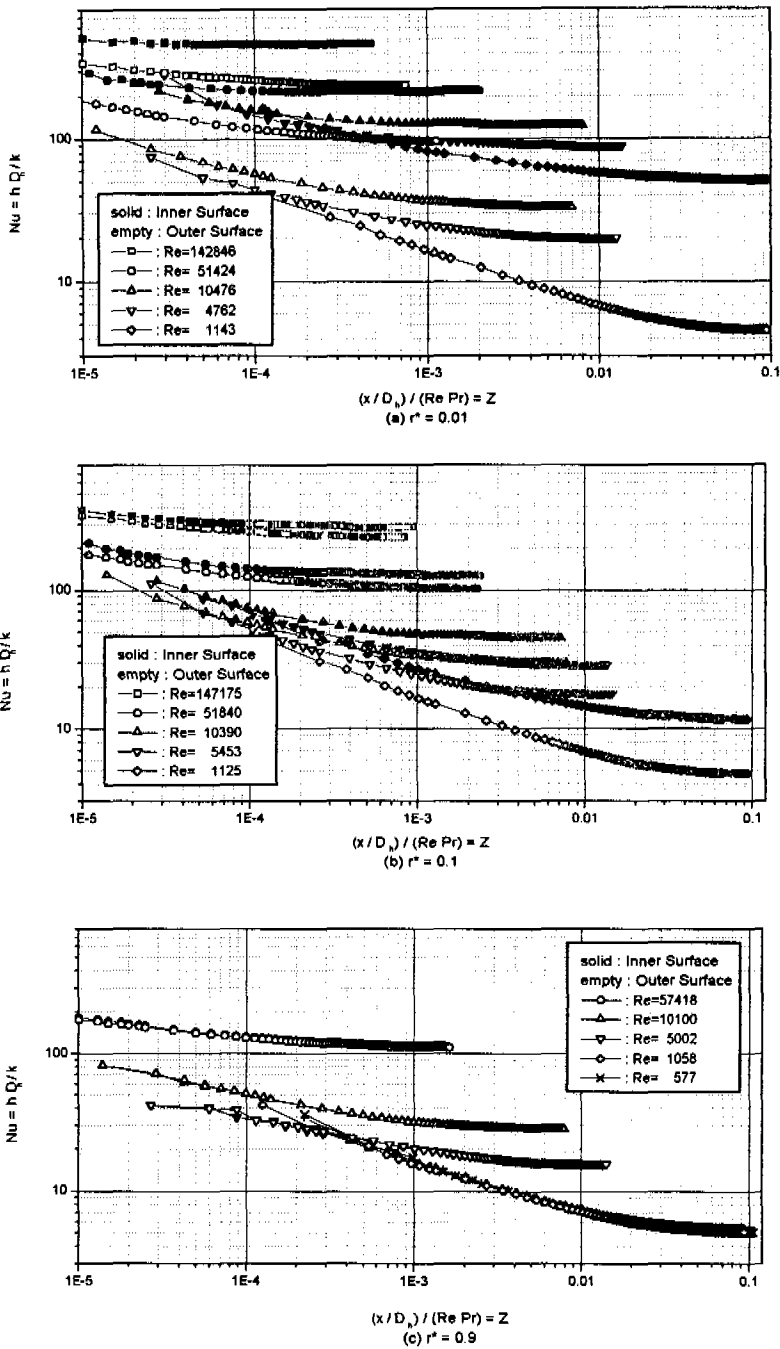


Fig.7. Nusselt number in the entry region for Various Reynolds Numbers.

이 끝난다고 고려하여 그 위치까지 계산했다.

총류영역에서 내/외면의 Nusselt 수,  $Nu_i$ ,  $Nu_o$  는, 마찰계수의 경우와 마찬가지로,  $Re$  수에 무관하며, Fig.7(a) 의 완전성장시  $Nu_o$  는 일정열유속 원형관의 완전성장 총류에서와 거의 같은 값을 갖으나,  $r^*$  가 증가할수록 약간씩 증가하고 있다. 난류의 경우, 내/외면의  $Nu$  값은 총류 경우보다 현저하게 증가하며, 특히  $r^*$  가 작아질수록  $Nu_i$  는 증가하고,  $Nu_o$  는 감소한다. 이것은 앞에서 언급한  $C_f \cdot Re$  의 변화 경향과 일치하는 것으로,  $r^*$  가 감소할수록 최저온도 발생 위치는 환상 공간 중심 위치로부터 내측면쪽으로 이동하기 때문인 것으로 해석된다. 그러나  $r^*$  가 작은 경우, Fig.5(a), (b)에서  $C_{f,i} \cdot Re$  의 최소값이 존재하는 것과 같이,  $Nu_i$  가 입구영역 어느 위치에서 최소가 되는 현상은 나타나지 않았으며, 그 원인은 수력학적 입구조건과 열적 입구조건이 서로 일치하지 않기 때문이다. 즉, 마찰력은, 벽면조건과 유체의 평균속도가 고정된 상태에서 전파되어, 내면이 외면에 의하여 영향을 받을수 있지만, 열전달은 벽면조건이 변할 수 있고, 또한 하류로 진행할수록 벽면들로부터의 열전달에 의하여 벽면과 유체 평균온도차이는 감소하므로, 외면의 열전달이 내면영역까지 영향을 미치지 못한다. 그러나 매우 낮은 Prandtl 수의 유체가 반경비가 작은 환형공간 내를 유동할 때는, 높은 열확산율로 인하여, 최소  $Nu_i$  가 존재할 수 있다.

#### 4. 결론

동심환상 공간 내/외 원통 반경비를 변화시키며, 수력학적 및 열적 입구 영역에서, 각  $Re$  수에 대한  $C_f$  및  $Nu$  의 변화 경향을 수치적으로 계산한 결과 다음의 결론을 얻었다.

우선, 유체의 최고 속도는 반경비가 작을수록, 또는 유동 통로가 넓어질수록, 내측 원통 벽쪽으로 이동하며, 이러한 경향은 내/외면이 동온, 또는 등열유속의 경우에도 동일한 과정으로 일어난다. 수력학적 입구 길이  $x_M/D_h$  는 반경비가 적어질수록, 또는  $Re$  가 증가할수록 증가하나, 천이영역에서는 난류와동의 비중이 증가하므로,  $Re$  증가에 따라 입구길이는 감소한다. 또한 반경비가 매우 작은 경우,  $C_{f,i}$  는 입구영역 내에서 최소치에 도달했다가 다시 증가하여 완전 성장 상태에 도달하지만,  $Nu_i$  는, 본 계산 범위 내에서, 계속 감소하며 완전 성장 상태에 도달했다. 그러나 매우 높은 열확산율을 갖는 유체에서는, 반경비가 매우 작은 경우, 외벽의 열전달이 내벽에까지 영향 미침에 의하여, 입구영역 내에서  $Nu_i$  도 최소치를 찾을수 있다. 한편, 내/외면의  $C_f$  와  $Nu$  는 전반적으로 내면의 값이 외면보다 높으며, 내면의  $C_{f,i}$  와  $Nu_i$  는 반경비  $r^*$  가 증가할수록 감소하는 반면, 외면의  $C_{f,o}$  와  $Nu_o$  는 증가하므로  $r^* = 1$  근처에서는 서로 동일한 값을 갖는다.

이상의 결과들은 수치적 계산에 의한 것이나, 반경비가 매우 작은 경우, 원관내 총류유동 실험 결과들과 잘 일치하고 있다. 그러나 난류 및 유한한 크기의 반경비에서는 후후의 실험적 결과들과의 비교 검토가 요구된다.

## 참고 문헌

1. W. M. Kays, "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw Hill, 1980
2. H. Schlichting, "Boundary Layer Theory". McGraw Hill, 1955
3. K. Murakawa, "Theoretical Solutions of Heat Transfer in the Hydrodynamic Entrance Length of Double Pipes", Bull. of JSME, Vol.3, No. 11, 1960
4. H. L. Langhaar, "Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube", Jour. Appl. Mech., V19(2), 1952
5. H. S. Heaton, "Heat transfer with Laminar Flow in Concentric Annuli with Constant Heat flux", NASA Report No. AHT-5, 1962
6. M. E. Crawford and W. M. Kays, "A program for Numerical Coputation of 2-Dim. Boundary Layer Flows", NASA Report No. HMT-23, 1975