

강체의 변위를 해석하기 위한 데이터 교정법에 관하여

주 영 우
기 계 공 학 과
(1983. 9. 30 접수)

〈요 약〉

강체의 변위를 해석하기 위하여 측정된 데이터를 교정하기 위한 방법에 관하여 연구하였다. 최적 변위 매트릭스를 변수들의 값이 적다고 가정하여 근사화시켜 폐형해를 얻었다.

얻어진 폐형해를 사용하여 수치 계산을 하여 Suh⁽¹⁾의 결과 및 정확한 식으로 구한 값들과 비교, 검토하였다. 근사화시킨 해가 Suh의 것과 거의 같은 결과를 주었으며, 실제로 사용하기가 더 편리하고, 계산시간도 상당히 줄일 수 있었다.

On the Data Correction Method for the Analysis of Rigid Body Displacement

Choo, Young Woo
Dept. of Mechanical Engineering
(Received September 30, 1983)

〈Abstract〉

The data correction method for the analysis of rigid body displacement is investigated. The optimal displacement matrix is approximated under the assumption that the values of displacement variable, are small.

A closed form solution is obtained. Numerical results are compared with Suh's⁽¹⁾ and the other that is obtained by exact equations.

The results shows that approximated solution gives almost the same as the Suh's and is more convenient for practical use, and the computing time can be reduced considerably.

I. 서 론

강체는 어떤 범위에서도 형체를 변화하지 않으므로 강체의 어떤 두 점 사이의 거리도 항상 일정하여야 한다. 그러므로 강체의 동일한 점들의 좌표를 다른 위치에서 측정하여 두 점 사이의 거리를 계산하였을 때 같아야 한다. 그러나 대개는 측정오차가 발생하게 됨으로 측정된 데이터로 정확하게 같은 거리를 얻지 못하게 된다. 이런 데이터로 강체의 변위를 해석할 수 없으므로 데이터의 교정은 중요

한 것이다.

Suh⁽¹⁾는 최소자승법을 이용한 데이터 교정법을 제시하였는데, 이 방법은 비선형연립방정식을 계산하여야 함으로 비선형연립방정식을 위한 프로그램이 필요하고, 초기값을 가정하여야 하기 때문에 사용하기에 매우 불편하다.

본 논문에서는 최소자승법과 변위매트릭스를 근사화시켜 간편한 최적 계산을 유도하고, 얻어진 해를 사용하여 전산 프로그램을 개발하여 문헌 [1]에서 취급한 예제와 다른 예제에 대하여 수치적 결과를 비교 및 검토한다.

II. 목적함수

강체의 변위매트릭스를 얻으려하는 강체의 3점의 변위를 알아야 한다. (2) Fig. 1과 같이 강체의 3점을 두 위치에서 측정하였을 때 얼마의 오차가 있었다고 가정한다.

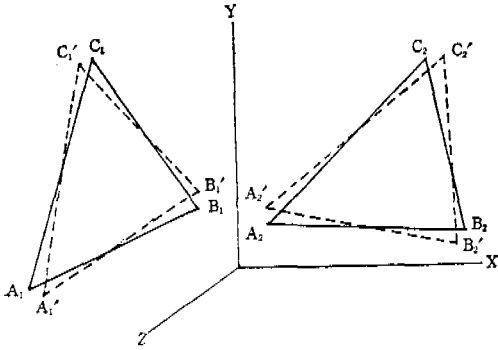


Fig. 1 Measured and Corrected Points

A₁, B₁, C₁, A₂, B₂, 및 C₂에 측정오차가 있었다고 가정하였으므로 이 베타로 얻은 거리들은 다음의 부등식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{A_1 B_1} &\neq \overline{A_2 B_2} \\ \overline{A_1 C_1} &\neq \overline{A_2 C_2} \\ \overline{B_1 C_1} &\neq \overline{B_2 C_2} \end{aligned} \quad (1)$$

이 문제에서 얻어진 베타를 수정하여 거리가 일정한 관계를 얻어야 한다. 위 점들의 좌표를 수정하여 얻은 점들을 A₁', B₁', C₁', A₂', B₂' 및 C₂'로 하였을 때 다음의 관계가 성립하여야 한다.

$$\begin{aligned} \overline{A_1' B_1'} &= \overline{A_2' B_2'} \\ \overline{B_1' C_1'} &= \overline{B_2' C_2'} \\ \overline{A_1' C_1'} &= \overline{A_2' C_2'} \end{aligned} \quad (2)$$

이 문제에 대한 해는 목적함수에 따라 많이 있을 수 있다. 본 논문에서는 목적함수를 측정된 점들과 교정된 점들의 거리의 자승한 값들의 합으로 하며 다음과 같이 나타낸다. (3)

$$F_0 = (A_1 - A_1')^2 + (B_1 - B_1')^2 + (C_1 - C_1')^2 + (A_2 - A_2')^2 + (B_2 - B_2')^2 + (C_2 - C_2')^2 \quad (3)$$

III. 최적 관계식

Fig. 1의 두 삼각형은 Fig. 2와 같이 X-Y 평면

에 중첩되게 이동시킬 수 있다. 여기서 PA₁, PB₁, PC₁, PA₂, PB₂ 및 PC₂는 A₁, B₁, C₁, A₂, B₂ 및 C₂에 대응하는 점들이다.

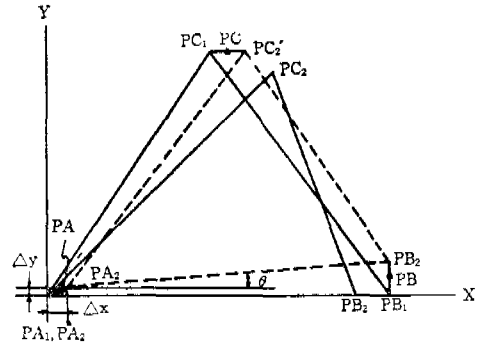


Fig. 2 Optimal position of PA₂ PB₂ PC₂

만일 측정오차가 없었다면 PC₂와 PB₂는 각각 PC₁과 PB₁에 일치하여야 한다.

ΔPA₂ PB₂ PC₂를 PA₂점이(ΔX, ΔY)로 변위하고 θ 만큼 회전하여 얻은 새로운 점들을 PA₂', PB₂' 및 PC₂'라고 하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$\{PA_2', PB_2', PC_2'\} = [D] \{PA_2, PB_2, PC_2\} \quad (4)$$

여기서 [D]는 강체변위매트릭스이며 다음과 같이 표시된다.

$$[D] = \begin{bmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta, & \Delta X \\ \sin\theta, & \cos\theta, & \Delta Y \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

PA₂', PB₂' 및 PC₂'가 식 (3)의 목적함수를 최소로 하는 점들이며 식 (5)의 ΔX, ΔY 및 θ는 매우 작은 값이 되므로 식 (5)를 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$[D] = \begin{bmatrix} 1, & -\theta, & \Delta X \\ \theta, & 1, & \Delta Y \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

목적함수 식 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_0' = (PA_1 - PA_2')^2 + (PB_1 - PB_2')^2 + (PC_1 - PC_2')^2 \quad (7)$$

식 (7)은 ΔX, ΔY 및 θ의 함수이고 이 함수가 최소가 되기 위한 조건을 다음과 같이 표시된다. (4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0'}{\partial \Delta X} &= 0 \\ \frac{\partial F_0'}{\partial \Delta Y} &= 0 \\ \frac{\partial F_0'}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (4), (6), (7) 및 식 (8)로부터 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} SX_1 - SX_2 + SY_2 \cdot \theta - 3\Delta X &= 0 \\ SY_1 - SX_2 \cdot \theta - SY_2 - 3\Delta Y &= 0 \\ SY_2 \cdot \Delta X - SX_2 \cdot \Delta Y - P \cdot \theta - Q &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} SX_1 &= X_{PA_1} + X_{PB_1} + X_{PC_1} \\ SX_2 &= X_{PA_2} + X_{PB_2} + X_{PC_2} \\ SY_1 &= Y_{PA_1} + Y_{PB_1} + Y_{PC_1} \\ SY_2 &= Y_{PA_2} + Y_{PB_2} + Y_{PC_2} \\ P &= Y_{PB_1}^2 + Y_{PC_1}^2 + X_{PB_1}^2 + X_{PC_1}^2 \\ Q &= X_{PB_1} \cdot Y_{PB_1} + X_{PC_1} \cdot Y_{PC_1} \\ &\quad - X_{PB_2} \cdot Y_{PB_2} - X_{PC_2} \cdot Y_{PC_2} \end{aligned}$$

이다. 식 (9)로부터 최종 관계식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{CT + (SY_2 \cdot SX_1 - SX_2 \cdot SY_1)/3}{SL - (SY_2^2 + SX_2^2)/3} \\ \Delta X &= \frac{SX_1 - SX_2 + SY_2 \cdot \theta}{3} \\ \Delta Y &= \frac{SY_1 - SY_2 - SX_2 \cdot \theta}{3} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} CT &= Y_{PB_1} \cdot X_{PB_2} + Y_{PC_1} \cdot X_{PC_2} \\ &\quad - X_{PB_1} \cdot Y_{PB_2} - X_{PC_1} \cdot Y_{PC_2} \\ SL &= Y_{PB_1}^2 + Y_{PC_1}^2 + X_{PB_1}^2 + X_{PC_1}^2 \end{aligned}$$

이다.

교정된 점들은 Fig. 2에서 PA_1 과 PA_2' , PB_1 과 PB_2' , PC_1 과 PC_2' 의 중앙 점인 PA , PB 및 PC 로 하면 3번의 길이가 같아야 하는 조건 식 (2)를 만족시키게 된다.

IV. 계산 순서 및 전산 프로그램

측정하여 얻은 데이터 A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 및 C_2 로부터 교정된 데이터 $A_1', B_1', C_1', A_2', B_2'$ 및 C_2' 를 얻기 위하여 다음의 순서로 계산한다.

제 1단계 : 3차 공간좌표에서 2차평면 X-Y 좌표로 변환한다.

제 2단계 : 식 (10)를 사용하여 $\Delta X, \Delta Y$ 및 θ 를 구하여 식 (5)와 같이 변위매트릭스 $[D]$ 를 얻는다.

제 3단계 : $[D]$ 를 사용하여 3점 PA_2, PB_2, PC_2 를 PA_2', PB_2', PC_2' 로 변환한다.

제 4단계 : PA_1, PB_1, PC_1 과 PA_2', PB_2', PC_2' 사이의 중앙점인 PA, PB, PC 를 구한다.

제 5단계 : PA, PB, PC 를 역변위매트릭스 $[D]^{-1}$ 를 사용하여 변환시킨 후에 Fig. 1의 A_2', B_2', C_2' 로 변환한다.

제 6단계 : PA, PB, PC 를 Fig. 1의 A_1', B_1', C_1' 로 변환한다.

위의 과정을 수행하기 위한 전산프로그램을 부록에 첨부하였으며 유통신도는 Fig. 3에서 보여 주고 있다.

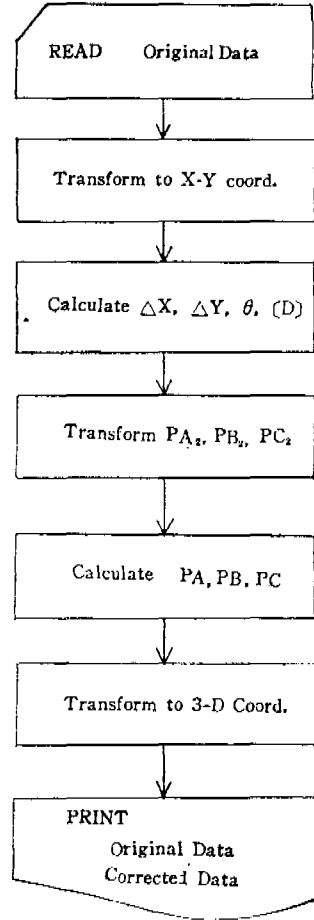


Fig. 3 Flow Chart of Computer Program

V. 수치결과 및 토론

본 결과의 정밀성을 검토하기 위한 수치계산 예와 결과를 Table 1에 정리하였다.

Table 1에서 $\Sigma \delta$ 는 수치 결과를 검토하기 위한 것으로 다음과 같이 표시된다.

Table 1. Numerical example and results

N.O	Original Data			Dorrected Data			$\Sigma\delta$
	A	B	C	A'	B'	C'	
CASE 1	1.00	-1.00	3.00	0.996223	-1.026849	3.030626	0.211375
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	3.00	0.00	0.00	3.037012	-0.015892	-0.021680	
	-1.63	-2.00	1.65	-1.609437	-1.983376	1.612855	
	6.00	2.30	4.20	5.968923	2.326049	4.204950	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
CASE 2	-4.048	3.976	-0.019	-4.024693	3.948492	-0.014779	0.115525
	0.044	0.019	3.038	0.03981	0.018169	3.04300	
	0.036	0.048	0.007	0.036083	0.047970	0.066948	
	-3.960	3.962	-0.005	-3.983355	3.989519	-0.00916	
	-0.048	0.027	3.011	-0.044106	0.028155	3.005952	
	-0.028	-0.025	0.019	-0.027947	-0.024976	0.018923	

$$\Sigma\delta = \overline{A_1A_1'} + \overline{B_1B_1'} + \overline{C_1C_1'} + \overline{A_2A_2'} + \overline{B_2B_2'} + \overline{C_2C_2'} \quad (11)$$

CASE 1은 문헌 [1]의 예제이며, 여기서 $\Sigma\delta = 0.2106729$ 이며 그 차이는 0.33% 정도임을 알 수 있다. CASE 2는 근사식을 사용하지 않는 경우와 비교하기 위하여 계산하였으며 근사식을 사용하지 않는 경우 $\Sigma\delta = 0.115532$ 였다. 이 경우에서 근사식을 사용한 결과가 정확한 수치계산보다 더 좋을 수 있다는 것을 알 수 있다.

II. 결 론

강체의 변위를 해석하기 위한 데이터 교정법에 관하여 근사식과 최적조건을 사용하여 간단한 관계식을 얻었으며 전산 프로그램도 개발하였다. 몇 가지 경우에 대하여 수치 계산을 하여 비교 및 검토하였으며 다음의 결론을 얻을 수 있다.

- (1) 근사식을 사용하므로 계산과정을 상당히 단순하게 하였다.
- (2) 근사식을 사용한 수치 결과가 완전한 계산에 대하여 매우 가까운 결과를 얻을 수 있다.
- (3) 반복 계산하지 않으므로 전산 계산시간을 상당히 단축된다.

후 기

본 연구를 위하여 전자계산기의 사용과 조언을 아끼지 않은 University of Colorado의 Suh, C. H. 교수에게 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. C. H. Suh and S. W. Hong, "Computer-Aided X-Ray Data Correction Method with Use of Rigid Body Conditions", 6th Biomechanics Conference on the Spine, Dec. 1974, pp.53-126.
2. C. H. Suh, *Computer-Aided Design of Mechanisms*, University of Colorado, Boulder, 1980.
3. C. H. Suh, "Optimal Design of Mechanisms with the Use of Matrices and Least Squares", *Mechanism and Machine Theory*, vol.8., 1973, pp.479-495.
4. E. J. Haug and J. S. Arora, *Applied Optimal Design*, John Wiley and Sons, New York, 1970.

<부 록 I>

UNIVERSITY OF MINNESOTA FORTRAN COMPILER (VERSION 5.4 - 79/03/01) ON THE 6400 UNDER KRONOS 2.1.0 ON 83/05/03 AT 15.47
UNIVERSITY COMPUTING CENTER - UNIVERSITY OF COLORADO

```

MNF,1*OPTITRI,L=CORRECT.

1. 0000008 PROGRAM OPTITRI(INPUT,OUTPUT,TAPES=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
2. 000131B REAL A(3,3),B(3,3),AM(3,2),BM(3,2),AC(3,3),BC(3,3)
3. 0002131B REAL UAX(3),UAY(3),A4(3),UBX(3),UBY(3),B4(3),AR(3,2),BR(3,2)
4. 0002131B 1 READ(5,2),((A(I,J),J=1,3),(B(I,J),J=1,3),I=1,3)
5. 000276B 2 FORMAT(6F10.7)
6. 000276B IF(EOF(5)) 1000,3,1000
7. 000300B 3 DO 5 I=1,3
8. 000302B DO 4 J=1,2
9. 000304B AM(I,J)=0.0 $ BM(I,J)=0.0
10. 000306B 4 CONTINUE
11. 000310B 5 CONTINUE
12. 000312B A1L=0.0 $ A3L=0.0 $ A4L=0.0 $ CTA=0.0
13. 000314B D1L=0.0 $ D3L=0.0 $ D4L=0.0 $ CTB=0.0
14. 000316B DO 10 I=1,3
15. 000320B A1L=A1L+(A(2,I)-A(1,I))*2
16. 000324B A3L=A3L+(A(3,I)-A(1,I))*2
17. 000328B B1L=B1L+(B(2,I)-B(1,I))*2
18. 000332B B3L=B3L+(B(3,I)-B(1,I))*2
19. 000336B 10 CONTINUE
20. 000338B A1L=SQRT(A1L) $ B1L=SQRT(B1L)
21. 000342B A3L=SQRT(A3L) $ B3L=SQRT(B3L)
22. 000346B DO 20 I=1,3
23. 000350B UAX(I)=(A(2,I)-A(1,I))/A1L
24. 000354B UAY(I)=(A(3,I)-A(1,I))/A3L
25. 000358B CTA=CTA+UAX(I)*UAY(I)
26. 000362B UBX(I)=(B(2,I)-B(1,I))/B1L
27. 000366B UBY(I)=(B(3,I)-B(1,I))/B3L
28. 000370B CTB=CTB+UBX(I)*UBY(I)
29. 000374B 20 CONTINUE
30. 000378B AM(3,1)=A3L*CTA $ BM(3,1)=B3L*CTB
31. 000382B DO 30 I=1,3
32. 000386B A4(I)=A(3,I)+AM(3,1)*UAX(I)
33. 000390B A4L=A4L+(A(3,I)-A4(I))*2
34. 000394B B4(I)=B(3,I)+BM(3,1)*UBX(I)
35. 000398B B4L=B4L+(B(3,I)-B4(I))*2
36. 000402B 30 CONTINUE
37. 000406B A4L=SQRT(A4L) $ B4L=SQRT(B4L)
38. 000410B AM(3,2)=A4L $ BR(3,2)=B4L
39. 000414B DO 40 I=1,3
40. 000418B UAY(I)=(A(3,I)-A4(I))/A4L
41. 000422B UBY(I)=(B(3,I)-B4(I))/B4L
42. 000426B 40 CONTINUE
43. 000430B AM(2,1)=A1L $ BM(2,1)=B1L
44. 000434B CALL CORRECT(AM,BM,AR,BR)
45. 000438B DELTA=0.0
46. 000442B DO 60 I=1,3
47. 000446B DELA=0.0 $ DELB=0.0
48. 000450B DO 50 J=1,3
49. 000454B AC(I,J)=A(I,J)+AR(I,1)*UAX(J)+AR(I,2)*UAY(J)
50. 000458B BC(I,J)=B(I,J)+BR(I,1)*UBX(J)+BR(I,2)*UBY(J)
51. 000462B DELA=DELA+(A(I,J)-AC(I,J))*2
52. 000466B DELB=DELB+(B(I,J)-BC(I,J))*2
53. 000470B 50 CONTINUE
54. 000474B DELTA=DELA+SQRT(DELA)+SQRT(DELB)
55. 000478B 60 CONTINUE
56. 000482B PRINT 100
57. 000486B 100 FORMAT(1H1,5(//),40X,'BEFORE CORRECTION',/,40X,17(1H*),//,
58. 000490B * 20X,'TRIANGULAR A',30X,'TRIANGULAR B',//,
59. 000494B * 15X,'X',10X,'Y',10X,'Z',20X,'X',10X,'Y',10X,'Z',//)
60. 000498B PRINT 200,((A(I,J),J=1,3),(B(I,J),J=1,3),I=1,3)
61. 000502B 200 FORMAT(3(10X,3(1X,F10.6),10X,3(1X,F10.6),//)
62. 000506B PRINT 300
63. 000510B 300 FORMAT(5(//),40X,'AFTER CORRECTION',/,40X,16(1H*),//,
64. 000514B * 20X,'TRIANGULAR A',30X,'TRIANGULAR B',//,
65. 000518B * 15X,'X',10X,'Y',10X,'Z',20X,'X',10X,'Y',10X,'Z',//)
66. 000522B PRINT 200,((A(I,J),J=1,3),(B(I,J),J=1,3),I=1,3)
67. 000526B PRINT 400,DELTA
68. 000530B 400 FORMAT(5(//),15X,'SUM OF DELTA=',F10.6)
69. 000534B 1000 STOP
70. 000538B END

1. 000000B SUBROUTINE CORRECT(AM,BM,AR,BR)
2. 000002B REAL AM(3,2),BM(3,2),AR(3,2),BR(3,2),XD(3),YD(3)
3. 000006B SX1=0.0 $ SY1=0.0 $ SX2=0.0 $ SY2=0.0
4. 000010B DO 10 I=1,3
5. 000014B SX1=SX1+AM(I,1) $ SY1=SY1+AM(I,2)
6. 000018B SX2=SX2+BM(I,1) $ SY2=SY2+BM(I,2)
7. 000022B 10 CONTINUE
8. 000026B SX3=SX2-3.*DM(1,1) $ SY3=SY2-3.*BM(1,2)
9. 000030B CT=0.0 $ SL=0.0
10. 000034B DO 20 I=1,2
11. 000038B D3=BM(I+1,1)-BM(I,1) $ DY=BM(I+1,2)-BM(I,2)
12. 000042B C=(CT+AM(I+1,2)+DX-AM(I+1,1))*DY
13. 000046B SL=SL+DX**2+DY**2
14. 000050B 20 CONTINUE
15. 000054B THETA=(CT+(SY3*SX1-SX3*SY1)/3.)/(SL-(SY3**2+SX3**2)/3.)
16. 000058B XD(1)=(SX1*THETA-SX3+SY1)/3.
17. 000062B YD(1)=(SY1-SX3*THETA-SY3+SX1)/3.
18. 000066B A1=COS(THETA) $ A12=SIN(THETA)
19. 000070B A13=XD(1)-BM(1,1)+A1-BM(1,2)+A12
20. 000074B A21=-A12 $ A22=A11
21. 000078B A23=YD(1)-BM(1,1)+A21-BM(1,2)+A22
22. 000082B A112=-A11**2-A21**2 $ A123=-A12*A13-A22*A23
23. 000086B DO 30 I=1,2
24. 000090B XD(I+1)=BM(I+1,1)-BM(I,1)+XD(1)-THETA*(BM(I+1,2)-BM(1,2))
25. 000094B YD(I+1)=THETA*(BM(I+1,1)-BM(1,1))+YD(1)+BM(I+1,2)-BM(1,2)
26. 000098B 30 CONTINUE
27. 000102B DO 40 I=1,3
28. 000106B AR(I,1)=(AM(I,1)+XD(1))/2. $ AR(I,2)=(AM(I,2)+YD(1))/2.
29. 000110B BR(I,1)=A1*AR(I,1)+A21*AR(I,2)+A113
30. 000114B BR(I,2)=A12*AR(I,1)+A22*AR(I,2)+A123
31. 000118B 40 CONTINUE
32. 000122B RETURN
33. 000126B END

```

〈부 록 II〉

BEFORE CORRECTION

TRIANGULAR A			TRIANGULAR B		
X	Y	Z	X	Y	Z
1.000000	0	3.000000	-1.630000	6.000000	0
-1.000000	0	0	-2.000000	2.300000	0
3.000000	0	0	1.650000	4.200000	0

AFTER CORRECTION

TRIANGULAR A			TRIANGULAR B		
X	Y	Z	X	Y	Z
.996223	0	3.037072	-1.609437	5.968923	0
-1.026849	0	-.015392	-1.983376	2.326049	0
3.030626	0	-.021680	1.612855	4.204950	0

SUM OF DELTA = .211375

BEFORE CORRECTION

TRIANGULAR A			TRIANGULAR B		
X	Y	Z	X	Y	Z
-4.048000	.044000	.036000	-3.960000	-.048000	-.028000
3.976000	.019000	.048000	3.962000	.027000	-.025000
-.019000	3.038000	.007000	-.005000	3.011000	.019000

AFTER CORRECTION

TRIANGULAR A			TRIANGULAR B		
X	Y	Z	X	Y	Z
-4.024693	.039831	.036083	-3.983355	-.044106	-.027947
3.948472	.018169	.047970	3.989519	.028155	-.024976
-.014779	3.043000	.006948	-.009160	3.005952	.018923

SUM OF DELTA = .115525