UIT Report Vol. 14, No. 2, pp. 293~297, 1983　　연구논문집 제14권 제 2 호 pp. 293~297, 1983

멱수요율함수를 취하는 제품의 주문정책결정

주 상 윤
산 업 공 학 과
(1983. 4. 30 접수)

〈요 약〉

본 연구는 수요율이 멱함수 형태를 따르는 경우의 재고모형을 정립하고 경제적 주문시점과 주문량을 얻을 수 있는 간편한 해법 알고리즘을 제시하고 있다. 또한 다수의 예를 통하여 본 해법의 해가 최적해에 매우 근접함을 보여주고 있다.

The Determination of the Ordering Policy of Products with Power Pattern Demand Rate

Ju, Sang Yoon
Dept. of Industrial Eng.
(Received April 30, 1983)

〈**Abstract**〉

This paper formulates the inventory model with power pattern demand rate and proposes a simple algorithm for determining ordering times and ordering quantities.

Several numdrical examples show that the solutions determined by this algorithm are very close to the optimal values.

I. 서 론

재고관리 모형에 관한 연구는 경제적 발주량 결정 모형(E. O. Q)을 시초로 하여 지속되어 왔다. 그러나 EOQ에 의거한 전통적 재고관리모형은 연중수요가 일정하다는 가정하에 정립되었으므로 시간에 따라 수요가 변동하는 제품에 대하여 사용상에 큰 한계점이 되어왔다. 이에 따라 수요가 시간에 따라 동적으로 변화하는 재고모형에 관한 연구가 이루어 지게 되었다.

수요가 동적인 경우의 재고관리에 관한 연구는 Wagner와 Whitin [1]이 정기적 검사체계하에서 동적계획법에 의한 수요의 재고모형을 개발한 이후 Silver와 Meal [2], Eisenhut [3]에 의해 계속되었고 한편으로 Jaiswal과 Shah [5]는 수요가 등차 혹은 등비수열로 증가하는 경우에 대하여, Nadder [7], Falkner [8]는 수요가 시간에 비례하는 경우에 대하여 그리고 Johnson [9]은 비교적 간단한 비선형함수로 수요가 변동하는 경우에 대하여 각각 재고모형을 연구했다. 또한 최근에 수요율이 멱함수 형태를 따르는 논문이 발표되었으나 계획기간초의 순간수요율을 무시한 특수경우에 대해서만 해를 구할수 있을 뿐이었다. [6]

본 논문에서는 수요율이 멱함수형태를 따르는 재고모형에 있어서 계획기간초의 순간수요율을 고려한 일반적인 해를 비교적 쉽게 얻을수 있는 근사적해법을 제시하고자 한다.

II. 비용모형의 정립

본 연구를 위해 필요한 가정은 다음과 같다.

(1) 제품의 수요율 $d(t)$는 시간에 따라 다음과 같은 연속적 멱함수형태로 발생한다.

$$d(t)=d_0+A\left(\frac{t}{T}\right)^r \quad (1)$$

$$0\leq t\leq T,\ d_0\geq 0,\ r\geq 0$$

단 T: 계획기간

d_0: 시점 $t=0$에서의 순간수요율

r: 함수의 형태를 결정하는 지수(1)

수요율이 식(1)과 유사한 형태로 발생하는 예는 얼마든지 찾을수 있는데 신제품이 판매되어 갑작스런 수요의 증가가 이루어지는 경우, 계절에 따라 수요가 급증하는 제품, 그외에 크리스마스카드나 연하장과 같이 특정한 기간동안 갑자기 수요가 증가하는 경우 등이다.

(2) 계획기간중에 발생하는 총수요는 예측될 수 있다.

계획기간중에 발생하는 총수요를 X라할때 (1)식으로 부터 다음을 얻게 된다.

$$X=\int_0^T\left\{d_0+A\left(\frac{t}{T}\right)^r\right\}dt \quad (2)$$

(2)식을 정리하면 다음과 같다.

$$A=(r+1)\left(\frac{X}{T}-d_0\right) \quad (3)$$

(3)식을 (1)식에 대입하면 다음식을 얻게 된다.

$$d(t)=d_0+(r+1)\left(\frac{X}{T}-d_0\right)\left(\frac{t}{T}\right)^r \quad (4)$$

(3) 재고의 품절은 허용하지 않는다.

(4) 계획기간초와 계획기간말의 재고수준은 영(Zero)이 되도록 한다.

(5) 재고보충은 주문 즉시 이루어진다.

이제 비용모형을 정립하기 위해 필요한 비용및 시간을 다음과 같이 정의한다.

K: 단위 주문당 소요비용

h: 단위 재고 유지 비용

C: 제품의 구매단가

N: 계획기간 중의 주문횟수

t_j: j번째 주문시점 $j=1, 2, \cdots, N$

$D(t)$: 시점 t까지 발생한 총수요량.

$$\begin{aligned}D(t)&=\int_0^t d(z)dz\\&=d_0t+\left(\frac{X}{T}-d_0\right)t\left(\frac{t}{T}\right)^r \quad (5)\\&\qquad 0\leq t\leq T\end{aligned}$$

$I(t)$: 시점 t에서의 재고량

$$I(t)=D(t_{j+1})-D(t) \quad (6)$$
$$t_j\leq t\leq t_{j+1},\ j=1, 2, \cdots, N$$

Q_j: j번째 발주량

$$\begin{aligned}Q_j&=\int_{t_j}^{t_{j+1}}d(z)dz\\&=D(t_{j+1})-D(t_j)\\&\qquad j=1, 2, \cdots, N \quad (7)\end{aligned}$$

H: 계획기간중 발생하는 총재고유지 비용

$$\begin{aligned}H&=h\sum_{j=1}^{N}\int_{t_j}^{t_{j+1}}I(t)\,dt\\&=h\sum_{j=1}^{N}(t_{j+1}-t_j)D(t_{j+1})-h\sum_{j=1}^{N}\int_{t_j}^{t_{j+1}}D(t)dt\\&=h\sum_{j=1}^{N}(t_{j+1}-t_j)D(t_{j+1})-h\int_0^T D(t)dt \quad (8)\end{aligned}$$

재고모형의 비용함수 TC는 주문비용, 제품구매비용, 그리고 재고유지비용의 성분으로 이루어지므로

$$TC=NK+CX+H \quad (9)$$

와 같이 나타낼수 있다.

Ⅲ. 적정 주문정책의 결정

계획기간중의 제품 주문시점을 임의적으로 인수하기에 앞서 인단 일정한 주기로 제품을 주문한다고 가정하면 계획기간중의 주문회수는 N회이므로 각 주문시점 t_j는 다음과 같다.

$$t_j=T\frac{(j-1)}{N} \qquad j=1, 2, \cdots, N \quad (10)$$

(10)식을 (8)식에 대입하면

$$\begin{aligned}H&=h\sum_{j=1}^{N}\frac{T}{N}D\left(\frac{jT}{N}\right)-h\int_0^T D(t)\,dt\\&=\frac{T^2}{N}h\left\{\frac{(N-1)}{2}d_0\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{X}{T}-d_0\right)\left(\frac{1}{N}\right)^{r+1}\sum_{j=1}^{N}j^{r+1}\right\}\\&\quad-h\int_0^T D(t)\,dt \quad (11)\end{aligned}$$

이제 (11)식을 (9)식에 대입하면 비용함수 TC는 N의함수가 된다. 여기서 비용함수를 최소로 하는 N을 구하고자 한 경우 제품구매비용 CX와 재고유지비용 H내의 제2항은 상수로 취급할수 있으므로 이들을 제외시킨 나머지 비용성분들을 TC_1이라 하고서 정리하면 다음과 같다.

(1) $r<1$인 경우 식(1)의 세2항은 오목형(concave), $r>1$인 경우는 볼록형(convex), 그리고 $r=1$인 경우에는 선형식이 되므로 r의 값이 변화함에 따라 매우 다양한 형태의 수요율함수가 되어 적용범위가 상당히 넓다.

$$TC_1=NK+\frac{T^2}{N}h\left\{\frac{N-1}{2}d_0+\left(\frac{X}{T}-d_0\right)\left(\frac{1}{N}\right)^{r+1}\sum_{j=1}^{N}j^{r+1}\right\} \quad (12)$$

(12)식으로 부터 N의 값을 변화시켜가며 TC_1을 최소로 하는 주문회수를 쉽게 결정할수 있다.(2)

이제 최저주문시점 t_j의 특성을 살펴보자. 수요가 시간이 경과함에 따라 계속 증가하는 경우 주문회수 j가 늘어남에 따라 주문간격 $t_{j+1}-t_j$는 점차 감소하게 된다. 왜냐하면 수요가 증가하게되면 주문량이 증가되고 그로 인한 재고유지비용 역시 증가하므로 재고유지비용과 주문비용의 총합이 최소가 되도록 주문간격을 점차 줄이는 것이 최적정책이기 때문이다. 그러므로 수요율이 멱함수 형태로 증가할때 각 주문시점 t_j는 j가 커짐에 따라 초기에는 크게 증가하나 점차 증가폭이 감소된다. 이와같은 주문시점 t_j의 특성에 따라 주문시점 t_j를 다음과 같은 j의 멱증가함수식으로 나타내보자.

$$t_j=T\left(\frac{j-1}{N}\right)^k \quad (13)$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\quad 0\leq k\leq 1$$

이때 (13)식은 k값이 변화함에 따라 그림 1과 같은 형태를 취하게 된다.

주문시점 t_j는 (1)식의 r이 큰값을 취한 경우 수요가 급격히 증가하게되어 주문시점의 간격이 급속히 줄어들게 된다. 이러한 경우 (13)식의 k값을 작게취하면 (13)식은 실제의 최적주문시점에 가깝게 접근시킬 수 있고 그 반대의 경우는 k값을 크게 취하면 가능하게 된다.(3)

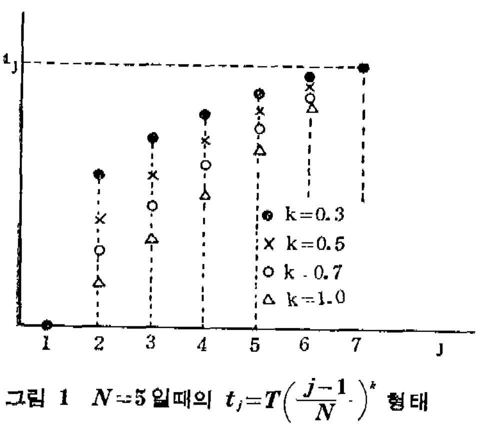

그림 1 $N=5$ **일때의** $t_j=T\left(\frac{j-1}{N}\right)^k$ **형태**

이제 (13)식을 (8)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$H=hT^2\sum_{j=1}^{N}F_j(F_j-F_{j-1})\left\{d_0+\left(\frac{X}{T}-d_0\right)F^r{}_j\right\}-h\int_0^T D(t)\,dt \quad (14)$$

단 $F_j=\left(\frac{j}{N}\right)^k$

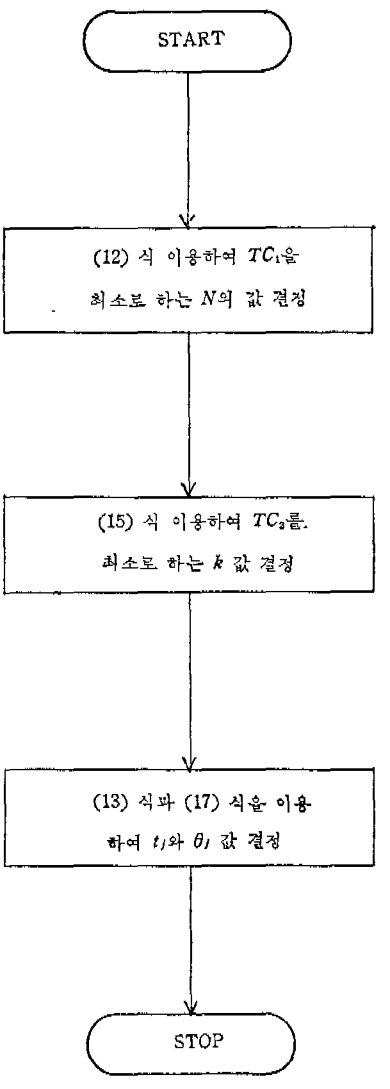

그림 2 본해법 알고리즘의 과정

(2) 최적 N에 빨리 도달하려면 수요가 일정하다고 가정하고서 얻은 $N_0=\sqrt{2hX/K}$를 초기치로하여 TC_1이 감소하는 방향으로 N_0를 1씩 변화시킨다.

(3) 여러 예를 조사한 결과 $r>1$인 경우 $k<0.8$, $r<1$인 경우 $k>0.8$의 값을 대부분 취하고 있었다.

표 1 사용된 예제의 수치 자료

번 호	T	X	K	h	c	$d(0)$	r
1[5]	1	800	250	2	20	0	1.0
2	1	800	250	2	20	0	0.5
3	1	800	250	2	20	0	2.0
4	1	3,000	250	2	20	0	1.0
5	1	800	25	2	20	0	1.0
6	1	800	250	12	20	0	1.0
7	1	100	250	2	20	100	1.0

5) 참고문헌 [6]에서 사용된 예제의 수치를 인용함.

표 2 표 1의 예제에 대한 근사해 및 최적해

번호	해	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	비 용[6]	차이(%)
1	근 사 해 최 적 해	0 0	.574 .577	1 1					950.86 950.80	0.01
2	근 사 해 최 적 해	0 0	.536 .543	1 1					938.14 938.83	0.01
3	근 사 해 최 적 해	0 0	.637 .630	1 1					944.25 944.05	0.02
4	근 사 해 최 적 해	0 0	.354 .344	.595 .596	.806 .809	1 1			1,764.49 1,763.76	0.04
5	근 사 해 최 적 해	0 0	.261 .257	.439 .445	.595 .604	.738 .747	.872 .878	1 1	280.80 280.65	0.05
6	근 사 해 최 적 해	0 0	.299 .293	.503 .507	.682 .688	.846 .801	1 1		2,206.63 2,205.66	0.04
7	근 사 해 최 적 해	0 0	.415 .416	.723 .731	1 1				580.98 580.84	0.02

6) 주문비용과 재고유지 비용의 합

(14)식을 (9)식에 대입하면 총비용함수 TC는 N과 k의 함수식이 된다. 만약 컴퓨터를 이용한다면 TC를 최소로 하는 N과 k를 구할수 있으나 보다 간편한 방법으로 N과 k를 얻을 수 있는 근사적방법을 모색해 보자.

전술한 바와 같이 최적주문의 간격은 시간이 경과함에 따라 점가 좁아지므로 주문의 빈도는 점차 증가하게 된다. 그러므로 일정한 주기로 주문하는 경우와 최적주문을 상호 비교해 보면 계획기간 초반부에서는 전자가 후자보다 그리고 후반부에서는 후자가 전자보다 각각 주문빈도가 더 빈번하게 되며 중반부에서는 비슷한 빈도를 취하게 된다. 그러므로 전후반을 포함한 전계획기간을 망라해 볼때 일정한 주기로 주문하는 경우와 최적주문간의 주문회수 N은 큰 차이가 나타나지 않는다고 예상할 수 있다. 이제 (12)식으로 부터 구한 N의 값을 (14)식에 과감히 대입하고서 (9)식의 TC를 정리하면 이는 k의 함수가 된다. 여기서 (9)식의 주문비용 NK 그리고 재고유지비용 H 내의 제 2 항과 제 1 항의 계수 hT^2은 k를 결정하는데 아무런 영향을 주지 못하므로 제외시키고 나머지 식을 TC_2라 할때 다음과 같다.

$$TC_2=\sum_{j=1}^{N} F_j(F_j-F_{j-1})\left\{d_0+\left(\frac{X}{T}-d_0\right)F'_j\right\} \tag{15}$$

$$\text{단 } F_j=\left(\frac{j}{N}\right)^k$$

k는 1 보다 작은 양의 값이므로 0.05씩 크기를

(4) 만일 k_0와 $k_0+0.05$의 구간에서 TC_2의 최소값이 존재할 경우 보간법 공식은 다음과 같다.

$$k=k_0+\frac{TC_2(k_0)}{TC_2(k_0)+TC_2(k_0+0.05)}\times 0.05$$

감소시켜가며 TC_2를 최소로 하는 k값을 소형계산기를 이용하여 쉽게 구할수 있다. 이때 보다 정확한 k값을 얻고자 할 경우에는 보간법을 이용한다.[4] k값이 결정되면 (13)식과 (7)식을 이용하여 주문시점 t_i와 주문량 Q_i를 결정한다.

지금까지의 해법 알고리즘을 개략적으로 도시하면 그림 2와 같다.

마지막으로 표 1에 주어진 7가지 예들을 이용하여 본 해법을 이용한 근시해와 최적해를 비교하면 표 2와 같다.

표 2로 부터 본해법을 통한 근사해와 최적해 간의 비용 차이는 0.05% 이내임을 알 수 있다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 수요율함수가 연속적인 멱함수형태로 증가하는 제품에 대한 적정주문회수 및 주문시점을 근사적으로 구할수 있는 간편한 해법을 제시하고 있다. 본해법은 지금까기 해를 구할수 없었던 초기수요율이 양의 값을 취하는 경우에 대해서도 적용할 수 있을 뿐만 아니라 이로부터 얻는 근사해는 최적해에 매우 근접함을 보이고 있다.

참 고 문 헌

1. Wagner, H.M. and Whintin, T.M., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model," Management Science, Vol.5, Oct. (1958)
2. Silver, E.A. and Meal, H.C. "A simple Modification of the EOQ for the case of a Varying Demand Rate", Producation and inventory Management, 4th qtr., (1969)
3. Eisenhut, P. S. "A Dynamic Lot sizing Algorithm with Capacity Constraints", AIIE tr., Vor.7. No.2. (1975)
4. Resh, M. and Friedman, M. and Barbosa, L.C., "On a General Solution of the Deterministic Lot size problem with Time—Proportional Demand", Operations Research, Vol. 24, No.4, July-August, pp.718—725. (1976)
5. Jaiswall, M. C. and Shah, Y. K., "On a Discrete Deterministic Inventory Model with Demand Varying in Progression". AIIE Tr., Vol.8, No.4. (1976)
6. Lee, B. "A study on the inventory model with power pattern Demand Rate" Keimyung University Report Vol.4. Feb (1982).
7. Naddor, E., Inventory Systems, John Wiley and Sons. (1966).
8. Falkner, C.M., "Optimal ordering policies for a continuous Time, Deterministic Inventory Model", Management Science, Vol. 15, No.11, July. (1969)
9. Johnson L.A. and Montgomory, D.C., Operations Rosearch in Producation planning Scheduling and Inventory Control, John Wiley and Sons (1974).

$$k=k_0+\frac{TC_2(k_0)}{TC_2(k_0)+TC_2(k_0+0.05)}\times 0.05$$