울산대학교 연구논문집 제21권(자연과학·공학편) 제1호 pp. 7 ~ 10, 1990.
UOU Report Vol.21, (Natural Science and Engineeing) No.1, pp. 7 ~ 10, 1990.
University of Ulsan

Randon Threshold를 가진 부품의 정기 검사하에서 최적 교환 정책

공 명 복
산 업 공 학 과

〈요　　약〉

부품은 시간에 따라 연속적으로 마모되어 마모가 Random Threshold를 능가하면 고장을 일으킨다. 부품은 정기적으로 행하는 검사 시점에서 어떤 마모 수준을 넘으면 예방 교환된다. 고장나면 즉시 교환된다. 단위 시간당 평균 비용을 최소화하는 최적 교환 수준을 유도하였다. 고장 빈도 함수가 Logarithmically Convex Density인 경우 예방 교환을 하지 않는 것이 최적 정책이다.

Optimal Replacement Policy Under Periodic Inspections For An Item With Random Threshold

Gong, Myung-Bock
Dept. of I. E.

〈Abstract〉

An item fails when it wears continuously on time beyond a random threshold. The item is preventively replaced if the wear at periodic inspections exceeds a certain wear level. Upon failure, it is replaced immediately. The optimal wear level for preventive replacement which minimiges the long-run average cost per unit of time is derived. In case of logarithmically convex density of failure, no preventive replacement policy is optimal.

Ⅰ. 서　　론

부품은 사용중 성능의 저하로 고장을 일으키며 사용중인 부품의 고장은 경제적 손실이나 위험을 초래하므로 고장을 일으키기 전에 부품을 교환하는 것이 좋다. 그러나 부품의 성능의 저하가 측정 가능한 누적된 마모량에 의하며 마모량에 의존하여 부품의 고장이 발생한다면 부품의 사용기간에 의하여 교환하는 수명교환정책보다 누적된 마모량에 의하여 교환하는 정책이 더 경제적이다.

Zuckerman(5), Park(4)은 마모량의 증가가 시간에 따라 동일한 분포를 갖는 Stationary Independent Increments 과정일 때 각각의 마모량에 임의의 고장수준을 갖는 Random Threshold를 가정하고 마모량을 계속적으로 측정하는 경우에 마모량에 의한 최적 교환에 대하여 연구하였다.

A Hameed(1)는 마모량의 증가가 Pure Jump 과정일 때 Random Threshold 가정하에서 정기적으로 행하는 검사에 의해서만 마모량의 측정이 가능하고 부품의 고장까지도 검사에 의해서만 알 수 있는 경우에 측정된 마모량에 의한 최적 교환을 연구하였다.

Park (3)은 마모량의 증가가 Stationary Independent Increments 과정인 때 각각의 마모량에서 일정한 고장수준을 갖는 Fixed Threshold 가

정하에서 정기적으로 행하는 검사에 의해서만 마모량의 측정이 가능하며 부품의 고장은 검사에 의하지 않고도 알 수 있는 경우에 측정된 마모량에 의한 최적 교환에 대하여 연구하였다.

본 연구는 마모량의 증가가 Stationary Independent Increments 과정일 때 Random Threshold 가정하에서 정기 검사에 의해서만 마모량의 측정이 가능하고 부품의 고장은 검사에 의하지 않고도 알 수 있을 때 측정된 마모량에 의한 최적 교환에 대한 것이다. 이것은 〔3〕의 결과에 대한 일반화이다.

II. 모 형 화

부품의 마모량은 0인 상태에서 시작해서 시간에 대해 연속적으로 누적되며 단위 시간당 마모율은 항상 일정하다;마모량의 증가는 Non-Negative Stationary Independent Increments 과정이다. 이때 각각의 마모량에서 고장을 일으키는 고장수준은 Random Variable이며 마모량이 증가함에 따라 확률적으로 감소한다 ; 마모량이 증가함에 따라 고장날 확률이 증가한다. 정기적으로 행하는 검사 때에 고장나지 않은 부품의 마모량이 일정한 수준 이상이면 예방 교환을 하고 그렇지 않으면 계속 사용한다. 검사와 교환에 소요되는 시간은 무시한다. 만일 사용중 부품이 고장나면 즉시 교환하고 새로운 주기가 계속된다.

〔기 호〕

C : 부품의 교환 비용

C_1 : 1회의 검사 비용

K : 사용중 고장으로 발생하는 손실 $(K>C_1)$

$G^t(x)$: 시간 $[0,t]$에서 누적된 마모량의 분포함수, $G^0(x)=1,\ x\geq 0,\ G^t(0)=0,\ t>0$

$g^t(x)$: $\frac{\partial}{\partial x}G^t(x)$

$M(x)$: $\sum_{j=1}^{\infty} G^j(x),\ M(0)=0$

$m(x)$: $M'(x)=\sum_{j=1}^{\infty} g^j(x)$

$H(x)$: 마모량이 x일때 고장이 발생할 확률

$h(x)$: $H'(x)$

$\bar{H}(x)$: $1-H(x)$

r : 예방 교환을 위한 마모수준$(0\leq r<\infty)$

$C(r)$: 교환 주기당 평균 비용

$L(r)$: 교환 주기의 평균 시간

$\tilde{C}(r)$: 단위 시간당 평균 비용

$F_x(t)$: 마모량이 x가 되기 위해 소요되는 시간의 분포함수, $F_0(t)=1,\ t>0$

$f_x(t)$: $\frac{\partial}{\partial t}F_x(t)$

마모 과정이 Stationary Independent Increments 과정이므로 $g^{t+s}(x)=\int_0^x g^t(x-y)g^s(y)dy,\ s\geq 0,\ t\geq 0$이다. 마모량이 증가함에 따라 고장날 확률이 변화하므로 마모량이 x일때 새로운 마모량이 y가 누적되어 총 마모량이 $(x+y)$가 되었을 때 고장을 일으킬 확률은 $[H(x+y)-H(x)]/\bar{H}(x)$이다.

검사 시간 간격을 시간의 단위로 사용하여도 무방하므로 마모량은 $t=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ 에서 검사된다. 이때 부품이 사용되기 시작하여 고장으로 인하여 교환되거나 검사 시점에서 교환되는 교환 주기를 생각하자. 그러면 교환 주기당 평균 비용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}C(r)&=(K+C)\int_0^r H(x)g^1(x)dx+(C+C_1)\int_r^\infty \bar{H}(x)g^1(x)dx\\&+(K+C+C_1)\int_0^r dx\int_0^\infty (H(x+y)-H(x))g^1(y)g^1(x)dy+(C+2C_1)\int_0^r dx\int_{r-x}^\infty \bar{H}(x+y)g^1(y)g^1(x)dy\\&+(K+C+2C_1)\int_0^r dx\int_0^\infty (H(x+y)-H(x))g^1(y)g^2(x)dx+(C+3C_1)\int_0^r dx\int_{r-x}^\infty \bar{H}(x+y)g^1(y)g^2(x)dy+\cdots\cdots\\&=(K+C)\int_0^r H(x)g^1(x)dx+(C+C_1)\int_r^\infty \bar{H}(x)g^1(x)dx\\&+\sum_{j=1}^{\infty}(K+C+jC_1)\int_0^r dx\int_0^\infty (H(x+y)-H(x))g^1(y)g^j(x)dy+\sum_{j=1}^{\infty}(C+(j+1)C_1)\int_0^r dx\int_{r-x}^\infty \bar{H}(x+y)g^1(y)g^j(x)dy\end{aligned} \quad (1)$$

한편 다음의 관계식이 성립한다.

$$g^1(r)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^r (1-g^1(r-x))g^j(x)dx \quad (2a)$$

$$m(r)=\sum_{j=1}^{\infty} j\int (1-g^1(r-x))g^j(x)dx \quad (2b)$$

(2a), (2b)를 이용하여 (1)을 정리하면 다음과 같다.

$$C(r)=C+K\ [\int_0^{\infty}H(x)g^1(x)dx+\int_0^r dx\int_0^{\infty}(H(x+y)-H(x))\ g^1(y)m(x)dy]+C_1[\int_0^{\infty}\bar{H}(x)g^1(x)dx+\int_0^r dx\int_0^{\infty}\bar{H}(x+y)g^1(y)m(x)dy] \quad (3)$$

또한 교환 주기의 평균 시간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}L(r)=&\int_0^1 dt\ \ t\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}H(x)g^t(x)dx+\int_r^{\infty}\bar{H}(x)g^1(x)dx+\int_0^1 dt(1+t)\frac{d}{dt}\int_0^r dx\int_0^{\infty}(H(x+y)-H(x))g^t(y)g^1(x)dy+2\int_0^r dx\int_{r-x}^{\infty}\bar{H}\\&(x+y)g^1(y)g^1(x)dy+\int_0^1 dt(2+t)\frac{d}{dt}\int_0^r dt\int_0^{\infty}(H(x+y)-H(x))g^1(y)g^2(x)dy+3\int_0^r dx\int_{r-x}^{\infty}\bar{H}(x+y)g^1(y)g^2(x)dy+\cdots\cdots\\=&\int_0^1 dt\ \ t\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}H(x)g^t(x)dx+\int_r^{\infty}\bar{H}(x)g^j(x)dx+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 dt(j+t)\frac{d}{dt}\int_0^r dx\int_0^{\infty}(H(x+y)-H(x))g^t(y)g^j(x)dy+\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\int_0^r dx\int_{r-x}^{\infty}\\&\bar{H}(x+y)g^t(y)g^j(x)dy\end{aligned} \quad (4)$$

마모량의 분포함수와 시간의 분포함수 사이에는 $G^t(x)+F_x(t)=1$이 성립하므로 이 사실과 (2a), (2b)를 이용하여 (4)를 정리하면 다음과 같다.

$$L(r)=\int_0^1 dt\int_0^{\infty}\bar{H}(x)g^t(x)dx+\int_0^1 dt\int_0^r dx\int_0^{\infty}\bar{H}(x+y)g^t(y)m(x)dy \quad (5)$$

따라서 단위 시간당 평균 비용은 다음과 같다.

$$\tilde{C}(r)=\frac{C(r)}{L(r)} \quad (6)$$

여기서 특수한 경우로 $r=0$과 $r=\infty$일 때 $C(r)$과 $L(r)$을 구하면 다음과 같다.

$$C(0)=C+K\int_0^{\infty}H(x)g^1(x)dx+C_1\int_0^{\infty}\bar{H}(x)g^1(x)dx \quad (7a)$$

$$L(0)=\int_0^1 dt\int_0^{\infty}\bar{H}(x)g^t(x)dx \quad (7b)$$

$$C(\infty)=C+K+C_1\int_0^{\infty}\bar{H}(x)m(x)dx \quad (8a)$$

$$L(\infty)=\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}\bar{H}(x)g^t(x)dx \quad (8b)$$

(7a), (7b)는 사용중 고장을 일으키어 교환되든지 아니면 무조건 1회 검사 시점에서 예방 교환하는 경우 교환 주기당 평균 비용과 평균 시간을 나타내고 (8a), (8b)는 검사 시점에서 예방 교환되는 것이 없이 사용중 고장을 일으켜서 교환되는 교환 주기당 평균 비용과 평균 시간을 나타낸다.

III. 최적 교환 수준

(6)의 $\tilde{C}(r)$을 r에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\tilde{C}'(r)=\{[K\int_0^{\infty}(H(r+y)-H(r))g^1(y)m(r)dy+C_1\int_0^{\infty}\bar{H}(r+y)g^1(y)m(r)dy]\ L(r)-[\int_0^1 dt\int_0^{\infty}\bar{H}(r+y)g^t(y)m(r)dy]C(r)\}/L^2(r) \quad (9)$$

$r\geqq 0$일때 $m(r)/L^2C(r)\neq 0$이므로 (9)를 $m(r)/L^2(r)$로 나누면 최적 교환 수준 r^*는 다음의 $\hat{C}(r)=0$을 만족시켜야 한다.

$$\hat{C}(r)=[K\int_0^{\infty}(H(r+y)-H(r))g^1(y)dy+C_1\int_0^{\infty}\bar{H}(r+y)g^1(y)dy]L(r)-[\int_0^1 dt\int_0^{\infty}\bar{H}(r+y)g^t(y)dy]C(r) \quad (10)$$

한편 $r=0$과 $r=\infty$일때 $C(0)$와 $C(\infty)$는 다음과 같다.

$$\hat{C}(0)=-C\int_0^1 dt\int_0^{\infty}\bar{H}(y)g^t(y)dy<0 \quad (11a)$$

$$\hat{C}(\infty)=0 \quad (11b)$$

따라서 $\hat{C}(r)$은 $H(\cdot)$에 관계없이 $\hat{C}(0)$는 음이고 $\hat{C}(\infty)$는 0이다. 그런데 (10)의 해의 존재와 해가 존재하는 경우 유일성을 알아보기 위하여 $\hat{C}(r)$을 r에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\hat{C}'(r)=[(K-C_1)\int_0^{\infty}h(r+y)g^1(y)dy-Kh(r)]L(r)+[\int_0^1 dt\int_0^{\infty}h(r+y)g^t(y)dy]C(r) \quad (12)$$

r의 변화에 대한 $\hat{C}'(r)$의 변화는 $h(\cdot)$에 달려 있으므로 신뢰도 분석에서 많이 다루어지는 밀도함수로써 $h(\cdot)$이 주어지는 경우 $\hat{C}(r)=0$의 해의 존재와 유일성에 대하여 알아보자.

① $h(y)=\delta(y-b)$인 경우

$H(y)$가 y가 b미만이면 항상 0이고 b이상이면 항상 1인 경우로 마모가 일정한 수준 b미만이면 절대로 고장을 일으키지 않고 b이상이면 무조건 고장을 일으키는 경우로 Fixed Threshold를 가지는 경우이다. 이때 (12)는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{C}'(r)=[(K-C_1)g^1(b-r)]L(r)+[\int_0^1 g^1(b-r)\,dt]C(r) \tag{13}$$

여기서 $\hat{C}'(r)$은 $r\epsilon(0, b)$에서 항상 양이므로 $\hat{C}(r)$은 증가 함수이고 (11a)에서 $\hat{C}(0)<0$이고 $\hat{C}(b)=KL(b)>0$이므로 $\hat{C}(r)$은 (0, b)에서 아래에서 위로 0을 한번만 통과하므로 (10)의 유일한 해가 존재하며 그 해는 최적 교환 수준이 된다. 이 경우 모든 결과는 Park[3]과 일치한다.

② $h(y)$가 Logarithmically Convex Density인 경우

$h(y)$는 감소 고장률을 가지며 $h(0)\neq 0$이다. 여기에 속하는 밀도함수는 지수 밀도함수, Shape Parameter가 (0, 1)일 때 Gamma Density등 이다. 이 때 $h(r+y)/h(r)$가 $y\geq 0$일때 $r\geq 0$에 대하여 증가 함수이다. (12)의 $\hat{C}'(r)$을 $h(r)$로 나누면 다음과 같다.

$$\hat{C}'(r)/h(r)=[(K-C_1)\int_0^\infty (h(r+y)/h(r))g^1(y)\,dy-K]L(r)+[\int_0^1 dt\int_0^\infty (h(r+y)/h(r))g^t(y)\,dy]C(r) \tag{14}$$

$h(r+y)/h(r)$가 r에 대하여 증가 함수이므로 $\hat{C}'(r)/h(r)$은 r에 대하여 증가 함수이다.

만약 모든 r에 대하여 $\hat{C}'(r)/h(r)\leq 0$라고 하면 $h(r)>0$이므로 $\hat{C}'(r)\leq 0$이다 따라서 $\hat{C}(r)$은 감소 함수가 되는데 이것은 (11a), (11b)에 모순된다. 그러므로 어떤 r_1에 대하여 $\hat{C}'(r_1)/h(r_1)>0$이다. 그런데 $\hat{C}'(r)/h(r)$은 r에 대하여 증가 함수이므로 $r_1\leq r$에 대하여 $\hat{C}'(r)/h(r)>0$이다. 따라서 $r_1\leq r$에 대하여 $\hat{C}(r)$은 증가 함수이고 $\hat{C}(\infty)=0$이므로 $r^*=\infty$이다.

IV. 결 론

부품의 마모가 시간에 따라 연속적으로 발생하여 부품의 고장 확률이 마모된 양의 증가에 따라 증가하는 경우 정기 검사 시점에서 부품 교환을 위하여 사용하여야 할 최적 교환 수준을 신뢰도 분석에서 많이 다루어지는 2종류 밀도 함수에 대하여 존재하고 유일함을 보였다. 특히 Logarithmically Convex Density의 경우 예방 교환을 하지 않는 것이 최적 정책임이 밝혀졌다. 그러나 Logarithmically Concave Desity의 경우는 증명하지 못하였으며 이것은 계속적인 연구를 필요로 한다. 또한 예방 교환 정책에 대한 필요 조건도 밝혀져야 한다.

참 고 문 헌

1. A-Hameed, M.(1987) Inspection and maintenance policies of devices subject to deterioration. Adv. Appl. Prob. 19, 917~931.
2. Barlow, R. and Froschan, F.(1965) Mathematical Theory of Reliability. John Wiley & Sons, Inc.
3. Park, K.S.(1988) Optimal continuous-wear limit replacement under periodic inspections. IEEE Rel.37, 97~102.
4. Park, K.S.(1988) Optimal wear-limit replacement with wear-dependent failures IEEE. Rel. 37, 293~294.
5. Zuckerman, D. (1978) Optimal replacement policy for the case where the damage process is a one-sided Lévy process. Stoch. Proc. Appl. 7, 141~151.