

## Random Vibration에 대한 Review

이 동 기  
기계 공학과

### 〈요 약〉

Random Vibration을 해석하는 기초이론을 간단히 소개하고 이것을 근거로 Random Vibration에서 특히 중요하게 다루어진 두가지 대표적인 문제 즉 Mean-Square Response와 First-Passage Probability를 지난 약 15년간에 발표된 논문중에서 골라 다시 살펴보았다. 기초 이론에서 Spectral Density Function, Autocorrelation Function, Probability Density Function을 정의하고 Stationary Extreme Point Process를 사용해서 Poisson 및 Markov Process에 대한 First-Passage Probability를 계산했다. (4) Nonstationary Excitation에 대한 Mean-Square Response는 Excitation을 Wide Band일 때와 Narrow Band일 때로 구분해서 각각의 경우에 Upper Bound를 구하고 몇가지의 예를들어 그림표를 그렸다. (8)

## A Review on the Random Vibration

Lee, Dong Kee  
Dep't of Mechanical Engineering

### 〈Abstract〉

After introducing a fundamental theory to analyze random vibration, two most important and also typical problems of the subject, that is, mean-square response and first-passage probability, were reviewed from the papers written during the last 15 years. It was shown how to define spectral density function, autocorrelation function, and probability density function, and then first-passage probabilities for Poisson process and Markov process using stationary extreme point process, and the upper bound of mean-square response to wide band excitation and narrow band excitation were calculated. Curves were drawn for some sample envelope functions in each case.

### 〈기 호〉

$m$  : 질량  
 $c$  : 감쇠계수  
 $k$  : Spring 상수  
 $x, x', y$  : 변위  
 $f(t)$  : Excitation  
 $t, \tau, T$  : 시간  
 $\omega, \bar{\omega}$  : Frequency  
 $\omega_n$  : Natural Frequency,  $=\sqrt{k/m}$   
 $\zeta$  : 비감쇠 계수,  $C/C_c=C/2\sqrt{mk}$   
 $\omega_0$  : Random Process의 Central Frequency

$H(\omega)$  : Frequency Response Function  
 $p(x)$  : Probability Density Function  
 $\sigma$  : 표준편차  
 $T_0$  : Random Process의 Central Period,  $=2\pi/\omega_0$   
 $\alpha$  : Threshold Level(Barrier)  
 $h_p(n)$  : Poisson Process의  $h(n)$   
 $h_m(n)$  : Markov Process의  $h(n)$   
 $\rho$  : Autocorrelation Function의 지수상수  
 $\Omega$  :  $n(t)$ 의 Autocorrelation Function의 Frequency  
 $R_0$  : Autocorrelation Constant

\* [ ]속의 숫자는 Reference의 순서와 일치함

$$\omega_D := \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$\epsilon$  : 임의의 작은수  $\ll 1$

$$\mu := \epsilon \omega_D t$$

$\bar{E}[y^2(t)]$  : White Noise Input에 대한  $E[y^2(t)]$ 의 Dimensionless Form

$$\nu := \rho / \epsilon \Omega$$

$$\lambda := \Omega / \omega_D = 1.0 + \epsilon \gamma \text{ (Narrow Band)}$$

$\gamma$  : 임의의 수, 1의 order

$\bar{E}[y^2(t)]$  : Correlated Noise Input에 대한  $E[y^2(t)]$ 의 Dimensionless Form

## I. 서 론

Random Vibraton은 구조물에 대한 지진이나 강풍의 영향때문에 도복 공학자들에 의하여 연구되어 왔고 기계 공학자에게는 근년 특히 우주개발과 더불어 중요한 문제로 등장했다. 로켓 엔진으로부터 분사되는 고압고속의 가스나 다단 로켓의 분리에 이용되는 폭발장치는 큰 소음과 격렬한 진동을 수반하고 이처럼 큰 에너지에 의한 Excitation은 그 진폭 주기가 아주 Random하며 순간 가속도의 절대값도 중력 가속도에 비하여 엄청나게 클때가 있어 정밀한 기기류의 보호방법을 강구해야만 한다. (Fig. 1)

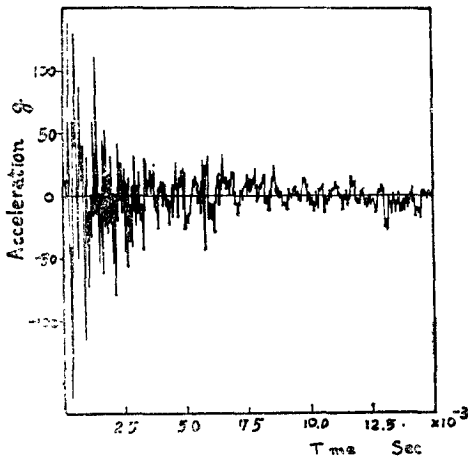


Fig. 1 Acceleration Time History Generated by a Pyrotechnic Firing

종래 진동 문제는 운동 방정식을 세우고 그 미방을 풀어서 완전한 해를 구하였으나 Excitation 자체가 Explicit한 Time Function이 아닌 Random Vibration에 있어서는 Response를 것처럼 완전히 구한다는 것은 불가능하다. 그러므로 통계적인 방법을 이용해서 어떠한 특정된 Excitation에 대한

System의 수명 또는 Response의 경향에 대한 Information을 얻을려는 노력이 성취되어 왔다. Excitation은 대체로 Stationary와 Nonstationary로 구별 되어졌고 각각의 상우 다시 Wide Band (White Noise)와 Narrow Band(Correlated Noise)로 나누어서 문제를 다루었으며 Response 역시 같은 제한 조건에 따라 Analysis 해왔다.

어떠한 System의 수명에 대한 Information을 얻기 위하여는 처음 N Cycle 또는 시간 T동안에 처음으로 Response가 안전구역을 넘어설 확율을 계산하는 문제로 귀착되고 First-Passage Problem으로서 Crandall, Gray, Shinozuka등에 의하여 다루어졌다. Response의 경향을 알기 위하여는 Response의 절대치의 평균값을 우선 생각할 수 있으나 계산의 번거로움 때문에 Response의 자승의 평균값 (Mean-Square Response)을 계산하는 경우가 많고 Barnoski, Maurer, Bucciarelli, Kuo등이 다루었다.

여기서는 우선 Random Vibration에 대한 Approach방법을 간단히 소개한 다음 대표적인 문제로서 Stationary Narrow Band Response에 대해서 First-Passage Probability를 계산하는 문제와 Nonstationary Random Excitation을 받는 System의 Mean-Square Value를 계산하는 문제를 차례에 발표된 논문으로부터 말뭉치 소개해 보고자 한다.

## II. 본 론

### 1. 기초 이론

#### A. Spectral Density Function

1 자유도계의 문제를 예로 들어보면 이데의 운동 방정식은

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1)$$

만약 Excitation  $f(t)$ 가 Harmonic Time Function 이면  $f(t) = R(f_0 e^{i\omega t})$ 라 놓을 수 있고 Mechanical

Impedance Method에 의하여 그 해는

$$x = R(Xe^{i\omega t}) = \frac{1}{2}(Xe^{i\omega t} + X^*e^{-i\omega t}) \quad (2)$$

단  $X = f_0 H(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i \left[ 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right] \right]^{-1} \quad (3)$$

으로 주어진다. Excitation이 임의의 주기함수(Frequency  $\bar{\omega}$ )라면 Harmonic Function의 중첩으로 생각할 수 있으므로

$$f(t) = R(\Sigma f_n e^{in\bar{\omega}t}) = \frac{1}{2}(\Sigma f_n e^{in\bar{\omega}t} + \Sigma f_n^* e^{-in\bar{\omega}t}) \quad (4)$$

이 Excitation의 Mean Square Value는

$$\begin{aligned} \bar{f}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{4} (\Sigma f_n e^{in\bar{\omega}t} + \Sigma f_n^* e^{-in\bar{\omega}t})^2 dt \\ &= \Sigma \frac{f_n f_n^*}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

이 결과를 그림으로 나타내면 그림 2와 같은 Discrete 한 Frequency Spectrum을 얻는다.

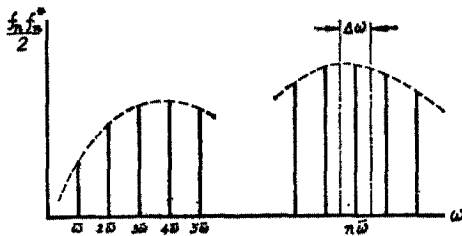


Fig. 2 Discrete Frequency Spectrum

여기서  $S_F(n\bar{\omega})$ 를  $\omega = n\bar{\omega}$  근처의 Frequency Interval  $\Delta\omega$ 에서 Mean Square Value의 Density라고 생각하여

$$S_F(n\bar{\omega})\Delta\omega = \frac{f_n f_n^*}{2} \quad (6)$$

으로 놓아 Excitation의 Spectral Density Function  $S_F(n\bar{\omega})$ 를 정의한다. Response에 대하여 생각해 보면 Multi-Frequency Input에 대한 Response는 각각의 Frequency Input에 대한 Response의 중첩으로 생각되므로 식(2)와 같이

$$\begin{aligned} x &= \Sigma \frac{1}{2} (X_n e^{in\bar{\omega}t} + X_n^* e^{-in\bar{\omega}t}) \\ &= \Sigma \frac{1}{2} [f_n H(n\bar{\omega}) e^{in\bar{\omega}t} + f_n^* H^*(n\bar{\omega}) e^{-in\bar{\omega}t}] \end{aligned} \quad (7)$$

Mean Square Value는

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{4} [\Sigma \{f_n H(n\bar{\omega}) e^{in\bar{\omega}t} + f_n^* H^*(n\bar{\omega}) e^{-in\bar{\omega}t}\}]^2 dt$$

$$\begin{aligned} &= \Sigma \frac{f_n f_n^*}{2} H(n\bar{\omega}) H^*(n\bar{\omega}) \\ &= \Sigma S_F(n\bar{\omega}) H(n\bar{\omega}) H^*(n\bar{\omega}) \Delta\omega \\ &= \Sigma S_x(n\bar{\omega}) \Delta\omega \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{단 } S_x(n\bar{\omega}) = S_F(n\bar{\omega}) H(n\bar{\omega}) H^*(n\bar{\omega}) \quad (9)$$

$f(t)$ 가 많은 Frequency 성분으로 이루어져 있다고 생각하면 Discrete Spectrum은 Continuous Spectrum에 가까워져 가코 Discrete Spectral Density Function  $S(n\bar{\omega})$ 는 Continuous Spectral Density Function  $S(\omega)$ 가 된다고 생각할 수 있다. Continuous Spectral Density Function을 사용하든 Mean Square Value는 식 (8), (9)에서

$$\bar{x}^2 = \int_0^\infty S_F(\omega) H(\omega) H^*(\omega) d\omega = \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega \quad (10)$$

여기서 Spectral Density Function을 좀더 편리한 방법으로 표시하기 위하여 Autocorrelation Function  $\Psi(\tau)$ 를 생각한다.

$$\Psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (11)$$

Fourier Transform을 이용하여 모양을 바꾸면

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^T x(t) e^{i\omega t} dt \right\} X(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} X(-i\omega) X(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (12)$$

$\tau \rightarrow 0$ 일 때 식 (12)는

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \Psi(\tau) &= \bar{x}^2 \\ &= \int_0^\infty \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} X(-i\omega) X(i\omega) d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

(10)식과 (13)식으로부터

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} X(-i\omega) X(i\omega) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} X(i\omega) X^*(i\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

(12)식, (14)식으로부터

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (15)$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (16)$$

### B. Probability Distribution

그림 3-A와 같은 Random Process에서 Amplitude  $x_1$  이하에서  $x(t)$ 가 발견될 확률을  $P(x_1)$ 으로 표시하면

$$P(x_1) = \frac{1}{T} \sum \Delta t \quad (17)$$

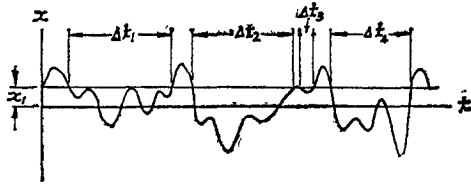


Fig. 3 A Probability Determination

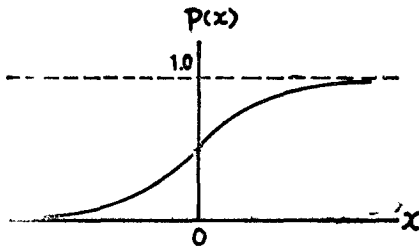


Fig. 3 B Probability Curve

일반으로  $P(x)$ 를  $x$ 에 관하여 미분하여

$$\frac{d}{dx} P(x) = p(x) \quad (18)$$

라 하면  $p(x)$ 를 Probability Density Function이라 하고  $p(x)$ 에 의하여  $x$ 의 Mean Value 및 Mean Square Value는 각각

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (19)$$

$$\bar{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (20)$$

이고 Variance는

$$\sigma^2 = \bar{x^2} - (\bar{x})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx \quad (21)$$

으로 정의된다. Probability Distribution은 Gaussian 및 Rayleigh Distribution을 생각할 수 있고 이들은 각각 Standard Deviation을 써서

$$\text{Gaussian } p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (22)$$

$$\text{Rayleigh } p(x') = \frac{x'}{\sigma^2} e^{-x'^2/2\sigma^2} (x' > 0) \quad (23)$$

으로 표시된다.

### 2. First-Passage Probability

그림 4A와 같은 Stationary Narrow-Band Gaussian Response Process  $x(t)$ 에서  $\eta_1(n)$ 과  $\eta_2(n)$ 을 각각  $x(t)$ 의  $n$ 번째의 극대치 및  $n$ 번째의 극소치라 하면  $\{\eta_1(n)\}$ 을 Maximum Point Process,  $\{\eta_2(n)\}$ 을

Minimum Point Process라 하고 이 두개의 Point Process를 결합한 Process를 Extreme Point Process  $\{\eta(n)\}$ 이라 한다.

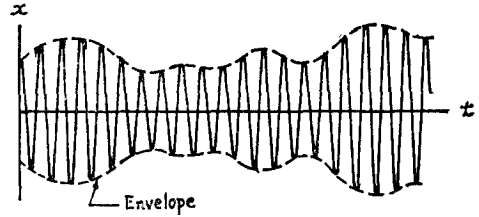


Fig. 4 A Narrow-Band Random Process

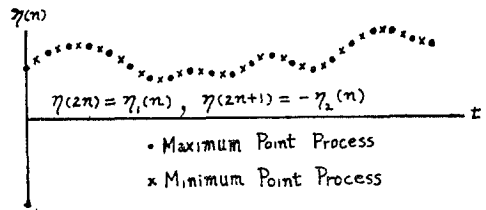


Fig. 4 B Extreme Point Process

이 Extreme Point Process는 Rayleigh Distribution을 이루므로  $P(x)$ 는 이 경우  $P_{\eta(n)}(x)$ 라 하여 식 (23)을 적용함으로

$$P_{\eta(n)}(x) = \int_0^x \frac{x'}{\sigma^2} e^{-x'^2/2\sigma^2} dx' = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (24)$$

또  $j$ 개의 Half Cycle 떨어진  $\eta(i)$ 와  $\eta(i+j)$ 의 Joint Probability Density Function  $p_{n(i)n(i+j)}(x, y)$ 는 근사적으로

$$p_{n(i)n(i+j)}(x, y) = p(x, y; \frac{jT_0}{2}) = p(x, y; \tau)$$

$$\text{단 } \tau = \frac{jT_0}{2}$$

그런데 Rayleigh Distribution에 대한 Joint Probability Density Function은 식 (25)와 같다. (9)

$$p(x, y; \tau) = \frac{xy}{\sigma^4 [1 - k_0^2(\tau)]} I_0 \left[ \frac{xy k_0^2(\tau)}{\sigma^2 [1 - k_0^2(\tau)]} \right] e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2 [1 - k_0^2(\tau)]}} \quad (25)$$

단  $I_0(z)$ ; Zero Order Modified Bessel Function of the First Kind.

$$k_0^2(\tau) = \rho_0^2(\tau) + \lambda_0^2(\tau) \quad (26)$$

$$\rho_0(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty S_x(\omega) \cos(\omega - \omega_0)\tau d\omega$$

$$\lambda_0(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty S_x(\omega) \sin(\omega - \omega_0)\tau d\omega$$

여기서  $S(\omega)$ 가 Central Frequency  $\omega_0$ 에 대하여 대칭인 경우는  $\lambda_0(\tau) \approx 0$ 이 된다. Damping이 작은 Single-Degree-of-Freedom System에서는  $S(\omega)$ 가 Natural Frequency(Central Frequency는 근사적으로 Natural Frequency와 일치한다고 볼수 있다)에 대하여 근사적으로 대칭이 되므로  $\lambda_0(\tau) \approx 0$ 이라고 생각할 수 있고 따라서

$$\rho_0(jT_0/2) \approx \rho(jT_0/2)$$

$\rho(\tau)$  : Normalized Autocorrelation Function.

식 (26)으로부터

$$k_0^2(\tau) \approx \rho^2(\tau).$$

위와 같은 Process에서 근사해를 구해 보기로 한다.  $h(n)$ 을  $x(t)$ 가  $n$ 번째의 Half Cycle에 처음으로 안 전구역을 넘어설 확률이라 하면

$$h(n) = Pr[\eta(n) \geq \alpha | E_{n-1}] \quad (n \geq 1) \quad (27)$$

$$\text{단 } E_{n-1} = \bigcap_{j=1}^{n-1} \{\eta(j) < \alpha\}$$

$$E_0 = \{\eta(0) < \alpha\} \quad (28)$$

$N$  Half Cycle중 어디에선가 First Passage가 일어날 확률을  $F(N)$ 이라 하면

$$F(N) = 1 - \prod_{n=1}^N [1 - h(n)] = 1 - Pr[E_N] \quad (29)$$

$h(n) \ll 1$ 이면  $\prod_{n=1}^N [1 - h(n)] \approx e^{-\sum_{n=1}^N h(n)}$ 이라 놓을 수 있

으므로

$$F(N) = 1 - Pr[E_N] \approx 1 - e^{-\sum_{n=1}^N h(n)} \quad (30)$$

### i) Poisson Process

이 Process는  $\{\eta(n) \geq \alpha\}$ 가 식 (28)의  $E_{n-1}$ 과는 독립적인 Process이므로 식 (24)를 이용하여

$$h_p(n) = 1 - P_{\eta(n)}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \quad (31)$$

First-Passage Probability는 식 (30)과 식 (31)로부터

$$F_p(N) = 1 - e^{-Nh_p(n)} = 1 - e^{-Ne^{-\alpha^2/2\sigma^2}} \quad (32)$$

### • Upper Bound 1

식 (27), (29)로부터

$$\begin{aligned} F(N) - F(N-1) &= \{1 - \prod_{n=1}^N [1 - h(n)]\} \\ &\quad - \{1 - \prod_{n=1}^{N-1} [1 - h(n)]\} \\ &= h(N) \prod_{n=1}^{N-1} [1 - h(n)] \\ &= Pr[\eta(N) \geq \alpha, E_{N-1}] \quad (33) \end{aligned}$$

$\eta(0) < \alpha$ 이고,  $E_{n-1} = \{\eta(0) < \alpha\}$ 이므로,  $F(0) = 0$ 라고 따라서 식 (33)을 차례로 적용하여

$$F(N) = \sum_{n=1}^N Pr[\eta(n) \geq \alpha, E_{n-1}] \quad (34)$$

임을 알 수 있다. 그러므로 Simple Upper Bound는 식 (31)로부터

$$F(N) < \sum_{n=1}^N Pr[\eta(n) \geq \alpha] = Ne^{-\alpha^2/2\sigma^2} \quad (35)$$

### ii) Markov Process

$\eta(n)$ 가  $\eta(n-1)$ 에만 영향을 받고 그 보다 앞선 Extreme Point에는 무관한 Process에서는

$$\begin{aligned} h_m(n) &= Pr[\eta(n) \geq \alpha | \eta(n-1) < \alpha] \\ &= \frac{Pr[\eta(n) \geq \alpha, \eta(n-1) < \alpha]}{Pr[\eta(n-1) < \alpha]} \\ &= \frac{Pr[\eta(n) \geq \alpha, \eta(n-1) < \alpha]}{1 - Pr[\eta(n-1) \geq \alpha]} \\ &= \frac{\bar{q}}{1 - q_0} \quad (36) \end{aligned}$$

단  $\bar{q} = Pr[\eta(n) \geq \alpha, \eta(n-1) < \alpha]$

$$= \int_{\alpha}^{\infty} \int_0^{\alpha} p(x, y; \frac{T_0}{2}) dx dy$$

$$q_0 = Pr[\eta(n-1) \geq \alpha] = e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \quad (37)$$

식 (29)와 식 (36)으로부터

$$\begin{aligned} F_m(N) &= 1 - \left[1 - \frac{\bar{q}}{1 - q_0}\right]^N \\ &\approx 1 - e^{-\frac{N\bar{q}}{1 - q_0}} \quad (38) \end{aligned}$$

### • Upper Bound 2

식 (34)로부터

$$F(N) < \sum_{n=1}^N Pr[\eta(n) \geq \alpha, \eta(n-1) < \alpha] = N\bar{q} \quad (39)$$

$\{\eta(n) \geq \alpha, E_{n-1}\} \subset \{\eta(n) \geq \alpha, \eta(n-1) < \alpha\} \subset \{\eta(n) \geq \alpha\}$ 이므로 Upper Bound 2는 Upper Bound 1보다 예리하다고 볼 수 있다. 여기서 우리가 생각할 수 있는 바는 실제의 Process에 있어서는  $\eta(n)$ 은  $\eta(n-1)$ 만이 아니라 일반적으로 그보다 더욱 앞에 있는 Point들과도 관계가 있을 것이므로 Markov Process라고 할 수 없고 더구나 Poisson Process라고도 할 수 없다는 것이다. 그러나 Markov Process는 Poisson Process보다는 좀더 사실에 가까운 Process라고 볼 수 있고 Upper Bound 2도 같은 이유에서 Upper Bound 1보다는 사실에 가깝다 할 것이다.

### iii) Clump Size Approximation

Lyon<sup>(12)</sup>은 Excursion이 개별적으로 일어나지 않고 Clump를 이루어 나타나는 경향이 있음을 제기했다. Clump는 서로 독립적으로 일어난다고 하면

Average Failure Rate는 Poisson Failure Rate를 한 Clump에 포함된 Extreme Point의 평균 개수(Expected Number)  $E[M]$ 으로서 나눈 값이 될 것이다.

$$\bar{h}(n) = h_p(n) / E[M]$$

식 (32)로부터

$$F(N) = 1 - \prod_{n=1}^N [1 - \bar{h}(n)] \approx 1 - e^{-N\bar{h}(n)} \quad (40)$$

여기서  $E[M]$ 은 다음과 같이 그 근사치를 계산할 수 있다.  $Q_m$ 을  $\eta(n)$  (단  $\eta(n) > \alpha$ ) 다음의  $m$ 개의 연속적인 Extreme Point가 Barrier를 넘을 Conditional Probability라 한다면

$$Q_m = P_r \{ \bar{E}_m | \eta(n) \geq \alpha \} - P_r \{ \bar{E}_{m+1} | \eta(n) \geq \alpha \} \quad (41)$$

$$\text{단 } \bar{E}_m = \prod_{j=n+1}^{n+m} \{ \eta(j) \geq \alpha \}$$

따라서

$$E[M] = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} m Q_m \quad (42)$$

$m > 1$ 일 때  $Q_m$ 을 구하기는 간단한 일이 아니므로 다음과 같이 근사화 한다.

$$\begin{aligned} Q_m &\approx P_r \{ \eta(n+m) \geq \alpha | \eta(n) \geq \alpha \} - P_r \{ \eta(n+m+1) \geq \alpha | \eta(n) \geq \alpha \} \\ &= (q_m - q_{m+1}) / q_0 \quad (43) \end{aligned}$$

$$\text{단 } q_m = \int_{\alpha}^{\infty} \int_{\alpha}^{\infty} \dot{p}(x, y; \frac{mT_0}{2}) dx dy$$

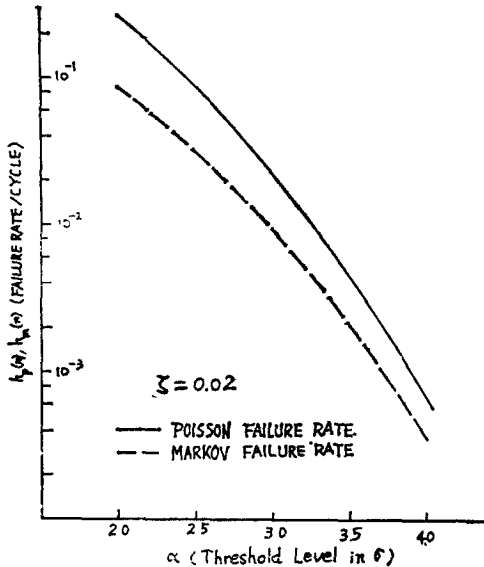


Fig. 5A Failure Rate

\* 본문중 식 (55)이하 참조

식 (43)을 식 (42)에 대입하여

$$E[M] \approx 1 + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{q_m - q_{m+1}}{q_0} \quad (44)$$

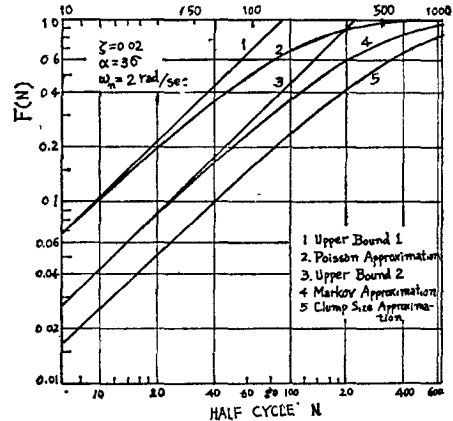


Fig. 5B First-Passage Probability

### 3. Mean-Square Response

Single-Degree-of-Freedom System이  $f(t) = g(t)n(t)$ 의 형태로 주어지는 Nonstationary Random Excitation을 받을 때의 Response를 생각해 보기로 한다. 여기서  $g(t)$ 는 Well-defined Envelope Function이고 변화 속도가 느린 일반 함수라고 생각한다. \*  $n(t)$ 는 Gaussian Stationary Noise로서 Auto-correlation Function은 아래 식 (46), (47)과 같다. (7,8)

$$\Psi_n(\tau) = 2\pi R_0 \delta(\tau) \quad (\text{Wide Band}) \quad (46)$$

$$\Psi_n(\tau) = R_0 e^{-\epsilon|\tau|} \cos \Omega \tau \quad (\text{Narrow Band}) \quad (47)$$

System의 Damping은  $\epsilon$  Order로서 적다고 생각하고  $t \leq 0$ 일 때 정지해 있어서  $\dot{x}(0) = x(0) = 0$ 이라고 한다면 식 (1)의 양변을  $m$ 으로 나누어

$$x + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{1}{m} f(t) \quad (1)'$$

Duhamel's Integral<sup>(11)</sup>에 의하여

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-t')} \sin \omega_D(t-t') f(t') dt' \quad (48)$$

어떤 순간  $t$ 에서의 Mean-Square Response는 많

은 Response Time History에 대한  $x(t) \cdot x(t)$ 의 Ensemble Average를 계산함으로써 구할 수 있다. 식 (48)에서 Averaging Process는  $f(t')$ 에만 관련되므로

$$E[x^2(t)] = \frac{1}{m^2 \omega_D^2} \int_0^t e^{-\zeta \omega_n(t-t_2)} \sin \omega_D(t-t_2) \int_0^t e^{-\zeta \omega_n(t-t_1)} \sin \omega_D(t-t_1) E[f(t_1) f(t_2)] dt_1 dt_2 \quad (49)$$

$g(t)$ 는 Defined Function이므로

$$E[f(t_1) f(t_2)] = g(t_1) g(t_2) E[n(t_1) n(t_2)] \quad (50)$$

$n(t)$ 는 Ergodic Process라고 볼 수 있고 또  $t_2 = t_1 + \tau$ 라고 생각하여

$$E[n(t_1) n(t_2)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t_1) n(t_1 + \tau) dt_1 = \Psi_n(\tau) = \Psi_n(t_2 - t_1) \quad (51)$$

식 (50, 51)을 식 (49)에 대입하여

$$E[x^2(t)] = \frac{1}{m^2 \omega_D^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\zeta \omega_n(t-t_2)} e^{-\zeta \omega_n(t-t_1)} \sin \omega_D(t-t_2) \sin \omega_D(t-t_1) g(t_2) g(t_1) \Psi_n(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (52)$$

식 (46)과 식 (47)을 식 (52)에 대입하여 각각의 경우 Mean-Square Value를 구할 수 있다.  $\zeta$ 가 작고  $g(t)$ 가 위에 기술한 제한에 따를 때  $E[x^2(t)]$ 의 값을 구해 본다.

i) Response to White Noise

식 (46)과 (52)에서

$$E[x^2(t)] = \frac{1}{m^2 \omega_D^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\zeta \omega_n(t-t_2)} e^{-\zeta \omega_n(t-t_1)} \sin \omega_D(t-t_2) \sin \omega_D(t-t_1) g(t_2) g(t_1) 2\pi R_0 \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \frac{2\pi R_0}{m^2 \omega_D^2} \int_0^t e^{-2\zeta \omega_n(t-t_1)} \sin^2 \omega_D(t-t_1) g^2(t_1) dt_1 \quad (53)$$

$$\zeta = \frac{\omega_D}{\omega_n}$$

$$\tau = \epsilon \omega_D t_2 \quad (54) \text{라 놓으면}$$

$$\mu = \epsilon \omega_D t$$

$$E[x^2(\mu)] = \frac{2\pi R_0}{\epsilon m^2 \omega_D^3} \int_0^\mu [e^{-2(\mu-\tau)} \sin^2 \frac{\mu-\tau}{\epsilon} g^2(\tau)] d\tau = \frac{\pi R_0}{\epsilon m^2 \omega_D^3} \int_0^\mu e^{-2(\mu-\tau)} [1 - \cos 2 \frac{\mu-\tau}{\epsilon}] g^2(\tau) d\tau$$

$$= \frac{\pi R_0}{\epsilon m^2 \omega_D^3} \left[ \int_0^\mu e^{-2(\mu-\tau)} g^2(\tau) d\tau - \cos \frac{2\mu}{\epsilon} \int_0^\mu e^{-2\mu-\tau} \cos \frac{2\tau}{\epsilon} g^2(\tau) d\tau - \sin \frac{2\mu}{\epsilon} \int_0^\mu e^{-2(\mu-\tau)} \sin \frac{2\tau}{\epsilon} g^2(\tau) d\tau \right] \quad (55)$$

$g(\tau)$ 의 변화 속도가 작다면 즉  $\frac{dg}{d\tau} = o(g)$ 이면 식 (55) 중 끝 두항은 첫항에 비하여  $\epsilon$ 의 Order이므로 (40) 이들을 무시하고 Dimensionless Form으로 쓰면

$$\bar{E}[x^2(\mu)] \equiv \frac{\epsilon m^2 \omega_D^3}{\pi R_0} E[x^2(\mu)] \equiv \int_0^\mu e^{-2(\mu-\tau)} g^2(\tau) d\tau \quad (56)$$

• Maxima of  $\bar{E}[x^2(\mu)]$

식 (56)을  $\mu$ 에 관하여 미분함으로

$$\frac{d\bar{E}}{d\mu} + 2\bar{E} = g^2(\mu) \quad (57)$$

$\bar{E}$ 가 Maximum일 때  $\frac{d\bar{E}}{d\mu} = 0$ 이므로 이 때는

$$\bar{E} = \frac{1}{2} g^2(\mu) \quad (58)$$

식 (56)을  $\mu$ 에 관하여 2차 미분하고  $\bar{E}$ 의 극대치에 대하여는

$$\frac{d^2 \bar{E}}{d\mu^2} = 2g(\mu) \frac{dg}{d\mu} - 2 \frac{d\bar{E}}{d\mu} \leq 0 \quad (59)$$

$g(\mu) > 0, \frac{d\bar{E}}{d\mu} = 0$ 이므로

$$\frac{dg}{d\mu} \leq 0 \quad (60)$$

식 (58), (60)으로 부터

$$\max\{\bar{E}[x^2(\mu)]\} \leq \frac{1}{2} \max\{g^2(\mu)\} \quad (61)$$

식 (61)은 Upper Bound를 뜻한다.

• Examples

①  $g(t)$ 가 Unit Step Function이면 식 (56)에서

$$\bar{E}[x^2(\mu)] = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\mu}) \quad (62)$$

②  $g(t)$ 가 Half-Sine Pulse일 때 즉

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases} \quad (63)$$

일 때 식 (56)에서

$$\bar{E}[x^2(\mu)] = \frac{1}{8} (2 - e^{-2\mu} - \cos 2\mu - \sin 2\mu) \quad (64)$$

식 (64)는 그림 6과 같다.

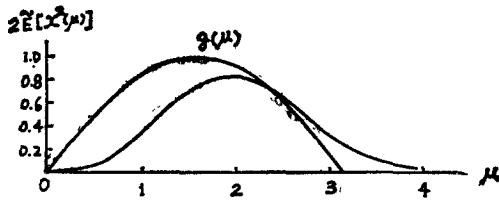


Fig. 6 Mean-Square Response White Noise Input (Half Sine Pulse)

### ii) Response to Correlated Noise

식 (47)에서  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $\rho = \epsilon \nu \Omega$ ,  $\lambda = \frac{\Omega}{\omega_D}$  라 하여 식 (52)에 대입하고 식 (54)를 이용하여

$$\begin{aligned} E[x^2(t)] &= \frac{1}{m^2 \omega_D^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\zeta \omega_n(t-t_2)} e^{-\zeta \omega_n(t-t_1)} \\ &\quad \sin \omega_D(t-t_2) \sin \omega_D(t-t_1) g(t_1) g(t_2) \\ &\quad R_0 e^{-\rho |t_2-t_1|} \cos \Omega(t_2-t_1) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{R_0}{m^2 \epsilon^2 \omega_D^4} \int_0^\mu \int_0^\mu e^{-(\mu-\tau_2)} e^{-(\mu-\tau_1)} \\ &\quad \sin \frac{\mu-\tau_2}{\epsilon} \sin \frac{\mu-\tau_1}{\epsilon} g(\tau_1) g(\tau_2) \\ &\quad e^{-\nu \lambda |\tau_2-\tau_1|} \cos \frac{\lambda(\tau_2-\tau_1)}{\epsilon} d\tau_1 d\tau_2 \quad (65) \end{aligned}$$

Narrow Band Excitation이므로  $\lambda = 1.0 + \epsilon \gamma$  ( $\gamma$ 는 1의 Order)라 하고 3차함수의 연산을 하여 식 (65)는

$$E[x^2(\mu)] = \frac{R_0}{4\epsilon^2 m^2 \omega_D^4} e^{-2\mu} \int_0^\mu \int_0^\mu e^{(\tau_1-\tau_2)} e^{-\nu \lambda |\tau_2-\tau_1|} g(\tau_1) g(\tau_2) G(\mu; \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \text{단 } G(\mu; \tau_1, \tau_2) &= \sin \frac{\mu-\tau_2}{\epsilon} \sin \frac{\mu-\tau_1}{\epsilon} \cos \frac{\lambda(\tau_2-\tau_1)}{\epsilon} \\ &= \cos \gamma(\tau_2-\tau_1) + \cos \left[ \frac{2+\epsilon \gamma}{\epsilon} (\tau_2-\tau_1) \right] \\ &\quad - \cos \frac{2\mu}{\epsilon} \left[ \cos \left( \frac{2+\epsilon \gamma}{\epsilon} \tau_2 - \gamma \tau_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \left( \frac{2+\epsilon \gamma}{\epsilon} \tau_1 - \gamma \tau_2 \right) \right] \end{aligned}$$

### ◦ Examples

①  $g(\tau)$ 가 Unit Step Function이면 식 (68)에서  $g(\tau) = u(\tau)$ 이므로

$$\begin{aligned} E[x^2(\mu)] &= e^{-2\mu} \int_0^\mu \int_0^\mu e^{\tau_1-\tau_2} e^{-\nu \lambda |\tau_2-\tau_1|} \cos \gamma(\tau_2-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= e^{-2\mu} \left[ \int_0^\mu \int_{-\mu}^\mu e^{\nu} e^{-\nu \lambda |v|} \cos \gamma v \frac{1}{2} dv du + \int_\mu^{2\mu} \int_{-(2\mu-u)}^{2\mu-u} e^{\nu} e^{-\nu \lambda |v|} \cos \gamma v \frac{1}{2} dv du \right] \\ &= e^{-2\mu} \left[ \int_0^\mu e^{\nu} \int_0^\mu e^{-\nu \lambda v} \cos \gamma v dv du + \int_\mu^{2\mu} e^{\nu} \int_0^{2\mu-u} e^{-\nu \lambda v} \cos \gamma v dv du \right] \\ &= \frac{e^{-2\mu}}{\gamma^2 + \nu^2 \lambda^2} \left[ \gamma \int_0^\mu e^{(1-\nu \lambda)u} \sin \gamma u du - \nu \lambda \int_0^\mu e^{(1-\nu \lambda)u} \cos \gamma u du + \nu \lambda \int_0^{2\mu} e^{\nu} du \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sin \frac{2\mu}{\epsilon} \left[ \sin \left( \frac{2+\epsilon \gamma}{\epsilon} \tau_2 - \gamma \tau_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \left( \frac{2+\epsilon \gamma}{\epsilon} \tau_1 - \gamma \tau_2 \right) \right] \quad (67) \end{aligned}$$

식 (67)을 식 (66)에 대입하고 적분하면 첫항을 제외한 다른 항들의 적분값은 첫항에 비하여  $\epsilon$  Order 이므로 무시하고 Dimensionless Form으로 써서

$$\begin{aligned} E[x^2(\mu)] &= \frac{4\epsilon^2 m^2 \omega_D^4}{R_0} E[x^2(\mu)] \\ &= e^{-2\mu} \int_0^\mu \int_0^\mu e^{\tau_1+\tau_2} e^{-\nu \lambda |\tau_2-\tau_1|} g(\tau_1) g(\tau_2) \\ &\quad \cos \gamma(\tau_2-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (68) \end{aligned}$$

### ◦ Maxima of $E[x^2(\mu)]$

식 (68)로부터  $\tau_1 + \tau_2 = u$ ,  $\tau_2 - \tau_1 = v$ 라고 변수 변환하여

$$\begin{aligned} E[x^2(\mu)] &\leq [e^{-2\mu} \int_0^\mu \int_0^\mu e^{\tau_1+\tau_2} e^{-\nu \lambda |\tau_2-\tau_1|} \\ &\quad d\tau_1 d\tau_2] \max\{g^2(\mu)\} \\ &= \max\{g^2(\mu)\} e^{-2\mu} \left[ \int_0^\mu \int_{-u}^u e^{\nu} e^{-\nu \lambda |v|} \frac{1}{2} dv du \right. \\ &\quad \left. + \int_\mu^{2\mu} \int_{-(2\mu-u)}^{2\mu-u} e^{\nu} e^{-\nu \lambda |v|} \frac{1}{2} dv du \right] \\ &= \max\{g^2(\mu)\} e^{-2\mu} \left[ \int_0^\mu e^{\nu} \frac{1-e^{-\nu \lambda u}}{\nu \lambda} du \right. \\ &\quad \left. + \int_\mu^{2\mu} e^{\nu} \frac{1-e^{-\nu \lambda (2\mu-u)}}{\nu \lambda} du \right] \\ &= \frac{\max\{g^2(\mu)\}}{\nu \lambda} \left[ \frac{\nu \lambda}{1-\nu \lambda} e^{-2\mu} - \frac{e^{-(1+\nu \lambda)\mu}}{1-\nu \lambda} \right. \\ &\quad \left. + 1 - \frac{1-e^{-(1+\nu \lambda)\mu}}{1+\nu \lambda} \right] \\ &= \max\{g^2(\mu)\} \left[ \frac{1}{1+\nu \lambda} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-\nu \lambda} \frac{2e^{-\mu} - (1+\nu \lambda)e^{\nu \lambda \mu}}{(1+\nu \lambda)e^{(2+\nu \lambda)\mu}} \right] \\ &\leq \max\{g^2(\mu)\} \frac{1}{1+\nu \lambda} \\ &\lambda = 1.0 + \epsilon \gamma \text{이므로 생략하여} \\ E[x^2(\mu)] &\leq \frac{\max\{g^2(\mu)\}}{1+\nu} \quad (69) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + e^{-2\nu\lambda\mu}(\gamma\sin 2\gamma\mu - \nu\lambda\cos 2\gamma\mu) \int_{\mu}^{2\mu} e^{(1+\nu\lambda)u} \cos \gamma u du - e^{-2\nu\lambda\mu}(\gamma\cos 2\gamma\mu \\
 & + \nu\lambda\sin 2\gamma\mu) \int_{\mu}^{2\mu} e^{(1+\nu\lambda)u} \sin \gamma u du ] \\
 = & \frac{e^{-2\mu}}{\gamma^2 + \nu^2\lambda^2} \left\{ \frac{\gamma}{\gamma^2 + (1-\nu\lambda)^2} [(1-\nu\lambda)e^{(1-\nu\lambda)\mu} \sin \gamma\mu - \gamma e^{(1-\nu\lambda)\mu} \cos \gamma\mu + \gamma] \right. \\
 & - \frac{\nu\lambda}{\gamma + (1-\nu\lambda)^2} [(1-\nu\lambda)e^{(1-\nu\lambda)\mu} \cos \gamma\mu - 1 + \nu\lambda + \gamma e^{(1-\nu\lambda)\mu} \sin \gamma\mu] + \nu\lambda(e^{2\mu} - 1) \\
 & + \frac{e^{-2\nu\lambda\mu}(\gamma\sin 2\gamma\mu - \nu\lambda\cos 2\gamma\mu)}{\gamma^2 + (1+\nu\lambda)^2} (1+\nu\lambda)e^{2(1+\nu\lambda)\mu} \cos 2\gamma\mu - (1+\nu\lambda)e^{(1+\nu\lambda)\mu} \cos \gamma\mu \\
 & + \gamma e^{2(1+\nu\lambda)\mu} \sin 2\gamma\mu - \gamma e^{(1+\nu\lambda)\mu} \sin \gamma\mu ] \\
 & - \frac{e^{-2\nu\lambda\mu}(\gamma\cos 2\gamma\mu + \nu\lambda\sin 2\gamma\mu)}{\gamma^2 + (1+\nu\lambda)^2} [(1+\nu\lambda)e^{2(1+\nu\lambda)\mu} \sin 2\gamma\mu - (1+\nu\lambda)e^{(1+\nu\lambda)\mu} \sin \gamma\mu \\
 & - \gamma e^{2(1+\nu\lambda)\mu} \cos 2\gamma\mu + \gamma e^{(1+\nu\lambda)\mu} \cos \gamma\mu ] \left. \right\} \\
 = & \frac{e^{-2\mu}}{\gamma^2 + \nu^2\lambda^2} \left[ \frac{\gamma^2 + \nu\lambda - \nu^2\lambda^2 - (\gamma^2 + \nu\lambda - \nu^2\lambda^2)e^{(1-\nu\lambda)\mu} \cos \gamma\mu + \gamma(1-2\nu\lambda)e^{(1-\nu\lambda)\mu} \sin \gamma\mu}{\gamma^2 + (1-\nu\lambda)^2} + \nu\lambda e^{2\mu} - \nu\lambda \right. \\
 & + \frac{\gamma^2 e^{2\mu} - \gamma e^{(1-\nu\lambda)\mu} \sin \gamma\mu - 2\gamma\nu\lambda e^{(1-\nu\lambda)\mu} \sin \gamma\mu - \nu\lambda(1+\nu\lambda)e^{2\mu} + \nu\lambda(1+\nu\lambda)e^{(1-\nu\lambda)\mu} \cos \gamma\mu}{\gamma^2 + (1+\nu\lambda)^2} \\
 & \left. - \frac{\gamma^2 e^{(1-\nu\lambda)\mu} \cos \gamma\mu}{\gamma^2 + (1+\nu\lambda)^2} \right] \\
 = & \frac{1+\nu\lambda}{\gamma^2 + (1+\nu\lambda)^2} + \frac{1-\nu\lambda}{\gamma^2 + (1-\nu\lambda)^2} e^{-2\mu} \\
 & - \frac{2e^{-(1+\nu\lambda)\mu}}{[\gamma^2 + (1-\nu\lambda)^2][\gamma^2 + (1+\nu\lambda)^2]} [(1+\gamma^2 - \nu^2\lambda^2)\cos \gamma\mu + 2\gamma\nu\lambda\sin \gamma\mu]
 \end{aligned}$$

$\lambda=1.0+\epsilon\gamma$ 이므로  $\lambda$ 를 생략하여

$$\underline{E}[x^2(\mu)] = \frac{1+\nu}{\gamma^2 + (1+\nu)^2} + \frac{1-\nu}{\gamma^2 + (1-\nu)^2} e^{-2\mu} - \frac{2e^{-(1+\nu)\mu}}{[\gamma^2 + (1+\nu)^2][\gamma^2 + (1-\nu)^2]} [(1+\gamma^2 - \nu^2)\cos \gamma\mu + 2\gamma\nu\sin \gamma\mu] \tag{70}$$

특히  $\mu \rightarrow \infty$ 이면

$$\underline{E}[x^2(\mu)]_{\mu \rightarrow \infty} = \frac{1+\nu}{\gamma^2 + (1+\nu)^2} = \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{[1+\gamma^2/(1+\nu)^2]} \tag{71}$$

②  $g(\tau)$ 가 식 (63)과 같은 Half-Sine Pulse이고  $\gamma=0$ 이라면 식 (68)을 같은 방법으로 적분하여 그림 7D의 같은 Curve를 얻는다.

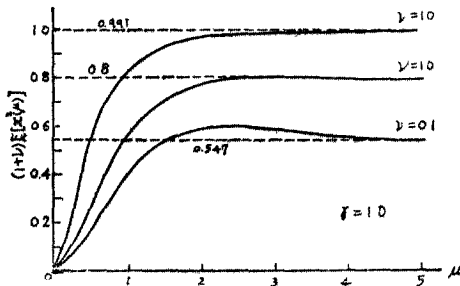


그림 7A Mean-Square Response  $\gamma=1.0$  Narrow-Band Input (Unit Step)

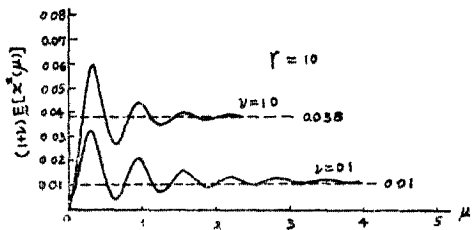


그림 7B Mean-Square Response  $\gamma=10$  Narrow-Band Input (Unit Step)

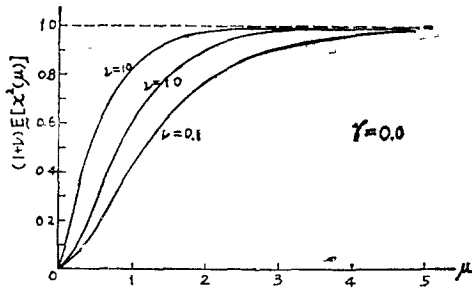


그림 7C Mean-Square Response  $\gamma=0.0$   
Narrow-Band Input (Unit Step)

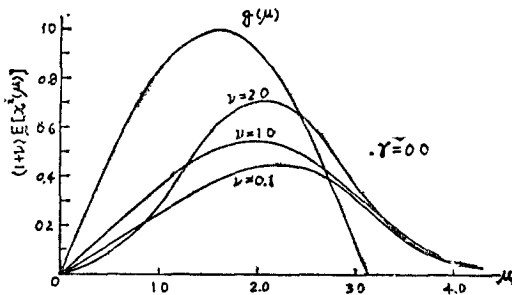


그림 7D Mean-Square Response  $\gamma=0.0$   
Narrow-Band Input (Half-Sine Pulse)

### III. 결 론

1 자유도계의 Response를 바탕으로 Random Vibration에 대한 Spectral Density Function, Autocorrelation Function을 정의했는데 이 두개의 함수는 Random Vibration을 해석하는 유용한 수단이 되고 있고 Excitation이나 Response를 막론하고 Wide Band나 Narrow Band의 경우는 그 성격이 알려져 있으므로 이것을 이용하면 되나 그 중간 구역에서는 정확한 성격을 규정하기가 어렵다.

지금까지 발표된 논문으로 보면 System이 대부분 작은 Damping계수를 가진 1자유도계라고 생각해서 문제를 다루었는데 복잡한 구조물이 1자유도계라고 보기는 어려우나 그중에서도 특히 관심을 끄는 곳을 한 Unit로 하고 그 Unit에 전달되는 Excitation을 생각한다면 1자유도계로 Approximation한 수도 있을 것이므로 앞에서 생각한 문제들이 비록 전 System에 대한 일괄적인 Information을 일

\* 본문 중의 식 (46), (47) 및 [1]

시에 줄 수는 없을지라도 그 효용성은 여전히 유지된다고 생각되며 Damping에 대하여 생각해 보면 System에 특별한 Damping장치가 없는 곳에서는 진동이 단순히 System내부의 마찰작용 등에 의하여 감쇠된다면 Damping계수는 각다고 볼 수 있다. 그러나 가령 Damping이 크대든가 자유도가 2 이상이라면 상당한 수정이 가해져야 될 것이고 특히 자유도가 증가할 때의 문제는 상당히 복잡해 질 것이 예상된다.

대표적인 문제로서 First-Passage Probability와 Mean-Square Response를 소개하였으나 이 외에도 Racicot와 Moses는 Threshold에 대한 Average Positive Slope Crossing Rate를 사용하여 First-Passage Probability를 계산하였고 Barnoski와 Maurer는 Mean-Square Response를 계산하는데 Nonstationary Spectral Density Function을 정의하고 이것을 기초로 몇가지 Envelope Function에 대하여 복잡한 적분을 해서 본 Review에 소개한 것과 유사한 결과를 얻었다. 특히 Crandall은 Computer를 이용하여 Simulation에 의한 First-Passage Probability를 계산했고 이 값은 같은 Subject의 Theoretical Analysis의 타당성 여부에 대한 척도가 되고 있다.

본 Review에서 생각한 문제들 이외에도 Random Vibration에서 관심을 끄는 문제는 Stability에 관련된 문제와 Transient Response등이 있음을 부기한다.

### 참 고 문 헌

1. THOMSON, William T., Vibration Theory and Application, pp.314—335 Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1965)
2. MOOD, Alexander M., Introduction to the Theory of Statistics pp24—36. McGraw-Hill, New York (1950)
3. HOGG, Robert V. and CRAIG, Allen T., Introduction to Mathematical Statistics 2nd ed., pp.96—106, The Macmillan Company, New York (1965)
4. YANG, J.N. and SHINOZUKA, M., "On the First Excursion Probability in Stationary

- Narrow-Band Random Vibration," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 4, Trans. ASME. Vol. 93, Series E, Dec. 1971 pp. 1017—1022.
5. BUCCIARELLI, L.L. and ASKINAZI, J., "Pyrotechnic Shock Synthesis Using Nonstationary Broad Band Noise," *Journal of Applied Mechanics* Vol. 40, No. 2, Trans. ASME. Vol. 95, Series E, June 1973 pp. 429—432.
  6. RACICOT, Ronald L., and Moses, Fred., "A First-Passage Approximation in Random Vibration," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 1, Trans. ASME. Vol. 93, Series E, March 1971 pp. 143—147.
  7. BARNOSKI, R.L. and MAURER, J.R., "Mean-Square Response of Simple Mechanical Systems to Nonstationary Random Excitation," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, No. 2, Trans. ASME. Vol. 91, Series E, June 1969, pp. 221—227.
  8. BUCCIARELLI, L.L. JR. and KUO, C., "Mean-Square Response of a Second Order System to Nonstationary Random Excitation," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, No. 3, Trans. ASME. Vol. 92, Series E, Sep. 1970 pp. 612—616.
  9. HELSTROM, Carl W., *Statistical Theory of Signal Detection*, 2nd ed., pp. 65—72, p. 181 Pergamon Press, New York (1968)
  10. JEFFEREYS, H. and JEFFEREYS, Bertha S., *Method of Mathematical Physics*, 3rd ed. pp. 431—432, Cambridge University Press (1962)
  11. WYLIE, C.R. JR., *Advanced Engineering Mathematics*, 3rd ed. pp. 270—274, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo (1966)
  12. LYON, R.H., "On the Vibration Statistics of a Randomly Excited Hard-Spring Oscillator II," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 33, 1961, pp. 1395—1403.