

## Cylindrical Shell의 변형

이 동 기  
기계공학과

### < 요약 >

직경에 비하여 두께가 작은 cylindrical shell이 힘을 받아 변형을 일으켰을때 변위 사이의 미분방정식을 구했다.

shell로부터 취한 미소요소의 측면들에 작용하는 힘과 moment는 strain 및 곡률변화로서 표시할 수 있고 다시 이들은 변위 사이의 미분형태로 표시 가능함을 보임으로써 이 미소요소에 적용하는 힘 moment의 평형조건을 사용하여 변위사이의 미분 방정식이 얻어졌다.

## Deformation of Cylindrical Shell

Lee, Dong Kee  
Dept. of Mechanical Engineering

### <Abstract>

Partial differential equations between the components of displacement are derived when a cylindrical shell, whose wall thickness is relatively small compared with the diameter, is deformed by the load.

The forces and moments acting on the sides of small element of the shell are expressed by the strain and the difference of the rate of curvature. Since it was possible to express these terms in the derivative forms of displacement, differential equations are obtained by using equilibrium condition on this small element.

기 호	
$\epsilon$	; strain
$r$	; 곡률반경
$x, y, z$	; 좌표축
$\epsilon_1$	; 중립면의 $x$ 방향 strain
$\epsilon_2$	; 중립면의 $y$ 방향 strain
$\alpha_x$	; $x$ 방향 곡률의 변화
$\alpha_y$	; $y$ 방향 곡률의 변화
$\sigma$	; stress
$E$	; Young 율
$\nu$	; Poisson 비
$N_x, N_y$	; $x, y$ 방향 인장 또는 압축력
$h$	; shell의 두께
$M_x, M_y$	; $x, y$ 방향 성분 moment
$\gamma$	; 전단 strain
$\tau$	; 전단 응력
$G$	; 횡탄성계수
$\alpha_{xy}$	; 비틀림율의 변화
$N_{xy}, N_{yx}$	; 전단력
$M_{xy}, M_{yx}$	; 비틀림 moment
$u, v, w$	; $x, y, z$ 방향 변위
$a$	; shell의 반경
$\theta$	; 기준선으로부터의 각
$S$	; 원주에 따른 거리의
$Q_x, Q_y$	; shell의 단위 길이에 작용하는 전단력
$p$	; 외부압력

I. 서 론

두께에 비하여 직경이 큰 cylinder 형상의 각종 압력용기, 기타 구조물의 설계에 있어서는 두께에 따른 stress, strain의 변화를 고려하지않고 평균치로서 대체하는 경우가 많다. 일상적인 강도 계산에 있어서는 이러한 방법으로 능히 소기의 목적을 달성할 수 있으나 shell이 압축력을 받아 좌굴을 일으킬 수 있는 조건하에서는 보다 상세한 해석이 요구된다.

여기서는 cylinder 벽의 중립면에서 모선을 x축, x축에 직각으로 중립면에 접하는 축을 y, xy평면에 직각으로 cylinder의 중심을 향하는 축을 z축으로 설정하고 x, y, z방향의 변위를 각각 u, v, w라고 해서 shell이 힘을 받아 변형을 일으켰을때 shell로부터 취한 미소요소에 작용하는 힘과 moment의 x, y, z방향 성분을 우선 변위의 x 및 중심각 θ에 대한 편미분으로 표시하고 제 2단계로서 평형조건을 적용하여 변위 사이의 미분방정식을 얻고자 한다.

계산과정에서 재질이 균일하므로 변형전에 중립면에 직각인 직선요소는 변형후에도 역시 중립면에 직각을 이루는 직선이라고 생각한다. 또 간략을 위하여 힘과 moment들은 단위 길이에 작용하는 것을 기준으로 한다.

II. 변형에 의하여 발생하는 힘 및 moment와 변위와의 관계

1. cylindrical shell로부터 취한 그림 1과 같은 미소요소에서

$$\epsilon_x = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \text{ 이고 } l_1 = ds \left( 1 - \frac{z}{r_x} \right)$$

$$l_2 = ds (1 + \epsilon_1) \left( 1 - \frac{z}{r_x'} \right) \text{ 이므로}$$

르 대입하여 정리하면

$$\epsilon_x = \frac{ds(1+\epsilon_1)(1-z/r_x') - ds(1-z/r_x)}{ds(1-z/r_x)}$$

$$= \frac{\epsilon_1}{1-z/r_x} - \frac{z}{1-z/r_x} \left( \frac{1}{r_x'} + \frac{\epsilon_1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \right)$$

같은 결과로

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon_2}{1-z/r_y} - \frac{z}{1-z/r_y} \left( \frac{1}{r_y'} + \frac{\epsilon_2}{r_y'} - \frac{1}{r_y} \right)$$

두께가 곡률반경에 비하 여작은 shell에 있어서는

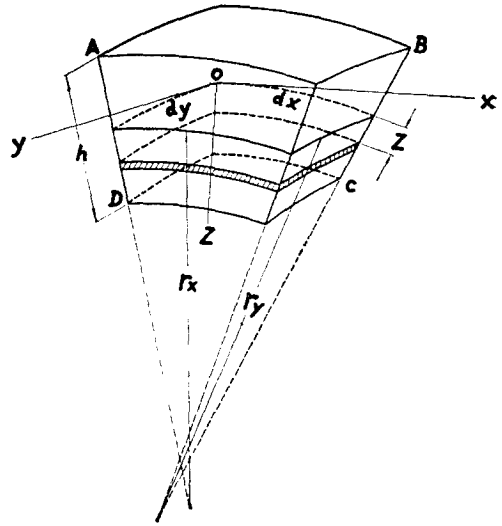


Fig. 1-A

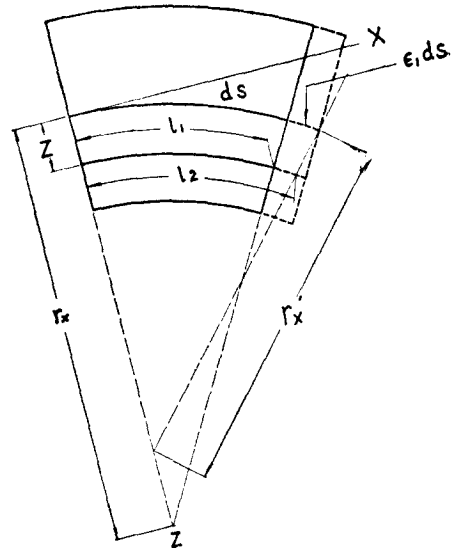


Fig. 1-B

$\frac{z}{r_x}, \frac{z}{r_y}, \frac{\epsilon_1}{r_x'}, \frac{\epsilon_2}{r_y'}$ 가 무시될수 있을만큼 작은 양이므로

$$\epsilon_x = \epsilon_1 - z \left( \frac{1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \right) = \epsilon_1 - \alpha_x z \tag{1}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_2 - z \left( \frac{1}{r_y'} - \frac{1}{r_y} \right) = \epsilon_2 - \alpha_y z \tag{2}$$

그러므로

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 - z(\alpha_x + \nu\alpha_y)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_2 + \nu\epsilon_1 - z(\alpha_y + \nu\alpha_x)]$$

따라서 이 미소요소의 한 측면에 작용하는 힘과 moment는

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \quad (3)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) \quad (4)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\alpha_x + \nu\alpha_y) \quad (5)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\alpha_y + \nu\alpha_x) \quad (6)$$

일방 전단응력은 다음과 같은 파형을 거쳐 구할 수 있다.

그림 2-A는 위의 shell로부터 임의로 취한 미소요소에서 중립면으로부터 z만큼 떨어져 있는 부분을 그린 것이다. 그림과 같이 점 a, b, c, d가 변형을 일으킬 때 점 a의 n방향, t방향 변위를 각각 u<sub>1</sub>, v<sub>1</sub>

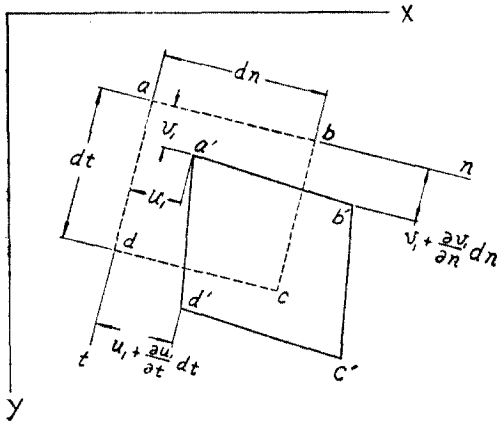


Fig. 2-A

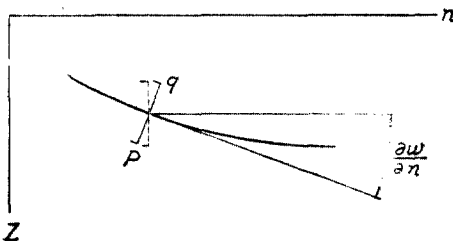


Fig. 2-B

라고 하면 점 d의 변위는  $u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} dt$ , 점 b의 변

위는  $v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial t} dt$  이므로 전체적인 strain  $\gamma_{nt}$ 는

$$\gamma_{nt} = \frac{(v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial n} dn) - v_1}{dn} + \frac{(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} dt) - u_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (i)$$

한편 a점을 지나는 n-z 평면에 의하여 절단된 단면 (그림 2-B)을 생각하면 중립면의 접선은 n축과  $\frac{\partial w}{\partial n}$ 의 각을 이루게 되므로

$$u_1 = -z \frac{\partial w}{\partial n}$$

a점을 지나는 t-z 평면을 생각하면

$$v_1 = -z \frac{\partial w}{\partial t}$$

이 결과를 (i)에 대입하여 정리하면

$$\gamma_{nt} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (ii)$$

$$\tau_{nt} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (iii)$$

n축 t축이 각각 x축 y축과 일치한다고 생각하고 중립면에 일어난 전단변형  $\gamma$ 를 고려하면 전단응력은

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) G, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha_{xy} \text{라고 놓아}$$

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2z\alpha_{xy}) G$$

그러므로

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma - 2z\alpha_{xy}) G dz = \frac{\gamma h E}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

$$M_{yx} = -M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu)\alpha_{xy} \quad (8)$$

2. 그림 3과 같이 변위의 x, y, z 성분을 각각 u, v, w라고 하면

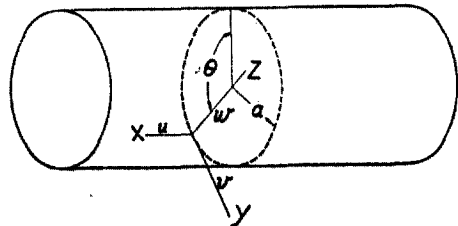


Fig. 3

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

$\epsilon_2$ 는 원주방향 변위  $v$ 와 반경방향 변위  $w$ 의 영향을 받고 이를 식으로 표시하면

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{a\partial\theta} - \frac{w}{a} \quad (10)$$

전단 strain은 식 (i)과 같이 생각할 수 있고 좌표 축을 대체하면

$$\gamma = \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$x$ 방향 곡률의 변화는 각이 작을때는  $\beta \approx \tan \beta$ 가 성립하므로

$$\alpha_x = \left[ \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right\} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] / dx \\ = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11)$$

$y$ 방향 곡률의 변화는

$$\alpha_y = \frac{d\theta - \Delta d\theta}{ds - \Delta ds} - \frac{d\theta}{ds} \\ \Delta d\theta = \left\{ \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds \right\} - \frac{\partial w}{\partial s} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} ds \\ = \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} a d\theta$$

$$\Delta ds = (a-w)d\theta - a d\theta = -w d\theta$$

윗 식에 대입하여 정리하면

$$\alpha_y = \frac{1}{a} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) / \left( 1 - \frac{w}{a} \right) \right] - 1 \right\} \\ = \frac{1}{a} \left\{ \frac{w}{a} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} + \frac{w}{a} \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} + \dots \right\}$$

$\frac{w}{a} \cdot \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2}$  이하의 거의의 영향을 미치지 못하므로

생략하여

$$\alpha_y = \frac{w}{a^2} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2}$$

그런데 곡률의 변화만을 생각할때는 shell 중립면의 선축이 없다고 생각할 때와 같고 식 (10)에서

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{a\partial\theta} - \frac{w}{a} = 0 \quad w = \frac{\partial v}{\partial\theta}$$

이것을 윗식에 대입하여

$$\alpha_y = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) \quad (12)$$

비틀림을 계산하는데 있어서 cylinder 모선의 미소부분을 생각한다. 이 모선은  $y$ 축에 관하여  $-\frac{\partial w}{\partial x}$ ,

$z$ 축에 관하여  $\frac{\partial v}{\partial x}$  만큼 회전한다. 이 모선으로부터

$a d\theta$ 만큼 떨어진 곳의 미소 모선에 대하여 생각해 보면  $w$ 의 변화에 따라  $y$ 축에 관한 비틀림은

$-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} d\theta$ 이고 두 미소모선의 상대 비틀

림각은  $-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} d\theta$ ,  $z$ 축에 관한 비틀림은

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x} d\theta$$
이다.

이 비틀림의  $y$ 축에 관한 성분은  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\theta\right) \approx \Delta\theta$

이므로

$$-\left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x} d\theta \right) d\theta \approx -\frac{\partial v}{\partial x} d\theta$$

따라서 두 미소 모선간의 전 비틀림각은

$$-\left( \frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta$$

위의 결과로 부터

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (13)$$

(9)~(13)식을 (1)~(8)식에 적용하면

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial v}{a\partial\theta} - \frac{w}{a} \right) \right\} \quad (14)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{a\partial\theta} - \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \quad (15)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (16)$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) \right] \quad (17)$$

$$M_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (18)$$

$$M_{yx} = -M_{xy} = \frac{Eh^3}{12a(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (19)$$

### III. 변위 사이의 미분 방정식

$u, v, w$ 사이의 미분 방정식을 얻기 위해서는 cylindrical shell의 미소부분에 대한 힘의 평형을 생각한다. 좌표축과 변위의 설정은 그림 3과 같이 한다. 그림 4는 이 미소부분을 그린 것이다.

#### 1. 비틀림각의 $u, v, w$ 에 의한 표시

(1) BC의 OA에 관한 상대 비틀림 각.

$ox$ 축 중심

그림 4에서

$v$ 의 변위에 의하여

$$\frac{1}{a} \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - \frac{v}{a} = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

w의 변위에 의하여

$$\frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) dx - \frac{\partial w}{a \partial \theta} = \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta \partial x} dx$$

두 식을 증첩하여

$$\frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right) dx \quad (20)$$

o y축 중심

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (21)$$

o z축 중심

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (22)$$

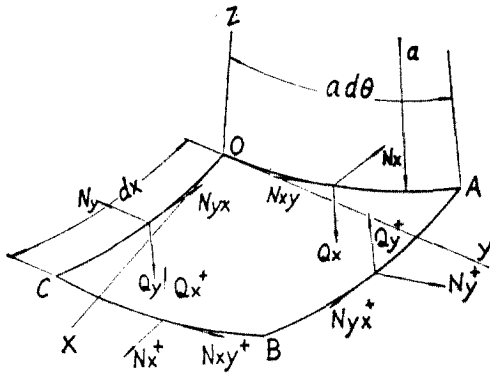


Fig. 4

(2) AB의 OC에 관한 상대 비틀림각

o x축 중심

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) d\theta = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) d\theta$$

원래 d\theta 만큼의 각이 있으므로 두 측면 사이의 각은

$$d\theta + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) d\theta \quad (23)$$

o y축 중심

$$- \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta \quad (24)$$

o z축 중심

v의 변위에 의하여

$$\frac{\partial}{a \partial \theta} \frac{\partial v}{\partial x} a d\theta = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} d\theta$$

w의 변위에 의하여

$$- \frac{\partial w}{\partial x} d\theta$$

증첩하여

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} d\theta - \frac{\partial w}{\partial x} d\theta = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta \quad (25)$$

2. 힘의 평형과 비틀림각과의 관계

식 (25)로부터 N\_y에 평행한 힘의 x방향 분력은

$$- N_y dx \sin \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta \approx - N_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx$$

식 (22)로부터 N\_{xy}에 평행한 힘의 x방향 분력은

$$- N_{xy} a d\theta \sin \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \approx - a N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx d\theta$$

식 (21)과 (24)로부터 Q\_x와 Q\_y에 평행한 힘의 x방향 분력은

$$- Q_x a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx d\theta - Q_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta dx$$

그림 4로부터 N\_x와 N\_{yx}의 x방향 힘은 각각

$$\left( \frac{\partial N_x}{\partial x} \right) dx a d\theta, \left( \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} \right) d\theta dx \text{이다.}$$

이상 x 방향 힘의 총화는 평형조건으로부터 0이 되어야 하므로

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} dx a d\theta + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} d\theta dx \\ & - N_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx \\ & - N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx a d\theta - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx a d\theta \\ & - Q_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta dx = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

y방향 z방향에 대하여도 같은 방법으로 힘의 평형을 생각하고 정리하면 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - a Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & - Q_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & - N_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & + N_{yx} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & - Q_y \left( 1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + N_y \left( 1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) \\ & + N_{yx} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + p a = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

모멘트 평형식은 그림 5로부터 BC와 AB가 각각 OA, OC에 관하여 회전한 각을 고려해서

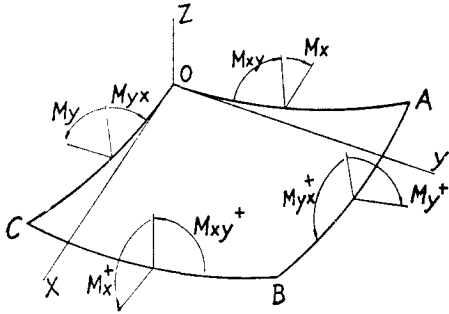


Fig. 5

$$a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \theta} - a M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{yx} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + a Q_y = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} + a M_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - a Q_x = 0 \quad (31)$$

$$M_x \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{yx} \left( 1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) - M_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a (N_{xy} - N_{yx}) = 0 \quad (32)$$

### III. 결 론

식 (30), (31)을 이용하여  $Q_x, Q_y$ 를 구할 수 있고 이 결과를 식 (27), (28), (29)에 대입하면  $N_x, N_y, N_{xy}$  및  $M_x, M_y, M_{xy}$ 를 포함하는 3개의 식이 얻어진다. 여기에 식 (14)~(19)를 대입하면  $u, v, w$  사이의  $x$  및  $\theta$ 에 관한 미분방정식을 구할 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. 이량, 신영기, 인상전 역, 고체역학, pp.155-158, 문운당, 서울(1962)
2. SINGER, Ferdinand L., *Strength of Materials*, pp.38-39, JOHN WEATHERHILL, Tokyo (1964)
3. SHANLEY, F. R., *Mechanics of Materials*, pp.279-290, Kogakusha, Tokyo (1967)
4. TIMOSHENKO, Stephen P., *Theory of Plates and Shells*, pp. 507-514, Kogakusha, Tokyo (1959)