

3차원 동전형상 계면균열에 대한 응력강도계수의 유한요소해석

주석재
기계공학부

<요 약>

J 적분을 이용하여 유한요소의 해에서 에너지해방률을 계산하여 3차원 계면균열에 대한 응력강도계수 K_I , K_{II} 를 추출하는 방법을 개발하였다. 균열선단에 아주 가까운 적분경로를 사용함으로써 3차원 균열문제에서 면 적분으로 주어지는 수정 항을 추가하지 않고도 선 적분만으로 간편하게 에너지해방률을 구하였다. 유한요소의 해에 이론 해를 중첩하였을 때 중첩하기 전후의 에너지해방률의 증가를 살펴 응력강도계수를 결정하였다. 평면 계면균열, 동전 계면균열에 대한 본 논문의 해를 기존 이론 해와 비교하여 본 방법의 타당성을 입증하였다.

Finite Element Analysis of Stress Intensity Factors for a Penny-Shaped Crack at the Bi-Material Interface

Seok Jae Chu
School of Mechanical Engineering

<Abstract>

A numerical method is presented for extracting stress intensity factors for a 3-D interface crack from the finite element solution by calculating energy release rates using the J-integral. An integration contour is selected sufficiently close to the crack tip to avoid calculating the contribution from complicated correction terms in 3-D crack problems. Stress intensity factors K_I , K_{II} are determined from the change in energy

release rates for the finite element solution perturbed by theoretical crack tip displacement field. Comparison of the present results to existing theoretical ones confirms the validity of the method.

1. 서론

계면균열(interface crack)이란 서로 다른 재료를 붙인 면이 부분적으로 떨어져 발생한 균열을 가리킨다. 계면균열에 대하여 균열선단 부근의 응력과 변위는 진동하며(oscillatory) 균열선단에서의 거리가 r 일 때 진폭이 각각 $r^{-1/2}$ 과 $r^{1/2}$ 에 비례하여 변한다. 응력강도계수 K_I , K_{II} 는 동시에 존재하고 K_I , K_{II} 에 대한 정의는 서로 약간씩 다른 여러 가지가 사용된다.

계면균열에 대한 K_I , K_{II} 를 구하는 방법으로는 복소함수를 이용한 해석적인 방법^(1, 2), 경계요소법^(3, 4), 유한요소법^(5, 6) 등이 사용된다. 이 중에서 유한요소법은 균열체의 다양한 형상이나 균열체에 작용하는 다양한 하중이 쉽게 표현되는 실용적인 방법이다. 유한요소법의 해를 얻은 뒤 여기에서 K_I , K_{II} 를 추출하는 방법으로는 균열면 절점의 변위를 균열선단 부근의 이론 변위장에 대입하는 직접법, 균열의 연장에 관한 에너지해방률을 이용하는 간접법이 사용된다. 2가지 방법 중에서 변위보다는 에너지해방률을 이용하는 쪽이 해의 정확도가 일반적으로 높다⁽⁶⁾.

가상 균열연장법(virtual crack extension method)⁽⁶⁾이나 J 적분법⁽⁷⁾ 등을 사용하면 에너지해방률이 쉽게 구해진다. 그러나 적분 영역 내에 체적력이나 열하중이 존재하거나 3차원 균열인 경우 복잡한 형태인 수정항을 추가시켜주어야 하는 불편함이 따른다⁽⁸⁾.

본 논문에서는 수정항을 추가시켜 주지 않는 대신 균열선단에 가까운 적분경로를 사용하여 3차원 계면균열에 대하여 K_I , K_{II} 를 정확하게 계산하는 방법을 시도하여 보고자 한다.

2. 계면균열에 대한 K_I , K_{II} 계산 원리

Fig. 1과 같이 서로 다른 등방체 1, 2의 계면에 존재하는 직선 균열에 대한 응력강도계수를 구하는 문제이다. 유한요소의 해에 이론 특이장을 중첩하여 응력강도계수를 추출하는 방법을 살펴보자. 본 논문에서 중첩의 원리는 Matos 등⁽⁶⁾의 방법을 이용하였지만 에너지해방률을 구하는 방법이 다르다. Matos 등은 가상 균열연장법을 이용하였지만 본 논문에서는 J 적분법을 이용하였으므로 에너지해방률을 균열선단 부근에서 계산하기가 유리하다.

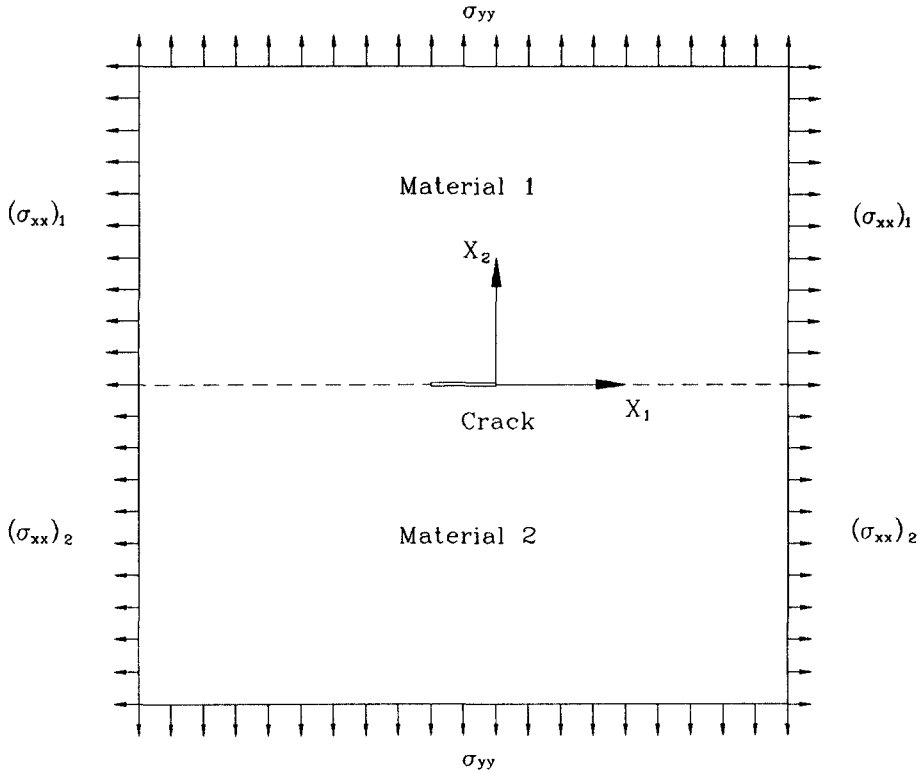


Fig. 1 A center crack at the bi-material interface in an infinite plate subjected to biaxial tension

Fig. 1과 같이 x_1 축이 균열의 전방을 가리키도록 정렬한 좌표계에 관하여 다음과 같이 정의된 J 적분은

$$J = \int_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) ds \quad (i, j = 1, 2) \quad (1)$$

계면균열에 대하여도 고유의 특성인 경로독립(path-independent)이 유지되며 선형탄성한도 내이면 J 적분치는 균열의 연장에 관한 에너지해방률을 가리킨다.

계면균열에 대하여 응력강도계수 K_I , K_{II} 는 약간씩 다르게 정의된 여러 가지가 사용된다. 본 논문에서는 Matos 등⁽⁶⁾이 정의한

$$K_I + iK_{II} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} (2\pi x_1)^{1/2} x_1^{-i\epsilon} (\sigma_{yy} + i\sigma_{xy}) \quad (2)$$

을 사용하려고 한다. 여기서

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{x_1 \mu_2 + \mu_1}{x_2 \mu_1 + \mu_2} \right] \quad (3)$$

x_i 는 $x_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$: 평면응력상태, $x_i = 3 - 4\nu_i$: 평면변형상태이고 μ_i 는 전단탄성계수이다.

이렇게 정의된 K_I , K_{II} 에 관하여 에너지해방률인 J 적분치는 다음과 같이 관련된다.

$$J = \alpha(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (4)$$

여기서

$$\alpha = \frac{(1/E_1' + 1/E_2')}{2 \cosh^2(\pi\epsilon)} \quad (5)$$

$E_i' = E_i$: 평면응력상태, $E_i' = E_i/(1-\nu_i^2)$: 평면변형상태이다.

유한요소의 해에 이론 특이장을 중첩하여 응력강도계수를 추출하기 위하여 Table 1과 같이 A~E 5 가지 상태에 대한 J 적분치 $J_A \sim J_E$ 의 관계를 살펴보자.

Table 1. Superposition of auxiliary theoretical solution and specific finite element solution

state	stress intensity factors	energy release rate J_i	explanation
A	ΔK_I	$\alpha(\Delta K_I)^2$	auxiliary theoretical solution
B	ΔK_{II}	$\alpha(\Delta K_{II})^2$	auxiliary theoretical solution
C	$(K_I + \Delta K_I), K_{II}$	$\alpha[(K_I + \Delta K_I)^2 + (K_{II})^2]$	superposed state (A+E)
D	$K_I, (K_{II} + \Delta K_{II})$	$\alpha[(K_I)^2 + (K_{II} + \Delta K_{II})^2]$	superposed state (B+E)
E	K_I, K_{II}	$\alpha[(K_I)^2 + (K_{II})^2]$	specific finite element solution

A와 B는 각각 특정치 $\Delta K_I, \Delta K_{II}$ 에 대한 이론적 균열선단 부근 특이해이고 E는 특정 유한요소의 해이다. C와 D는 각각 A와 E, B와 E를 중첩한 것이다.

중첩 후 상태 C(=A+E), D(=B+E)와 중첩 전 각각의 상태에 대한 J 적분치의 차를 계산하면 다음과 같다.

$$J_C - (J_A + J_E) = 2\alpha K_I \Delta K_I \quad (6)$$

$$J_D - (J_B + J_E) = 2\alpha K_{II} \Delta K_{II} \quad (7)$$

$\Delta K_I, \Delta K_{II}$ 는 특정치로서 임의로 주어지는 것이고 K_I, K_{II} 만 미지수이므로 K_I, K_{II} 가 각각 식(6)과 식(7)을 이용하여 결정된다. $\Delta K_I, \Delta K_{II}$ 는 K_I, K_{II} 에 보통 거의 영향을 주지 않는 것으로 나타났다.

3. 해석 예

A와 B는 J 적분치만 계산하면 되므로 적분경로가 통과하는 요소에 속한 절점에 대하여만 특정치 $\Delta K_I, \Delta K_{II}$ 를 이론 특이장에 넣어 구한 변위로 주었다. 이론 특이장은 Matos 등⁽⁶⁾의 논문 부록에 실린 것을 사용하였다. C와 D는 각각 A와 E, B와 E에 대한 변위를 단순히 더한 것으로 주어진다.

유한요소는 8절점 등매개변수 요소를 사용하였고 균열선단이 속한 변의 중간절점은 1/4점에 옮겨주었다. 적분경로는 Fig. 2와 같이 Gauss 수치적분점을 통과하도록 취하였고 수

치적분 차수는 2×2 를 사용하였다.

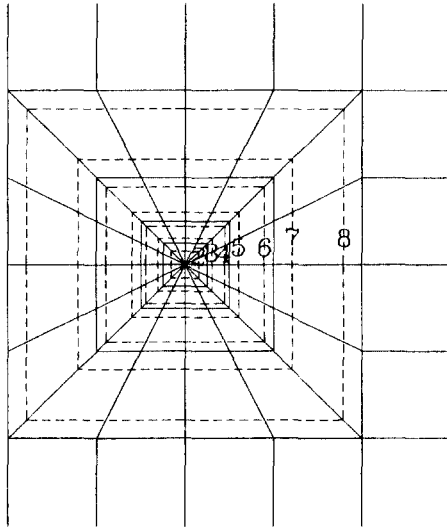


Fig. 2 An example of integration contours in the vicinity of a crack tip.

3. 1 무한평판 중앙 계면균열 문제

본 논문에서 사용한 방법의 타당성을 확인하기 위하여 인장응력 하의 평면응력상태인 무한평판에 존재하는 중앙균열문제를 다루어 보았다. Fig. 3과 같이 균열의 길이가 $2a$ 일 때 $20a \times 20a (=2w \times 2h)$ 인 정사각형 유한평판으로 범위를 정하고 좌우대칭성을 이용하여 $10a \times 20a (=w \times 2h)$ 인 직사각형 내부 범위만 유한요소망을 생성하였다.

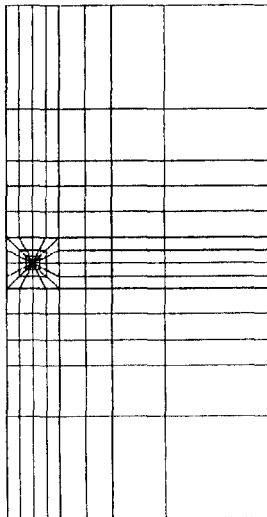


Fig. 3 Finite element mesh for a center crack in a $10a \times 20a$ plate.

Fig. 3에서 유한요소망을 살펴보면 중앙대칭면인 좌변에서 균열선단까지 요소를 1/2씩 줄여가며 배치하였다. 균열선단을 포위한 16 개의 요소로 구성된 요소 고리는 모두 4 개를 배치하였다. 수치적분 차수로 2×2 를 사용하였으므로 각 고리에 대하여 2 개의 적분경로가 생겨, Fig. 2와 같이 적분경로는 모두 8 개이다.

Rice와 Sih⁽¹⁾와 같이 균열선단 전방 계면($x > 0, y = 0$)을 넘으며 ϵ_{xx} 가 연속인 조건

$$(\epsilon_{xx})_1 = (\epsilon_{xx})_2 \quad (8)$$

즉,

$$\frac{(\sigma_{xx})_1 - \nu_1 \sigma_{yy}}{E_1} = \frac{(\sigma_{xx})_2 - \nu_2 \sigma_{yy}}{E_2} \quad (9)$$

을 만족하게 하였다. 위 식을 이용하여 $\sigma_{yy} = (\sigma_{xx})_1 = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.30$ 일 때 $(\sigma_{xx})_2$ 를 Table 2와 같이 정하였다.

각 적분경로에 대한 결과인 K_I, K_{II} 를 Fig. 4에 균열선단에서 적분경로까지의 거리에 대하여 그려보았다. $E_1/E_2 = 10, 100, 1000$ 경우는 $E_1/E_2 = 1$ 인 경우와 다른 특성을 보였다. 적분경로가 균열선단에 접근한 1, 2번째 경로(Fig. 2에 표시)에 대한 결과를 보면 $E_1/E_2 = 1$ 인 경우는 거의 일정하였지만 $E_1/E_2 = 10, 100, 1000$ 경우는 심하게 변동하였다. 3차원 균열문제에 대하여 본 논문에서 사용하려는 방법에서는 균열선단에 가능한 한 가까운 적분경로를 사용하는 것이 필요하므로 결과가 안정적이면서 균열선단에 접근한 3번째 경로(Fig. 2에 표시)에 대한 결과를 Table 2에 이제까지 발표된 다른 사람의 결과와 비교하여 보았다.

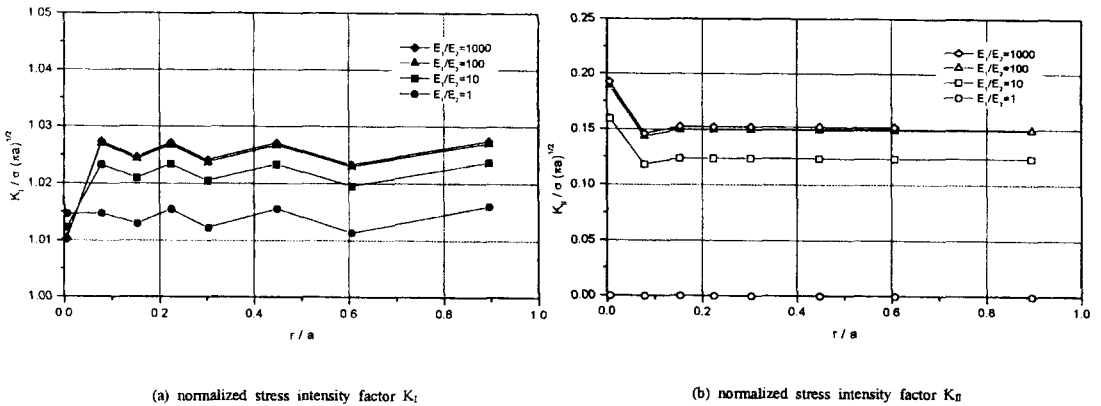


Fig. 4 Variation of normalized stress intensity factors as the integration contour

approaches to the crack tip.

Table 2. Stress intensity factors for center cracks at the bi-material interface

E_I/E_2	$(\sigma_{xx})_2$	present		Matos et al ^(b)		Lin and Mar ^(b)		Rice and Sih ⁽¹⁾	
		$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$
1	1.00	1.0130	0.0000					1.0000	0.0000
		1.0130*	0.0000*			1.010*	0.0000*	1.0000*	0.0000*
10	0.37	1.0210	-0.1239	1.0217	-0.1236			1.0101	-0.1222
		0.9783*	-0.1187*			0.975*	-0.1176*	0.9678*	-0.1171*
100	0.31	1.0242	-0.1498	1.0251	-0.1489			1.0148	-0.1481
		0.9621*	-0.1408*			0.959*	-0.1395*	0.9532*	-0.1391*
1000	0.30	1.0246	-0.1528					1.0154	-0.1510
		0.9601*	-0.1432*			0.957*	-0.1418*	0.9515*	-0.1415*

* 표시한 수치는 Rice와 Sih가 정의한 응력강도계수로 환산한 것임. 아무 표시도 없는 수치는 Matos 등이 정의한 것임.

계면균열에 대한 K_I , K_{II} 는 여러 가지로 정의되어 사용되어 왔기 때문에 Matos 등⁽⁶⁾이 정의한 것과 Rice와 Sih⁽¹⁾가 정의한 것이 다르다. Table 2에서 *표시한 수치는 Rice와 Sih가 정의한 것으로 환산한 것을 가리킨다. Rice와 Sih의 이론 해와 비교하여 본 논문의 결과는 최대 1.4%의 오차를 보였다. 본 논문과 비슷한 방법과 유한요소망을 사용한 Matos 등의 결과도 최대 1.1%의 오차를 보였다. Matos 등의 논문을 보면 $20a \times 20a$ 인 평판보다 가로 세로가 2 배인 $40a \times 40a$ 인 평판에 대한 결과는 Rice와 Sih의 결과에 0.3%의 오차로 접근하였으므로 본 논문의 방법에 대하여도 같은 효과가 기대된다. Hybrid 균열요소를 사용한 Lin과 Mar⁽⁵⁾의 결과가 최대 1.0%의 오차를 보인 것에 비하면 일반 요소를 사용하여 1.4%의 오차를 보인 것은 상당히 양호한 것이라고 본다.

3. 2 축대칭 균열문제 (재료 1, 2가 서로 같은 경우)

다음은 3차원 축대칭 균열문제에 본 논문의 방법을 적용하여 보았다. 먼저 재료 1과 2가 같은 축대칭 균열문제를 풀어 보았다. Fig. 5와 같이 균열의 지름이 $2a$ 일 때 $8a \times 16a (=2w \times 2h)$ 인 정사각형 유한평판으로 범위를 정하고 축대칭성을 이용하여 $4a \times 16a (=w \times 2h)$ 인 직사각형 내부 범위만 유한요소망을 생성하였다.

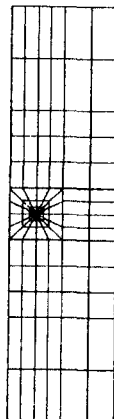


Fig. 5 Finite element mesh for a penny-shaped crack in $4a \times 16a$ cylinder.

3차원 축대칭 균열문제에 대하여는 선 적분인 J 적분 외에도 DeLorenzi⁽⁸⁾가 제안한 것처럼 Hoop stress를 고려한 면 적분을 계산하여야 한다. 그러나 본 논문에서는 이런 면 적분을 추가하지 않는 대신 중앙대칭축에서 균열선단까지 요소를 1/2씩 줄여가며 균열선단을 포위한 요소 고리를 더 많이 배치하여 균열선단에서 3번째 가까운 적분경로를 균열선단에 접근시키는 방법을 시험하였다. 상업용 Pre-processor를 사용하면 이 작업은 쉽게 이루어진다.

축대칭 균열문제에 대하여 에너지해방률 J 와 응력강도계수 K_I 의 관계는 DeLorenzi⁽⁸⁾와 같이 평면변형 상태를 가정하여

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (10)$$

를 사용하였다. $\nu = 0.30$ 인 경우를 다루었다.

Fig. 6에 요소 고리를 4 개에서 10 개까지 늘려보았을 때의 결과를 그렸다. 요소 고리가 4 개인 경우 이론 해와 오차가 4.6%이었으나 요소 고리가 10 개인 경우 오차가 0.4%에 불과하였다.

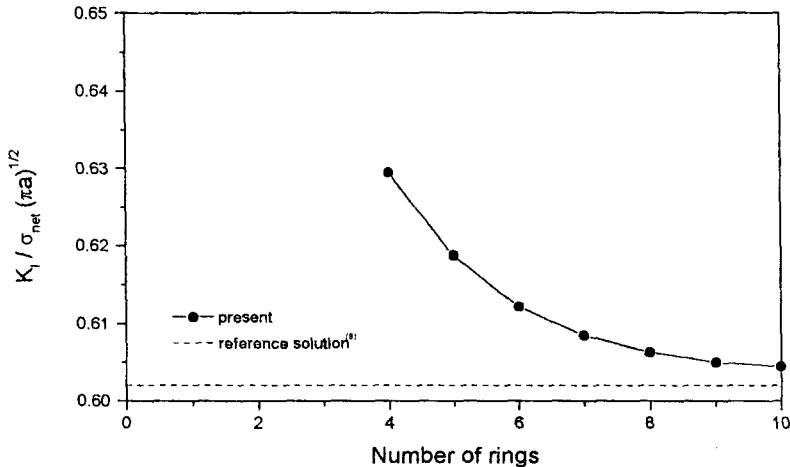


Fig. 6 Convergence of stress intensity factors during mesh refinements.

3. 3 무한체 속 동전계면균열 문제

다음 인장응력 하의 3차원 무한체 속의 동전계면균열을 축대칭 균열문제로 다루었다. 요소 고리는 10 개인 경우이다. 균열의 지름이 $2a$ 일 때 $20a \times 20a (=2w \times 2h)$ 인 정사각형 유한평판으로 범위를 정하고 축대칭성을 이용하여 $10a \times 20a (=w \times 2h)$ 인 직사각형만 유한요소망을 생성하였다.

균열선단 전방 계면 ($r > 0, z = 0$)을 넘으며 ϵ_{rr} 가 연속인 조건

$$(\epsilon_{rr})_1 = (\epsilon_{rr})_2 \quad (11)$$

즉,

$$\frac{(\sigma_{rr})_1 - \nu_1[(\sigma_{\theta\theta})_1 + \sigma_{zz}]}{E_1} = \frac{(\sigma_{rr})_2 - \nu_2[(\sigma_{\theta\theta})_2 + \sigma_{zz}]}{E_2} \quad (12)$$

을 만족하게 하였다. 위 식을 이용하여 $\sigma_{zz} = (\sigma_{rr})_1 = (\sigma_{\theta\theta})_1 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.30$ 일 때 $(\sigma_{rr})_2$ 를 Table 3과 같이 정하였다. 축대칭문제이므로 $(\sigma_{\theta\theta})_2$ 는 $(\sigma_{rr})_2$ 와 같게 작용하였다.

본 논문에서 사용한 Matos 등⁽⁶⁾이 정의한 계면균열에 대한 K_I , K_{II} 는 축대칭 계면균열에 대하여 Kassir와 Sih⁽²⁾가 정의한 것이 다르기 때문에 K_I , K_{II} 는 직접 비교가 되지 않지만 $\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ 은 같게 되는 것이 확인되어 이것을 Table 3에 비교하여 보았다. 오차가 최대 0.3%에 불과하였다.

Table 3 Stress intensity factors for penny-shaped cracks at the bi-material interface

E_1/E_2	$(\sigma_{rr})_2$	present			Kassir and Sih ⁽²⁾
		K_I	K_{II}	$\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$	$\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$
1	1.0000	1.1300	0.0000	1.130	1.128
2	0.7143	1.1320	-0.0597	1.134	1.131
5	0.5429	1.1340	-0.1200	1.140	1.138
20	0.4571	1.1367	-0.1642	1.149	1.145
100	0.4343	1.1378	-0.1784	1.152	1.149

4. 결론

3차원 계면균열에 대하여 유한요소의 해에서 에너지해방률을 이용하는 간접법을 사용하여 응력강도계수 K_I , K_{II} 를 추출하였다. 보조 이론 해와 유한요소의 해를 중첩하였을 때 중첩 전후 에너지해방률의 변화를 이용하였다.

에너지해방률을 계산할 때 균열선단에 접근한 적분경로를 사용하는 방법을 사용하여 3차원 균열인 경우 필요한 Hoop stress의 기여항을 추가하지 않고도 정확하게 계산됨을 입증하였다. 3차원 동전계면균열에 대한 이론 해와 비교하여 오차가 0.3%에 불과하였다. 이 방법은 체적력이나 열 하중이 존재하는 문제에 대하여도 효과적으로 사용될 것이다.

참고 문헌

- (1) Rice, J. R. and Sih, G. C., "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Materials," Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics, pp.418~423, 1965.
- (2) Kassir, M. K. and Sih, G. C., Three-dimensional crack problems, Noordhoff International Publishing, 1975.
- (3) Lee, K. Y. and Choi, H. J., "Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Bimaterial Interface Cracks," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 29, No. 4, pp.461~472, 1988.
- (4) Tan, C. L. and Gao, Y. L., "Axisymmetric Boundary Integral Equation Analysis of Interface Cracks between Dissimilar Materials," Computational Mechanics, Vol. 7, pp.381~396, 1991.
- (5) Lin, K. Y. and Mar, J. W., "Finite Element Analysis of Stress Intensity Factors for Cracks at a Bi-Material Interface," International Journal of Fracture, Vol. 12, No. 4, pp.521~531, 1976.
- (6) Matos, P. P. L., McMeeking, R. M., Charalambides, P. G. and Dropy, M. D., "A Method for Calculating Stress Intensities in Bimaterial Fracture," International Journal of Fracture, Vol. 40, No. 4, pp.235~254, 1989.
- (7) 주석재, "안정 피로성장 중인 표면균열 형상변화의 해석," 대한기계학회 논문집(A) 제 20권 제9호, pp.2843~2853, 1996.
- (8) DeLorenzi, H. G., "Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 21, No. 1, pp.129~143, 1985.