UIT Report Vol.15, No.1 ' pp.229~238, 1984 연구논문집 제15권 제1호 pp.229~238, 1984

成長하는 生産시스템의 設備開設과 設備增設의 最適立地選定에 관한 硏究

이 영 덕
경 영 학 과
(1983. 9.30 접수)

〈초 록〉

生産시스템에서 設備立地選定問題는 매우 중요하고도 어려운 문제이다. 더구나 늘어가는 需要에 대해 增設의 문제까지 고려할 때는 더욱 복잡한 문제가 된다. 본논문에서는 이 문제의 해결을 위해 雙對上昇過程, 雙對下向過程, 分段探索法, 노드簡略化등을 이용한 解法에 관하여 硏究하였다.

An Improved Dual-Based Algorithm for the Multi-period Phase-in Model

Lee Young-Duk
Department of Management
(Received September 30, 1983)

〈Abstract〉

We improved and developed a method for the multi-period facility phase-in problem in the uncapacitated case. The problem can be stated that a number of sites are available at which facilities can be estabilished to provide a set of service to given demand points. The demand in each time period must be satisfied and a fixed charge is associated with opening a facility at a site, and we add facilities over a planning horizon of T time periods, as overall demands are strictly increasing. The objective is to determine a set of facilities to open which minimizes the overall fixed cost and transportation cost over the planning horizon.

In this paper, the dual ascent procedure which is based on the complementary slackness condition, and the dual descent procedure which is developed to supplement the dual ascent procedure, and the branch and bound method and Node Simplification were used for the solution process.

I. 序 論

생산시스템(system)에 있어서 設備의 立地選定問題는 중요한 問題가 되고 있는데 시스템의 有効性이 큰 쪽에서 立地要因들을 고려하여야 한다.

立地要因에는 여러가지가 있을 수 있는데 대체로 이를 세가지로 분류할 수 있다. 첫째는 經濟的 立地要因으로서 輸送의 편의성과 비용, 노동력의 量과質, 임금수준, 시장의 近接性 등이고 둘째는 自然的 立地要因으로 원자재의 近接性, 기후의 적합성, 공업용수의 이용 가능성 등이며 세째는 社會的 立地要因으로 지역사회의 특성, 관습, 법규 등을 들 수 있다. 시스템에서는 이들 요인을 고려하여 合理的 立地選定을 하여야 하는데 이들 요인을 분석하는데는 여러가지 방법이 있다. 그 중 대표적인 것

으로는 이들 요인을 費用的인 측면으로 고려하여 시스템을 유지하기 위한 固定的 費用과 物的流通을 위한 輸送費로 나누어 분석하는 것이다. 이때 輸送費를 구하는데는 문제가 없지만 나머지 요인들을 고정적 비용으로 묶는데는 다소 어려움이 있다. 왜냐하면 이들 요인에서 객관적 요인들은 費用化가 용이하지만 주관적 요인들은 비용화하는데는 어려움이 생기게 된다. 이때는 費用化할 수 있는 요인들만 고려하여 분석을 한 후 나중에 분석하지 못한 요인들은 고려하는 것이 바람직하다.

이렇게 입지선정은 固定費와 輸送費로 나누어서 분석하는 硏究는 여러각도에서 행하여 졌는데 이를 분류하면 첫째 설비의 能力에 制限을 두지 않는 경우와 設備能力의 上限을 두는 경우 둘째, 설비에서 직접 수요자에게 공급되는 一段階問題와 中間에서 다른 설비를 거쳐 수요자에 게공급되는 多段階問題 셋째, 공급되는 物品이 하나인 경우와 여럿인 경우 넷째, 분석하는 대상기간을 하나만 잡는 경우와 여러 기간을 잡는 경우로 나눌 수 있다. 그런데 이들 연구는 설비능력의 제한이 없고, 一段階, 一品目, 一期間을 다룬 단순한 문제(simple problem)의 연구가 나온 후 각부분을 확장시키는 형태로 연구가 행하여졌다. 이들 단순한 문제에 관한 해법은 에프로이슨(Effroyson)과 레이(Ray) [7], 쿠마왈라(Khumawalla) [14] 등이 分段探索法(Branch-and-bound Method)을 사용하여 연구하였고 빌데(Bildc)와 크라우프(Kraup) [2] 그리고 엘란코터(Erlenkotter) [8]는 雙對模型을 이용하여 分段探索法으로 풀이하였고 샤지(Schage) [18]는 VUB(Variable Upper Bound)라는 특수한 線型計劃에 의한 해법을 통하여 연구하였다.

본 연구에서는 생산시스템이 확장하는 경우 設備增設이 필요하게 될 경우를 대상으로 하여 이 경우의 최초설비입지에서 일정한 期間까지의 增設을 고려하여 가장 좋은 立地選定을 할 수 있는 해법을 다루게 되는데 엘란코터의 연구를 토대로 하여 연구를 실행하였다.

Ⅱ. 模型의 設定

본 연구에서의 과제는 輸送費와 固定的 費用의 총합을 가장 적게 하는 설비 위치를 찾는 것인데, 이를 위하여 다음과 같은 가정이 필요하고 이러한 가정하에서 세워진 모형은 다음과 같다.

1. 模型 設定의 假定

模型設定에 필요한 假定은 다음과 같다.

假定 : 1. 設備의 能力에는 制限이 없다.

2. 流通段階는 一段階이다.
3. 物品은 單一品目이다.
4. 한번 開設된 設備는 이후에 閉鎖되지 않는다.
5. 각 需要地와 需要量은 매期 定해져 있다.
6. 設備에서 需要地까지의 輸送備와 設費 운영에 따른 固定費用은 매기간 정해져 있다.

2. 數式化된 模型

아래의 모형은 위의 가정에 따라 시스템의 총비용인 輸送費및 固定的 費用의 合을 가장 적게하는 最適立地選定을 위한 數理的 模型이다.

p-1

$$\text{Min} \quad Z=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{t\in S}C_{ijt}\cdot X_{ijt}+\sum_{i\in I}\sum_{t\in S}F_{it}\cdot Y_{it}$$

$$\text{s. t} \quad \sum_{i\in I}X_{ijt}=1 \qquad j\in J,\ t\in S \qquad (1\text{-}1)$$

$$\sum_{j\in J}X_{ijt}\leq n_{it}\cdot Y_{it} \qquad i\in I,\ t\in S \qquad (1\text{-}2)$$

$$Y_{it+1}-Y_{it}\geq 0 \qquad i\in I,\ j\in J,\ t\in S \quad (1\text{-}3)$$

$$X_{ijt}\geq 0 \qquad i\in I,\ j\in J,\ t\in S \quad (1\text{-}4)$$

$$Y_{it}\in\{0,1\} \qquad i\in I,\ t\in S \qquad (1\text{-}5)$$

여기에서

$I=\{1,2,\cdots M\}$ 設備 設定 候補地의 集合.

$J=\{1,2,\cdots N\}$ 需要地의 集合

$S=\{1,2,\cdots T\}$ 期間의 集合.

$C_{ijt}=\lambda_{ijt}\cdot R_{jt}$.

$\lambda_{ijt}=t$期에 설비 i에서 수요지 j에 1단위 수송하는데 드는 비용의 現價.

$R_{jt}=t$期의 需要地 j의 수요량.

$X_{ijt}=$설비 i에서 공급되는 R_{it}의 부분

$$Y_{it}=\begin{cases}1, & \text{설비 } i\text{가 } t\text{ 期에 開設 되었을 때}\\ 0, & \text{아닐때}\end{cases}$$

그리고 Y_{i0}는 임으로 0으로 놓는다.

$F_{it}=$설비 i를 t期에 운용하는데 드는 純費用의 現價

즉 $F_{it}=G_{it}-G_{it+1}$

$G_{it}=$설비 i를 t期에 開設하여 생기는 총 고정비용의 현가.

$n_{it}=$설비 i에 의해 t期에 공급받는 수요지의

數.

제약조건(1-1)과 (1-4)는 모든 需要地의 需要量은 만족되어야 된다는 것을 의미하고 (1-2)는 수요지 j는 설비 i가 t期에 開設되었을 때만 i에서 공급받을 수 있다는 것을 의미하며 식(1-3)은 한번 開設된 設備는 계속 유지된다는 것을 의미한다.

3. 修正된 模型

(1-2)式과 (1-3)式을 修正하여 누식을 合하게 되면 修正된 모형의 雙對模型이 간단해지고 엘란코터[8]의 해법을 쉽게 적용할 수 있게 된다. 수정 과정은 다음과 같다.

첫째, (1-2)式을 다음식으로 대치한다.

$$Y_{it}-X_{ijt}\geq 0 \quad i\in I,\ j\in J,\ t\in S \qquad (1\text{-}2)'$$

(1-2)'式은 [2,5,6,11,17,18]등에서 사용하였는데 $Y_{it}=1$일 때만 X_{ijt}가 0보다 큰값을 갖게 되어 이는 설비 i가 t期에 開設되었을때 $(Y_{it}=1)$만 설비 i에서 수요지 j로 수송$(X_{ijt}>0)$할 수 있게 된다. 이 제약식을 쓰게 되면 제약식이 數는 많아지나 강력한 제약식이 되고 아울러 雙對模型을 간단하게 할수 있다.

둘째, (1-2)式과 (1-3)式을 합친다.

이를 위해서는 다음의 정리가 필요하다.

정리 1.

(p-1)에서 (1-2)式을 (1 2)'式으로 대치했을 때 (a)와 (b)는 동등하다.

(a) $Y_{it}-X_{ijt}\geq 0,\ i\in I,\ t\in S$
and $Y_{it+1}-Y_{it}\geq 0\ i\in I,\ t\in S$

(b) $(T-t+1)X_{ijt}\leq \sum_{p=t}^{T} Y_{ip}\ i\in I,\ t\in S$

(證明)

증명에 앞서 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$X_{ijt}=\begin{cases}1, & C_{ijt}=\min\limits_{q\in I_t^*} C_{qjt} \text{ 일때 } i,j,t\\ 0, & \text{아닐때}\end{cases}$$

여기에서 I_t^*=t期에 운영중인 설비의 집합.

(a)→(b)

당연하므로 증명 생략.

(b)⇒(a)

대우로써 증명을 한다.

이때의 대우는

임의의 i,t에 대해 $Y_{it}-X_{ijt}<0$이거나 $Y_{it+1}-Y_{it}<0$이면 임의의 i,t에 대해 $(T-t+1)\cdot X_{ijt}>\sum_{p=t}^{T}Y_{ip}$ 이다'이다.

i) 임의의 i,t에 $Y_{it}-X_{ijt}<0$일 때

$Y_{it}-X_{ijt}<0$이면 $Y_{it}=0$, $X_{ijt}=1$이라 놓을 수 있다.

$(\because Y_{it}\in\{0,1\},\ X_{ijt}\in\{0,1\})$

$$\sum_{p=t}^{T}Y_{ip}=\sum_{p=t+1}^{T}Y_{it}+Y_{it}=\sum_{p=t+1}^{T}Y_{ip}\leq T-t$$

$$\therefore (T-t+1)\cdot X_{ijt}>\sum_{p=t}^{T}Y_{it}$$

ii) 임의의 i,t에 $Y_{it+1}-Y_{it}<0$일 때

$Y_{it+1}-Y_{it}<0$이며 $Y_{it+1}=0$, $Y_{it}=1$이라 놓을 수 있다. 그리고 $Y_{it}=1$이므로 $X_{ijt}=1$인 임의의 j가 존재한다. 따라서 $(T-t+1)\cdot X_{ijt}=(T-t+1)\cdot Y_{it}>\sum_{p=t}^{T}Y_{ip}$

$$\therefore\ (T-t+1)X_{ijt}>\sum_{p=t}^{T}Y_{ip}$$

Q.E.D.

위의 정리를 이용하고 (1-5)式을 완화한 L·P모형은 다음과 같다.

p-2

$$\text{Min } Z=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{t\in S}C_{ijt}\cdot X_{ijt}+\sum_{i\in I}\sum_{t\in S}F_{it}\cdot Y_{it}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i\in I}X_{ijt}=1 \qquad \forall j,t \qquad (2\text{-}1)$$

$$\frac{1}{T-t+1}\sum_{p=t}^{T}Y_{ip}-X_{ijt}\geq 0 \quad \forall i,j,t \qquad (2\text{-}2)$$

$$X_{ijt}\geq 0 \qquad \forall i,j,t \qquad (2\text{-}3)$$

$$Y_{it}\geq 0 \qquad \forall i,t \qquad (2\text{-}4)$$

그리고 이 모형은 雙對模型으로 고치면 다음과 같다.

D-3

$$\text{Max } Z_D=\sum_{j\in J}\sum_{t\in S}V_{jt}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{p=1}^{t}\frac{1}{T-p+1}\sum_{j}W_{ijp}\leq F_{it} \quad \forall i,t$$

$$V_{jt}-W_{ijt}\leq C_{ijt} \qquad \forall i,j,t$$

$$W_{ijt}\geq 0 \qquad \forall i,j,t$$

여기에서

V_{jt} : 式(2-1)의 雙對變數(Dual Variable)

W_{ijt}: 式(2-2)의 雙對變數

그런데 여기서 W_{ijt}는 목적함수에는 영향을 안주고 제약식에만 관련되어 있다. 따라서 W_{ijt}를 다음과 같이 낮은 값으로 잡을 수 있다. [7,18]

$$W_{ijt}=\max\{0, V_{jt}-C_{ijt}\}$$

그러면 (D-3)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

D-4

$$\text{Max} \quad Z_D = \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{p=1}^{t} \frac{1}{T-p+1} \sum_j \max\{0, V_{jt} - C_{ijt}\} \leq F_{it} \quad \forall i, j, t$$

Ⅲ. 問題의 解法

문제(p-1)은 풀기 위해서 문제를 (p-2)로 변형하여 雙對模型(D-3)로 고친후 다시 (D-4)로 모형화 하였다. 이때 (D-4)에 근거를 둔 相補的 餘裕性(complementary slackness)조건과 이를 토대로 상대변수를 조정하게 되는 雙對上昇과정(Dual ascent Procedure)과 雙對下向과정(Dual descent Procedure)을 거쳐 분단탐색법으로 해를 구하게 된다.

1. 相補的 餘裕性(Complementary Slackness) 조건

L·P에서 원문제인 상대문제에는 相補的 餘裕性 조건이 성립하는데 (P-2)와 (D-4)의 相補的 餘裕性 條件은 다음과 같다.

C-5

$$Y_{it}^* \cdot \left[F_{it} - \sum_{p=1}^{t} \frac{1}{T-p+1} \sum_j \max\{0, V_{jp}^* - C_{ijp}\}\right] = 0 \qquad \forall i, t \qquad (5\text{-}1)$$

$$\left[\frac{1}{T-p+1} \sum_{p=t}^{T} Y_{ip}^* - X_{ijt}^*\right] \max\{0, V_{jt}^* - C_{ijt}\} = 0 \qquad \forall i, j, t \qquad (5\text{-}2)$$

여기에서

Y_{it}^*, X_{ijt}^*: (P-2)의 最適解

V_{jt}^*: (D-4)의 最適解

그리고 다음과 같이 정의한다.

V_{jt}^+: 雙對可能解(Dual feasible solution)

I_t^+: 모든 $i \in I_t^+$에 $F_{it} - \sum_{p=1}^{t} \frac{1}{T-p+1} \sum_j \max\{0, V_{jp}^* - C_{ijt}\} = 0$이고 모든 $j \in J$에 임의의 $i \in I_t^+$가 $V_{jt} \geq C_{ijt}$인 i의 집합

$$C_{jt}^+ = C_{i^+(j),jt} = \min_{i\in I_t^+} C_{ijt}, \quad i^+)j) \in I_t^+, j \in J, \quad t \in S$$

이때 다음과 같은 해는 (1-1)~(1-5)式과 (5-2)式은 만족한다.

$$Y_{it}^+ = \begin{cases} 1, & i \in I_t^+ \\ 0, & \text{아닐때} \end{cases}$$

$$X_{ijt}^+ = \begin{cases} 1, & i = i^+(j) \\ 0, & \text{아닐때} \end{cases}$$

그런데 이 해들은 (5-2)式은 위반 할 수 있다. 이 위반은 임의의 j에 대해 하나 이상의 $i \in I_+^+$에 대해 $C_{ijt} < V_{jt}$인 경우이다. 왜냐하면 $Y_{it}^+ = 1$일 때 가장 낮은 C_{ijt}값을 갖는 X_{ijt}가 1이고 나머지는 0이기 때문이다. 이와 같은 (5-2)식의 위반으로 쌍대 목적함수의 값 Z_D와 원문제의 Z와는 다음과 같은 차이가 생기게 된다.

정리 2

$$Z^+ - Z_D^+ = \sum_{i\in I_t^+, i\neq i^+(j)} \sum_{j\subset S} \sum_{j\in J} \max\{0, V_{it}^+ - C_{ijt}\}$$

(증명)

$$Z_D^+ = Z_D^+ + \sum_{t\in S}\sum_{i\in I_t^+}\left[F_{it} - \sum_{p=1}^{t} \frac{1}{T-p+1} \sum_j \max\{0, V_{ip} - C_{ijt}\}\right]$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt}^+ + \sum_{t\in S}\sum_{i\in I_t^+} F_{it} - \sum_{t\in S}\sum_{i\in I_t^+} \sum_{p=1}^{t} \frac{1}{T-p+1} \sum_j \max\{0, V_{jp} - C_{ijp}\}$$

여기서

$$\sum_{i\in I_t^+}\sum_{t\in S}\sum_{p=1}^{t} \frac{1}{T-p+1} \sum_j \max\{0, V_{jp}^+ - C_{ijp}\}$$

$$= \sum_{i\in I_t^+}\left[\left(\frac{1}{T}\sum_j \max\{0, V_{j1}^+ - C'_{j1}\right) + \left(\frac{1}{T}\sum_j \max\{0, V_{j2}^+ - C_{ij2}\} + \frac{1}{T-1}\sum_j \max\{0, V_{j2}^+ - C_{ij2}\} + \cdots \left(\frac{1}{T}\sum_j \max\{0, V_{jT} - C_{ijT} + \cdots + \frac{1}{2}\sum_j \max\{0, V_{jT}^+ - C_{ijT}\} + \sum_j \max\{0, V_{jT}^+ - C_{ijT}\}\right.\right.$$

$$= \sum_{i\in I_t^+}\sum_{t\in S}\sum_{j\in J} \max\{0, V_{jt}^+ - C_{ijt}\}$$

위에서 계속하면

$$= \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt}^+ + \sum_{i\in I_t^+}\sum_{t\in S} F_{it} - \sum_{i\in I_t^+}\sum_{t\in S}\sum_{j\in J} \max\{0, Z_{jt}^+ - C_{ijt}\}$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt}^+ + \sum_{i\in I_t^+}\sum_{t\in S} F_{it} - \sum_{t\in S}\sum_{j\in J} \max\{0, V_{jt}^+ - C_{jt}^+ - \sum_{i\in I_t^+, i\neq i^+(i)}\sum_{t\in S}\sum_{j\in J} \max\{0, V_{jt}^+ - (i)t\}$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt} + \sum_{i\in I_t^+}\sum_{t\in S} F_{it} - \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt}^+ + \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt}^+ + \sum_{j\in J}\sum_{t\in S} C_{jt}^+ - \sum_{i\in I_t^+, i\neq i^+(j)}\sum_{t\in S}\sum_{j\in J} \max\{0, V_{jt}^+ - C_{ijt}\}$$

$$= Z^+ - \sum_{i\in I_t^+, i\neq i^+(j)}\sum_{t\in S}\sum_{j\in J} \max\{0, V_{jjt}^+ - C_{ijt}\}$$

Q.E.D

여기에서 Z와 Z_D의 차이가 0일때 최적이 되는데 한번에 최적해가 안나타나면 분단탐색법을 통해 최적해를 구하게 된다.

그리고 문제풀이를 쉽게하기 위해 (5-1)式을 변형 시킬 수 있다. 즉 (P-1) 이 최적일때 $Y_{it}^*=1$이면 다음식이 만족된다.

$$F_{ij}-\sum_{p=1}^{t}\frac{1}{T-p+1}\sum_{j}\max\{0,\ V^{t}{}_{p}^{*}-C_{ijp}\}=0$$

$$F_{it}-\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{T-p+1}\sum_{j}\max\{0,\ V_{jp}^{*}-C_{ijp}\}$$

$$-\frac{1}{T-t+1}\sum_{j}\max\{0,\ V_{jt}^{*}-C_{ijt}\}=0$$

따라서

$$\sum_{j\in J}\max\{0,\ V_{jt}^{*}-C_{ijt}\}=(T-t+1)\cdot f_{it}$$

$$-\sum_{p=1}^{t-1}\frac{T-t+1}{T-p+1}\sum_{j}\max\{0,V_{jp}^{*}-C_{ijt}\}=F_{it}'$$

따라서 (C-5)는 다음과 같이 변형할 수 있다.

C-6

$$Y_{it}^{*}\cdot[F_{it}'-\sum_{j}\max\{0,\ V_{jt}^{*}-C_{ijt}\}]=0\ \forall i,t \tag{6-1}$$

$$\left[\frac{1}{T-p+1}\sum_{p=t}^{T}Y_{ip}^{*}-X_{ijt}^{*}\right]\cdot\max\{0,\ V_{jt}^{*}-C_{ijt}\}=0\ \forall i,j,t \tag{6-2}$$

이때 위와 같은 조건을 이용해서 雙對上昇과정이나 雙對下向 과정을 통해 최적해를 구하게 된다.

2. 雙對上昇過程(Dual ascent Procepure)

(D-4)와 같은 형태의 문제를 푸는 방법이 개발되었는데 이는 (D-4)의 모형이 배우 간단하고 둘째 I-P의 정확한 해에 집착하지 않고 완화된 L-P의 해를 구해 이것이 I-P의 해가 아니면 분단탐색법에 의해 I-P의 해를 구하게 되는데 아주 효율적인 방법이라 하겠다. 이 과정에서는 雙對可能解(Dual feasible solution) V_{jt}^{+}에서 시작해서 수요지 j를 돌면서 V_{jt}^{+}를 그다음 높은 C_{ijt}로 올리면서 雙對可能한 영역내에서 V_{jt}^{+}를 증가 시킬 수 있을 때까지 V_{jt}^{+}를 증가시킨다.

이때 다음과 같은 기호가 필요하다.

$C_{jt}^{k},\ k=1,\cdots,M,C_{jt}^{M+1}=\infty$

이는 C_{ijt}를 i와 t를 고정시킨 뒤 단조증가의 순서로 새로 순위를 정한 것이다.

엘단코터[8]의 雙對上昇과정을 변형시킨 雙對上昇과정은 다음과 같다.

STEP 1: Initialize $t=1$, $F_{it}'=(T-t+1)\cdot F_{it}$ $(t=1,\cdots,T)$

STEP 2: Initialize with any feasible solution $\{V_{jt}\}$ such that $V_{jt}\geq C_{jt}^{k}$ $\forall j,t$ for some k and $S_{it}=F_{it}'-\sum_{j\in J}\max\{0,\ V_{jt}-C_{ijt}\}$ $\forall j\in I_t$, $\forall i\in J$ define $k(jt)=\min\{k:\ V_{jt}\leq C_{jt}^{k}\}$ if $V_{jt}=C_{jt}^{k(jt)}$, increase $k(j,t)$ by 1.

STEP 3: Initialize $j=1$ and $\delta=0$.

STEP 4: Set $\Delta_{jt}=\min_{i\in I_t}\{S_{it}:\ V_{jt}-C_{ijt}\geq 0\}$

STEP 5: If $\Delta_{jt}\geq C_{jt}^{k(jt)}-V_{jt}$, set $\Delta_{jt}=C_{jt}^{k(jt)}-V_{jt}$ and $\delta=1$ and increase $k_{(jt)}$ by 1

STEP 6: Decrease S_{it} by Δ_{jt}, $\forall_i\in I_t$ with $V_{jt}-C_{ijt}\geq O$, then increase V_{jt} by Δ_{jt}

STEP 7: If $j\neq N$ increase j by 1 and return to step 4.

STEP 8: If $\sigma=1$, return to step 3.

STEP 9: If $t=T$, terminate.

Otherwise, decrease F_{iq}' by $\sum_{j}\max\{0,\ V_{it}-C_{ijt}\}\times(T-q+1)\div(T-t+1)$ $(q=t,\ t+1,\cdots,T)$

increase t by 1, and return to step 2.

이 과정에서 step 4, step 5는 S_{it}가 (−)가 되는 것을 방지하므로 雙對可能性(Dual feasibility)를 보장한다.

그런데 step 9에서 F_{it}'가 (−)가 될 수 있는데 이는 $\sum_{j}\max\{0,\ V_{jt}-C_{ijt}\}\times\frac{(T-q+1)}{(T-t+1)}$가 F_{iq}'보다 클때 발생한다. 이때는 $\sum_{j}V_{jt}$의 값을 Z_D의 값으로 쓸수 없고 분단탐색법을 통해 (−)가 생기지 않을 때까지 해를 구하는 절차를 진행시킨다. 그런데 이때 step 2를 다음과 같이 바꾸면 (−)를 방지할 수 있다.

STEP 2: Initialize with any feasible solution $\{V_{jt}\}$ such that $V_{jt}\geq C_{jt}^{k}$ $\forall j,t$ and $F_{it}''=\min_{q}\{F_{iq}'\times(T-t+1)\div(T-q+1)\}$ $(q=t,\ t+1,\cdots,\ T)$ and $S_{it}=F_{it}''-\sum_{j\in J}\max\{0,\ V_{jt}-C_{ijt}\}$ $\forall i,j$ define $k'(jt)=\min\{k;V_{jt}\leq C_{jt}^{k}\}$ if $V_{jt}=C_{jt}^{k'(jt)}$, increase $k'(jt)$ by 1.

이와 같이 하면 $\sum_{j}\max\{0,\ V_{jt}-C_{ijt}\}\times(T-q+1)\div(T-t+1)$가 F_{iq}'이하가 된다. 따라서 쌍대가능영역(Dual feasibility)를 만족한다.

3. 雙對下向過程(Dual descent Procedure)

雙對上昇過程(Dual ascent Procedure)에서는 實現可能解 V_{jt}에서 출발해 해를 향상시켜야 하기 때문에 사실상 C^1_{jt}에서 부터 $\{V_{jt}\}$가 시작하여 해를 향상시키는데 까지 순환 (cycle)을 많이 돌게 된다.

그런데 雙對實現可能性은 보장못하지만 최적해에 가까운 $\{V_{jt}^0\}$를 알때는 이 $\{V_{jt}^0\}$에서 출발해 雙對實現可能性을 만족시키게 해주면 상대적으로 빠르게 雙對最適解에 도달할 수 있다. 이때의 過程은 다음과 같다. (첨자 t제외)

STEP 1: Initialize with dual solution $\{V_j^0\}$

STEP 2: $S_i = F_i' - \sum_{j\in J}\max\{0,\ V_j^0 - C_{ij}\}$ set $j=0$

STEP 3: $I^- = \{i:\ S_i < 0\}$.
If $I^- = \phi$, go to dual ascent procedure step 2.

STEP 4: Increase; by 1.

STEP 5: If $V_j^0 \le C_{ij}\ \forall i$, return to step 6.
$\Omega_j = V_j^0 - C^{k'(j)i}$ $(k'(j) = \max\{k:\ V_j^0 > C_j^k\})$, and increase S_i by $\Omega_j\ \forall i$ with $V_j - C_{ij} > 0$ set $V_{j0} = C^{k'(j)i}$, decrease $k'(j)$ by 1.

STEP 6: If $j \neq N$, return to step 3.

STEP 7: If $j \neq N$, set $j=0$, and return to step 3.

이상과 같은 雙對上昇過程과 雙對下向過程을 이용해서 (D-4)를 풀어 Z_D값은 구한다. 이때 Z값은 손쉽게 구할 수 있는데 두 값의 差가 0이면 最適이고 분단탐색법(b&b)을 이용해서 최적해를 구하게 된다.

4. 分段探索法

雙對上昇過程이나 雙對下向過程을 통해 나온 解가 最適이 아닐때는 分段探索法을 이용해서 最適解를 구하게 된다.

分段探索法은 實現可能領域을 分割해서 최적해를 찾는것으로 문제(P-1)에서는 임의의 Y_{it}를 1, 혹은 0으로 놓음으로서 實現可能領域(feasible region)을 分割하게 되는데 이것은 (C-6)에서 F_{it}'를 0 혹은 ∞로 놓는것과 같다. 그런데(P-1)에서 $Y_{it} - Y_{it}$ ≥ 0의 제약 조건이 있으므로 $Y_{it}=1$이면$Y_{it_a}(t_a = t+1, t+2, \cdots T)$도 역시 1이 되며 F'_{it_a}도 0으로 놓게 된다.

分段(branch)하는 方法에는 여러가지가 있는데 여기에서는 後入先出法(last-in frist-out)을 사용하였다.

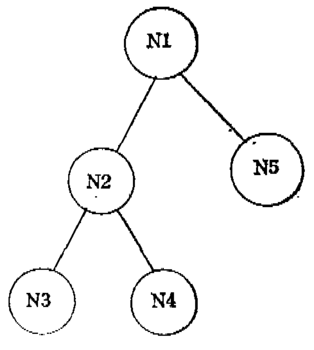

그림 1 b&b tree(last-in first out)

위 過程에서는 원래문제를 Node 1에서 푼 후 이때의 해가 相補的餘裕性을 만족하여 Z와 Z_D의 차이가 0이 되면 最適解가 되고 아니면 임의의 i, t를 노드(node)선택규칙에 따라 정해 $F_{ip}'(p=t, \cdots, T)$를 0으로 놓고 문제를 푼다. (node 2) 이때도 최적정수해가 안 나오면 같은 방법에 따라 노드(node)선택규칙에 따라 또다른 i, t를 정해 $F_{ip}'(p=t, \cdots, T)$를 0으로 놓고 해를 구한다. (node 3) 이때 정수 최적해가 나오면 이노드(node)는 더 이상 고려대상에서 제외(fathome)되다.

그리고 다시 Node 4로 가게 되는데 이때는 $F_{it}' = \infty$으로 놓고 $F_{ip}'(p=t+1, \cdots, T)$는 원래의 값으로 놓은 뒤 해를 구한다. 이때 최적해가 나오거나 下限이기 존해보다 작을 때는 고려 대상에서 제외(fathome or prune)되고 아니면 분할을 계속한다.

고려대상에서 제외되면 node 5로 가게 되는데 이와 같은 방법으로 모든 實現可能領域을 고려대상에서 제외(fathome or prune)할 때 까지 과정을 계속하여 이들 중 가장 작은 값을 갖는 解를 찾는다.

1) 問題의 下限(Lower Bound)

분할된 영역을 계속 풀이할 것인가를 알기위해 이 領域의 下限을 알아야 한다. 만약 이 領域의 下限이 기존에 나와 있는 解의 값보다 크면 이領域은 고려대상에서 제외(prune)된다. 이때 下限은 雙對實現可能(Dual feasible)일때는 $\sum_{j\in J}\sum_{t\in S} V_{jt}$의 값을 下限(L.B)로 쓸 수 있다. 그런데 雙對上昇過程(Dual assent Procedure)에서 STEP 2를 수정하지 않았을 때는 $\sum_{j\subset J}\sum_{t\in S}V_{jt}$의 값은 下限으로 쓸 수 없는데 이 때는 다음과 같은 과정을 거쳐 下限을 구하게 된다.

(P-1)의 最適目的 函數의 값을 $V(p)$라 하고 임의의 i, t에서 F_{it}가 $F_{it}+\alpha((\alpha\geq 0)$가 되었을 때의 최적 목적함수의 값을 $V(p+\alpha)$라하며 이때의 雙對目的函數의 값을 $V(D, \alpha)$라 할 때 다음의 정리가 성립한다.

정리 3

$$V(p)\leq V(D,\alpha)-\alpha$$

(증명)

$V(p)+\alpha$는 F_{it}가 $F_{it}+\alpha$가 된후의 하나의 實現可能한 목적함수의 값이 된다. 따라서 다음의 관계가 성립한다.

$$V(p)+\alpha\geq V(p,\alpha)\geq V(D,\alpha)$$

$$\therefore\ V(p)\geq V(D,\alpha)-\alpha$$

Q.E.D

따라서 임의의 F_{it}'가 $-\alpha(\alpha\geq 0)$로 되었을 때 여기에 α값을 더해주면 雙對實現可能(Dual feasible)해지며 이것은 F_{it}에 $\alpha/(T-t+1)$값을 더해준 것과 같다.

$$(\because F_{it}'=(T-t+1)\cdot F_{it}-\sum_{p=1}^{T}\frac{T-t+1}{T-p+1}\sum_{j}\max\{0,\ V_{jp}-C_{ijp}\}$$

따라서 下限은 다음과 같게 된다.

$$\text{下限(L·B)}\begin{cases}\sum_{j\in J}\sum_{t\in S}V_{jt}:\ \text{(3·2)의 STEP 2를 수정했을 때}\\ \sum_{j\in J}\sum_{t\in S}V_{jt}-\sum_{t\in S}\sum_{i\in I_t^-}\{F_{it}'\div(T-t+1)\}\\ \text{아닐때 여기서} I_t^-=\{i\mid F_{it}'<0\}\end{cases}$$

2) 노드(Node) 선택 규칙

노드(node)를 선택하는 규칙에는 다음의 두가지 方法이 있다.

ⓐ Largest α 규칙

기간 t에서 α값이 가장 큰 i에서 부터 分割한다

$$\alpha_i=\sum_{p=t}^{T}\alpha_{ip}\ \text{여기서}\ \alpha_{ip}=\begin{cases}0, & S_{it}>0\text{일때}\\ 1, & \text{아닐때}\end{cases}$$

ⓑ Smallest β 규칙

기간 t에서 β값이 가장 작은 i에서 부터 分割한다.

$$\beta_i=\sum_{p=t}^{T}S_{ip}$$

3) 分割(Branch)

分割은 1期에서 부터 시작하며 後入先出法을 사용하고 노드(node)선택규칙에 따라 정해진 i, t에 의해 F_{it}'에 0 혹은 ∞의 값을 준다. 이때 F_{it}'에 0의 값을 줄때 先行노드(node)와의 차이는 (D-4)에서 F_{it}가 변한 것 외에는 별다른 차이가 없다. 따라서 선행노드의 V_{jt}는 이번 노드의 V_{jt}값에 매우 근접해 있게 된다. 따라서 이때는 雙對下向過程을 거치는 것이 효과적이다.

4) 노드簡略化過程(Node Simplification)

노드(node)가 패돔(fathome)되거나 프룬(prune)되지 않더라도 더 이상 고려대상에서 제외될 수 있는데 이것은 다음과 같은 노드簡略化過程(Node Simplification)을 통해서 할 수 있다.

∘ 노드簡略化(Node Simplification)

임의의 i, t_a에서 分割했을 때의 최적해의 공급지(i)의 집합이 $\bar{I}_p(p=1,\cdots,T)$이고, 임의의 $i,\ t_b(t_b\in\{t_a, t_{a+1},\cdots,T\})$에서 새롭게 分割을 하였을 때의 최적해의 공급지(i)의 집합을 $\hat{I}_q(q=1,\cdots,T)$라 할 때, $\bar{I}_{t_{b-1}}\in\hat{I}_{t_{b-1}}$이면 $\bar{I}q=\hat{I}q(q=t_{b+1},\cdots,T)$이다.

(증명)

$\bar{I}_q\neq\hat{I}_q(q=t_b+1,\cdots,T)$라 하면 $\bar{I}_q(q=t_{b+1},\cdots,T)$보다 더 나은 해의 집합인 $\hat{I}_q(q=t_{b+1},\cdots,T)$가 존재하는데 이때 $\{\bar{I}_1,\bar{I}_2,\cdots,\bar{I}_{t_b},\hat{I}_{t_{b+1}},\cdots\hat{I}_T\}$역시 임의의 $i,\ t_a$에서 分割했을때의 實現可能解가 되고 $\bar{I}_p(p=1,\cdots,T)$보다 나은 해의 집합이 되므로 $\bar{I}_p(p=1,\cdots,T)$가 최적해의 공급지 (i)의 집합이라는 假定에 어긋난다. 따라서 $\bar{I}_q=\hat{I}_q(q=t_b+1,\cdots,T)$가 성립하여야 한다. Q.E.D.

Ⅳ. 結 論

본논문에서 다루고 있는 最適立地選定의 문제는 整數計劃法의 문제로 線型計劃(L.P)에 비해 解를 구하기가 상당히 어렵게 된다. 더구나 期間은 확장시킴에 따라 整數變數(Integer Variable)가 몇배로 늘게 되어 解를 구하는데 더욱 복잡하게 된다.

이 논문에서는 엘란코터(Erlenkotter)가 개발한 효율적인 單純한 문제(Simple problem)의 解法을 이용하여 수요가 증가함에 따라 설비를 증설하는 문제의 解法을 研究하여 기존의 原問題(Primal problem) 중심으로 期間을 고려하여 설비입지문제를 다룬 解法보다는 효율적인 解法을 연구하였다.

그러나 아직도 규모(size)가 커지면 새로운 解法

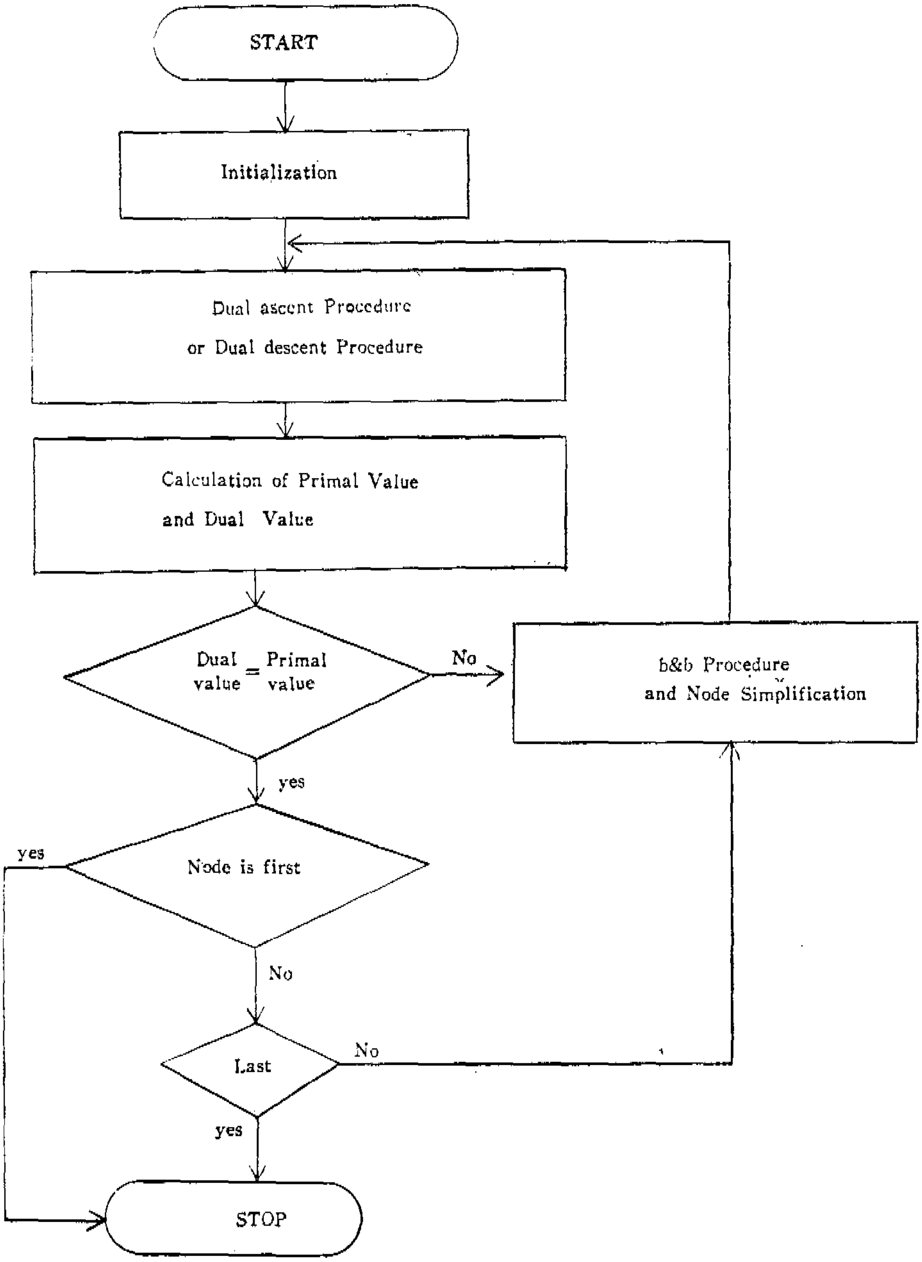

그림 2 **Flow Diagram**

을 적용하여도 상당와 많은 계산 과정이 필요하고 더구나 새로 設備의 上限까지 고려하고 段階도 多段階가 되며 物品도 多品目이 되는 경우는 더욱 복잡한 문제가 된다. 따라서 엘관르터가 상당히 효율적인 해법을 연구 개발하여 본 논문에서도 기존의 해법보다는 효율적인 해법을 연구하였으나 아직 三 실제의 문제(多段階, 多品目, 設備의 能力上限, 多期間)를 다루는데는 상당한 연구가 앞으로 계속되어야 하겠다.

참 고 문 헌

1. Akinc, U. & Khumawalla, B.M.,; "An efficient b &b algorithm for the capacitated warehouse location problem," Mgt. Sci., Vol. 23, No.6, p.585—p.594, 1977.
2. Bilde, O. & Kraup, J.,; "Sharp lower bounds & efficient algorithms for the simple plant location problem," Anns. of Discrete Mathe. 1, p.79—p.97, 1977.
3. Bookbinder, J.H. & S.P. Sethi,; "The Dynamic transportation Problem; A Survey," Nav. Res. Log. Quart., Vol.17, No.1, p.65—p.87, 1980.
4. Balinski, A. Manne,: "Plant Location under economies-of-Scale decentralization and Computation," Mgt. Sci. Vol.11, No.2, 1964.
5. Cornuejols, G. & M.L. Nemhauser,; "On the uncapacited location problem," Anns. of Discrete Mathe. 1, p.163—p.177, 1977.
6. Davis, P.S. & T.L. Ray,; "A b &b algorithms for the capacitated facility location problem," Nav. Res. Log. Quart., Vol.16, No.3, p.331—p.344, 1969.
7. Effroyson, M.A. & T.L. Ray,; "A b & b algorithm for plant location," Opens. Res., Vol.14, No.3, p.361—p.368, 1966.
8. Erlenkotter, D.,; "A dual based procedure for uncapacitated facility location," Opns. Res., Vol.26, No.5, p.992—p.1009, 1978.
9. Eschenbach, T.G.,; "The Multi-Period Location-Allocation Problem," Ph.D. dissertation, Department of Industrial Engineerings, Stanpford University, 1975.
10. Geoffrion, A.M.,; "Lagrangian relaxation for integer programming," Math. Programming Study, p.88—p.114, 1974.
11. Geoffrion, A.M. & Graves, G.W.,; "Multi commodity distribution system design by Bender's decomposition," Mgt. Sci., Vol.16, No.2, p.17—p.41, 1975.
12. Guignard, M. & K. Spielberg,; "A direct dual methods for the mixed plant location problem with some side constraints," Mathe. Programming, Vol.17, No.2, p.198—p.228, 1979.
13. Kaufman, L. & Edge, M.V. & P. Hanson,; "A plant and warehouse location problem," Opl. Quart., Vol.28, No.3, p.947—p.554, 1977.
14. Khumawalla, B.M.,; "An efficient b & b alogrithm for the warehouse location problem," Mgt. Sci., Vol.18, No.2, p.718—p.731, 1972.
15. Nauss, R.M.,; "An improved algorithm for the capacitated Plant location Problem," Opl. Res. Quart., Vol. 29, No.12, p.1195—p.1201, 1978.
16. Roodman, G.M. & L.B. Schwarz,; "Optimal and Heuristic facility Phase-out strategies," A.I.I.E. Trans., Vol.7, No.2, p.177—p.184, 1975.
17. Roodman, G.M. & L.B. Schwarz,: "Extension of Multi-Period Facility Phase-out Model; New Procedure & Application to a Phase-in/Phase-out Problem," A.I.I.E. Trans., Vol.9, No.1, p.103—p.107, 1977.
18. Schrage, L.,; "Implicit representation of variable upper bound in liner programming," Math. Prog. Study 4, p.118—p.182, 1975.
19. Spielberg, K.,; "Algorithm for simple plant location problem with some side constraints," Opens. Res., Vol.17, No.1, p.85—p.111, 1969.
20. Sweeney, D.J. & R.L. Tathm,; "An Improved Long-run Model for multiple ware-

hots location," Mgt. Sci., Vol. 22, No. 7, p. 748—p. 758, 1976.

21. Trusscott, W. G., ; W. G.; "Timming Market entry with a contribution-maximization approach to location-allocation decisions," European Journal of Operational Research 4, p. 95—p. 106, 1980.

22. Y. D. LEE.; "A Dual-Based Algorithm for the Multi-Period Phase-out, Phase-in model in the Uncapacitated Facility Location Problem" M. S. dissertation, Department of Management science, K. A. I. S. T., 1982.