울산대학교 연구논문집 제20권(인문・사회과학편)제2호, pp.85~90, 1989.
UOU. Report Vol. 20, (Humanities and social science) NO.2, pp.85~90, 1989.
University of Ulsan.

分解技法을 이용한 設備立地選定問題의 解法에 관한 研究

이 영 덕
경 영 학 과

〈요 약〉

문제 크기가 큰 線形計劃問題의 解法인 Benders分解技法을 이용하여 設備立地選定問題의 해법을 연구하였다. 기존의 연구에서는 쌍대변수를 쉽게 구하여 그 값이 작았으나 본 연구에서는 약간의 과정을 거쳐 큰 값을 가지는 쌍대변수를 사용하여 효율적으로 하였으며 특히 單純問題의 경우 보다는 設備制限問題와 같이 設備에 관한 제약식이 추가되는 경우 더욱 효율적인 해법이 될 수 있다.

An Improved Benders' Decomposition method for the Uncapacitated plant location problem

Lee Young-Duck
Department of management

〈Abstract〉

A Benders' decomposition method is a method for large scale Linear Programming and Mixed integer problem. So, Benders' decomposion method was used for the warehouse location problem.

In this paper, we used the improved dual multiplier for the Benders' decomposition method for the Uncapacitated location problem.

Our study was efficient for the p-median problem and problems with p-median type constraints.

I. 序 論

생산시스템의 立地選定에는 여러가지 요인[1]을 고려하여야 하는데 經營科學에서는 이들 여러요인을 計量化하였을 때의 고정비용(만일 이들 요인중 計量化가 어려운 요인이 있다면 이들 용인을 제외한 나머지 요인들의 計量化된 費用)과 이 설비에서 수요지까지의 수송비의 合을 최소화 하는 설비입지를 찾는데 관심을 가지게 된다.

設備立地選定問題는 설비能力의 制限여부, 수송 段階, 공급되는 物品의 종류, 分析期間, 設備數의 制限여부등을 여러가지 형태의 문제로 나뉘어져 여러가지 방법에 의한 연구가 이루어지고 있다. 본 연구에서는 單純設備立地選定問題(simple plant location problem)[2]와 設備數制限問題(p-median problem)[3]에 대하여 Benders' 分解技法을 이용한 해법을 연구하고자 한다.

II. Benders' 分解技法

分解技法은 문제의 크기가 크고 일정한 특성(分解의 특성)을 갖는 문제를 部分問題(subproblem)로 분해하여 이들 部分問題을 독립적으로 풀어가면서 主問題와의 관계를 이용하여 전제문제의 최적해를 구하는 方法으로 分解方法에 따라 여러 技法이 있는데 그 중 하나인 Benbders' 分解技法은 다음과 같은 형태의 문제에 적합하며 그 과정은 다음과 같다.

(P) Min $c \cdot x + f(y)$

s.t $A \cdot x + F(y) \geq b$

$x \geq o, \quad y \in S$

여기에서 A m x n행렬

x, c . n벡타

y . p벡타

f . y의 線型함수

F . y의 線型함수

b m벡타

$S \in E^p$

위의 문제를 분해기법을 이용하여 풀 수 있는데 Farkas' 定理를[4]이용하여 다음의 문제를 구한다.

(P1) Min z

$$\text{s.t } z \geq f(y) + (b - F(y))' u_i^p, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n_p$$

$$(b - F(y))' u_i^r \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n_r$$

$$y \in S$$

---

1) 자연적요인, 사회적요인, 경제적요인 등으로 크게 나뉘어짐.

2), 3) 문제의 설명에 대하여서는 모형설정을 참고로 할 것.

4) 참고 Lasdon(6) p. 372

(P1)을 풀기위해 主問題(master problem)와 部門問題(subproblem)를 구하면 다음과 같다.

(MP1) Min z

$$\text{s.t } z \ge f(y) + (b - F(y))' u_i^p, \quad i \in I_1 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$(b - F(y))' u_i^r \le 0, \quad i \in I_2 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$y \in S$$

여기에서 $I_1 \in \{1, 2, \cdots\cdots n_p\}$

$I_2 \in \{1, 2, \cdots\cdots n_r\}$

(SP) Max $(b - F(y))' u$

s.t $A' u \le c$

$u \le 0$

(SPP) Min $c' x$

s.t $Ax \ge b - F(y)$

$x \ge 0$

위와 같이 문제들이 정의되었을 때 Benders' 分解技法의 과정은 다음과 같다.

1. (MP1)을 제약식 (1), (2) 의 몇가지 제약식만 포함하여 풀이한다.
2. 위 과정에서 MP1이 실현불가능이면 P, P1 모두 불가능, 실현가능이면 위 과정의 최적해(z°, y°)나 무한해의 정보를 얻는다. 무한해의 경우 $Z^\circ = -\infty$, 3단계로 간다.
3. (SP)를 풀어 실현불가능이면 원문제(P)는 무한해. (SP)가 무한해이면 6단계로 간다.
4. 3단계에서 구한 최적값이 $z^\circ - f(y^\circ)$와 같으면 (z°, y°)는 (P)를 푼다.
5. 3단계에서 최적근건을 만족하지 않고 (SP)가 회적해 u° 를 가지고
   $z^\circ < f(y^\circ) + (b - F(y^\circ))' u^\circ$ 일때
   $z \ge (b - F(y))' u^\circ + f(y)$를 (MP1)에 추가하고 2단계로 돌아간다.
6. $(b - F(y))' u^\circ + f(y)$식을 (MP1)에 추가하여 2단계로 간다.

III. 單純問題(Simple Plant Location Problem)

1. 模型의 設定

1) 模型設定의 假定

Simple Plamt Location문제의 가정은 다음과 같다.

假定 : 1. 設備의 能力은 제한이 없다.

2. 설비후보지는 미리 정해져 있으며 각 후보지에 설비를 설치할 때의 고정비용은 구할 수 있다(구해져 있다).
3. 수요지는 알려져 있으며 각 후보지에서 수요지 까지의 수송비는 구할 수 있다(구해져 있다).

* u_i^p, u_i^r, n_p, n_r See Lasdon p. 372~p. 374.

2) 數式化된 模型

위와 같은 가정하의 Simple Plant Location문제의 모형은 다음과 같다.

$$(P)\ \text{Min} \sum_{i\in I} \sum_{i\in J} Cij \cdot Xij + \sum_{i\in I} F_i \cdot Y_i$$

$$\text{s.t} \sum_{i\in I} X_{ij} = 1,\ j\in J$$

$$X_{ij} \leq Y_i,\ i\in I,\ i\in J$$

$$X_{ij} \geq 0,\ i\in I,\ i\in J$$

$$Y_i \in \{0,1\},\ i\in I$$

여기에서

$I = \{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m\}$; 설비후보지의 집합

$J = \{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m\}$; 수요지의 집합

c_{ij} ; 공급지 i에서 수요지 j로 全需要量을 수송하는데 드는 비용.

x_{ij} , 공급지 i에서 수요지 j로 수송하는 부분.

v_i , 후보지 i에 설비를 설치하는 데 드는 고정비용.

2. Benders分解技法에 의한 解法

(P) 를 分解技法으로 풀기 위해 主問題(master problem)와 部分問題(subproblen)을 구하면 다음과 같다.

$$(MP)\ \text{Min } z$$

$$\text{s.t}\quad z \geq \sum_j u_i^p - \sum_i \sum_j W_{ij}^p + \sum_i F_i \cdot Y_i$$

$$\sum_j u_i^r - \sum_i \sum_j W_{ij}^r Y_i \leq 0$$

$$Y_i \in \{0,1\}$$

$$(SP)\ \text{Min} \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} + \sum_i F_i \cdot Y_i$$

$$\text{s.t} \sum_i X_{ij} = 1\ \forall j$$

$$X_{ij} \geq 0,\ \forall i,\ j$$

1) 解法의 과정

위와 같이 문제가 정리되었을 때의 해법의 과정은 다음과 같다.

1 $k=0$ 최초의 V_i^k값과 W_{ij}^k값을 구한다.

2. $k=k+1$, (MP1)을 푼다.

3. 2단계에서 구한 y_i^k에 대하여 (SP)를 푼다. 이때 (MP1)의 최적해의 값이 (SP) 의 최적해와 같으면 $(X_{ij}^k,\ y_i^k)$는 (P)의 최적해 아니면 $y_i^k=1$인 y_i에 대하여 V_i^k, W_{ij}^k를 구하고 새로운 제약식을 후가하여 2단계로 간다.

2) V_j^k와 W_{ij}^k를 구하는 法

V_j와 W_{ij}는 문제(P)의 Dual Variable로 문제(P)가 퇴화의 해가 많이 발생하므로 V_i와 W_{ij}의 값을 적절하게 구하는 것이 최적해를 빨리 구하는 길이 된다.

① 方法1.

$V_j^k = C_{kij}\ C_{kij},\ \underset{i \in I^k}{Min}\ C_{ij},\ I^k = \{i\ ;\ y_i = 1\}\ \forall j$

$W_{ij}^k = \max\{0,\ V_j^k - C_{ij}\},\ \forall i,\ j$

위 방법은 V_j^k와 W_{ij}^k를 쉽게 dual feasibility를 만족시키며 쉽게 구할 수 있으나 V_j^k 값을 작게 한다.

② 方法 2.

Erenkotter는 문제(P)를 쌍대구조를 이용하여 (P)를 쉽게 풀 수 있는 효율적인 방법을 연구하였는데 이것은 (P)의 쌍대문제의 목적함수 값인 $\sum_j V_j$값을 최대로 할 수 있는 V_j값을 가능한 한 최대로 하여 해를 빨리 구할 수 있게 하는 데 이 $\sum_j V_j$값이(MP)의 $\sum_j V_j^p$와 같은 의미를 가지므로 여기에서도 Erlenkotter의 方法처럼 V_j를 최대한 올리는 과정을 거쳐 V_j^k값을 구한다. 즉 $y_i^k = 1$인 i에 대하여 다음의 과정을 거쳐 V_j^k값을 구한다.

1. $I^k = \{j : Y_i^k = 0\}$
   $C_{ij}(i \in I^k)$를 단조증가 형태로 정리한다. C_j^r, $r = 1, 2, \cdots\cdots q.\ q = |I^k|$ 그리고 $C_j^{q+1} = \infty$
2. 쌍대 실현 가능한 $\{V_j\}$를 찾는다. $j \in J$.
   $S_i = F_i - \sum_{j \in j} \max\{0,\ V_j\ C_{ij}\} \geq 0\ \ i \in I^k$
   $r(j) = \min\{r : V_j \leq C_j^r\}$
   $V_j = C_j^{r(j)}$이면 $r(j)$를 1 증가.
3. $j = 1,\ \pi = 0$
4. $\triangle_j = \underset{i \in I^k}{\min}\{S_i : V_j - C_{ij} \geq 0\}$
5. $\triangle_j > C_j^{r(j)} - V_j$ 이면 $\triangle_j = C_j^{r(j)} - V_j,\ \pi = 1$, 그리고 $r(j)$를 1 증가.
6. S_i를 $\triangle_j$만큼 감소 $i \in I^k$ with $V_i - C_{ij} \geq 0$. V_j를 $\triangle_j$ 만큼 증가.
7. $j \neq n$이면 j를 1증가 한 후 3단계로 간다.
8. $\delta = 1$이면 2단계로 가고 아니면 멈춘다.

IV. 設備數의 制限이 있는 문제

1. 模型의 設定

設備數制限問題(P—median Problem)은 單純問題의 가정에 開設되는 서비의 數에 제한이 있다는 것이 추가되며 다음과 같은 數理的 模型을 갖는다.

$$(PP)\ \ Min \sum_i \sum_j C_{ij} \cdot X_{ij} + \sum_i F_i \cdot Y_i$$

$$s.t \sum_i X_{ij} = 1,\ \forall$$

$$X_{ij} \leq Y_i,\ \forall i,\ j$$

V. 結 論

設備立地選定問題의 해법은 많은 각도에서 연구가 이루어져 왔는데 가장 기본적인 문제인 單純問題의 解法은 Erlenkotter(1) 가 쌍대구조에 바탕을 둔 획기적인 연구를 하였다. 본 연구에서는 문제가 큰 線形計劃問題를 다루는 分解技法중 Benders 分解技法의 쌍대변수로 Erlenkotter가 이용한 쌍대변수를 이용해 보았다. 그런데 이러한 방법은 단순문제(Simple plant Location Problem)를 Benders 分解技法으로 풀 때 기존의 쌍대변수(방법 1)를 사용하였을 때 보다는 효과적이라 할 수 있으나 Erlenleotter가 원래 제시한 방법에 비해서는 효과적이기가 어렵다 할 수 있겠다. 그러나 設備數制限問題(P—median)문제와 같이 Y_i에 대한 제약식이 추가되는 문제는 主問題(PMP)에서와 같이 Y_i만을 변수로 하는 문제의 하나의 제약조건으로 다룰 수 있기 때문에 단순문제에 비해 그다지 복잡하지 않게 처리 할 수 있기 때문에 상당히 효과적인 해법이라 할 수 있겠다.

참 고 문 헌

1 Erenkotter, D, "A dual based procedure for uncapacitated facility location problem," Operations Research, Vol.26, No 5, p.992~p.1009 1978.

2 Galvo, R.D., "A Dual Bounded Algorithm for the P—median problem," Operations Research, Vol. 28, p. 1121~p. 1121, 1980.

3. Geoffrion, A.M., "Lagrangian relaxation for integer programming," Mathematical Programming Study, p. 88~p. 114, 1974.

4. Guignard, M. & K. Spielberg, "A direct dual methods for the mixed plant location problem with some side constraints," Mathematical Programming, Vol. 17, No. 2, p. 198~p. 228, 1979.

5 Jarvinenm P. & J. Rajala & H. Sinervo, "A Branch and bound Algorithm for seeking the P—median," Operations Research, Vol. 20, p. 173~p. 178, 1972.

6 Lasdon, L.S., "Optimization Theory for Large Systems" Macmillan(1970), p. 370~p. 392.

7 Schrage, L., "Implicit representation of variable upper bound in linear programming", Mathematical Programming Study 4, p. 118~p. 182. 1975.