울산대학교 자연과학연구논문집 제11권 2호 pp. 37~77, 울산대학교.
Journal of Natural Science Vol. 11, No. 2, pp. 37~77, 2002
University of Ulsan.

산학정의(上-3)에 관한 연구*

최길남 · 박영식
수학과

<요 약>

이 논문은 『산학정의』(고종 4년 1867년, 남병길 편저, 이상혁 교정)의 상편의 세 번째 부분의 내용 즉 개평방법, 대종평방법, 개입방법, 대종입방법, 제승방법에 대해서 연구한 것이다.

Study of San Hak Jeong Ui(Arithematic Definition) (the first volume-3)

Choi Kil Nam · Park Young Sik
Dept. of Mathematics

<Abstract>

In this paper, we investigate the contents in the third part of the first volume of 『San Hak Jeong Ui』(king Ko Jong 4, 1867, Compiler, Nam Byong Kil, Corrector, Lee Sang Hyok), i. e., the Extraction the square root, the cube root, the nth root.

1. 머리글

『算學正義』 卷 上에서 본 논문은 加減乘除의 계산법을 토대로 정사각형 또는 직사각형의 면적으로부터 길이(長)와 너비(闊)를 구하며 정방체 또는 편방체의 체적에서 길이, 너비

* 이 논문은 2001년 대학 학술 연구비에 의한 것임

및 높이(高)를 구하는 방법을 보이고 나아가 제승방법(諸乘方法)으로 한 변의 길이를 구함을 보이고자 한다.

『九章算術』[1]의 小廣章에서 각종의 면적과 체적을 구하는 문제가 24개 수록되어 있는데 면적과 체적을 알고 길이, 너비 그리고 길이, 너비와 높이를 구하는 문제로 면적은 경작지와 정사각형을 대상으로 개평방법에 의해 풀고, 원에 대한 원둘레를 開圓法으로 풀어놓고 있다. 정육면체의 체적에서 한 변을 개입방법으로 구하고, 구의 체적에서 지름을 구하는 문제를 그 내용으로 하고 있다.

본 내용은 『구장산술』의 소광장과는 달리 정사각형과 직사각형의 면적에서 각각 개평방법(開平方法)과 대종평방법(帶縱平方法)으로 길이 및 너비를 구하고 장방체(長方體)와 편방체(扁方體)의 체적에서 대종입방법(帶縱立方法)으로 세 변의 길이를 구하며 나아가 제승방법으로 한 변의 길이를 구함을 본다.

특히 화수(和數)와 교수(較數)는 『산학정의』에서와 같이 『이수신편(理藪新編)』[2]의 積較和相求開平方法에서 「平方長闊不等者 長闊相乘爲實積 長闊相減爲較 長闊相併爲和」 라 하여 화수는 길이와 너비의 합의 수, 교수는 길이와 너비의 차의 수로 표현하고 있다. 이 화수와 교수를 이용하여 직사각형의 면적으로부터 교수대종법(較數帶縱法)과 화수대종법(和數帶縱法)에 의해 길이와 너비를 구하게 됨을 보인다. 또 장방체와 편방체의 체적에서 화수, 교수를 이용하여 교수대일종입방법(較數帶一縱立方法), 교수대양종법(較數帶兩縱法), 화수대양종상등법(和數帶兩縱相同法)과 화수대양종부동법(和數帶兩縱不同法)으로 길이. 너비 및 높이를 구함을 보인다.

나아가 제승방법으로 평면은 면적이고, 입방은 체적이며 3승방(三乘方) 이상은 그 어떤 구체적인 형태를 알 수 없으나, 대개(代開, 지수의 묶음 법칙)를 통해서 3승방은 평방적의 자승수, 5승방은 입방적의 자승수 등으로 표현하고, 한 변의 누차방정식(壘次方程式)으로 나타내어 正數(+)와 負數(-)를 살펴 그 한 변의 길이를 구하는 과정을 보여 준다.

한편, 算木의 배열 방법은 『산학계몽(算學啓蒙)』[3]에 의해 布算口訣이라고 전제하여 「一縱, 十衡, 百立, 千僵, 千十相並, 百萬相望」과 같이 설명하고 다음 例를 들고 있다.

九 八 七 六 五 四 三 二 一 (987,654,321)

二 五 0 三 八 一 六 (2,503,816)

따라서 환골(換骨)과 투태(投胎)로써 위에서 언급한 산목 배열 방법에 따라 正數와 負數를 감안하여 입방해서 얻은 수에 의해 실수가 우법수, 장염법수, 방염법수로 표현되어 짐

1) 263년경 魏(wei)의 유휘(劉徽, Lui Huei)가 뛰어난 주석서를 붙여 엮어 펴낸 산학서로 방전(方田), 속미(粟米), 상공(商工), 균륜(勻輪) 영부족(盈不足), 방정(方程), 구고(句股) 등 九章으로 되어 있다.

2) 이재(頤齊) 황윤석(黃胤錫)(1729 -1791)이 저술한 책.

3) 주세걸(朱世傑, Chu shi-kie, 13세기 후반 이후에 수학을 직업으로 하는 전문가로서 字 漢卿, 號 松庭)의 『산학계몽』 上中下 3권에 1299년 조성(趙成)의 서문이 있으며, 이 3권을 20부분으로 나누고 다시 259문의 산예(算例)를 다루고 있다.

을 보인다. (그림 7, 8, 9, 10) 오늘날의 계산법과 사뭇 다르며 복잡함을 알 수 있다.

2. 개평방법(開平方法)

平方者縱橫相等之四方面也以邊求積則用自乘以積求邊則用開平方開之之法署與歸除等而除則有實有法開方則有實無法惟其自乘爲積故商得自乘之數以除之且自乘者必進一位故商數之定位之常超二位而命之(如十自乘爲百百自乘爲萬千自乘爲百萬故商數之十位定於實數之百位商數之百位定於實數之萬位商數之千位定於實數之百萬位皆超二位而命之)初商以後兩廉生焉(卽初商再商相乘數)至於多商愈長而愈細也(初商再商倂之爲長故愈長三商數少於再商數故愈細)

평방이라는 것은 가로, 세로가 서로 같은 사방의 면적이다. 변으로서 면적을 구할 때에는 자승을 이용하고, 면적으로서 변을 구할 때에는 개평방을 사용하는데 개평하는 법칙은 대략 제법과 대등하게 돌아가지만 제를 하면 실수가 있고 법수가 있지만 개방을 하면 실수는 있으나 법수는 없고 오로지 그 자승으로서 면적을 삼으므로 나누어 자승의 수를 얻어 그것으로서 제하는 것이다. 단, 자승을 하는 것은 반드시 한 자리 나아가므로 나누어 얻은 수의 자리를 정하는 것은 항상 두 자리를 건너뛰어 그 자리를 정한다.

가령 십을 자승하면 백이 되고 백을 자승하면 만이 되고 천을 자승하면 백만이 되므로 상수의 십의 자리는 실수의 백의 자리수로 정하고 상수의 백의 자리는 실수의 만의 자리로 정하고 상수의 천의 자리는 실수의 백만 자리에 정하듯 모두다 두 자리를 뛰어서 그 자리를 정한다.

처음 나눈 이후에 두 쪽의 염법수가 생기면 즉 초상[4]과 재상[5]은 서로 곱한 수이다. 많이 나눌수록 숫자가 더욱 길어져 더욱 세밀해진다. 초상과 재상을 아울리면 길어지므로 더욱 길어져 삼상수[6]는 재상수에 비해 작으므로 더욱 세밀하다.

設正方面積三十六尺問每一邊幾何
答曰六尺

法列三十六尺爲實借一算於六尺之下名曰隅法商得可合於六尺自乘之數故置商數六尺於實六尺位之上與隅法相乘得六尺置於實數之下隅法之上名曰廉法仍與商數相乘得三十六尺以減實恰盡所商六尺卽每一邊也

정사각형의 면적이 3십6척이라면 각 변은 얼마인가.
답은 6척이다.

법칙은 3십6척을 나열하여 실수로 하고 산가지 1(一算)을 6척 아래에서 이름하여 우법수

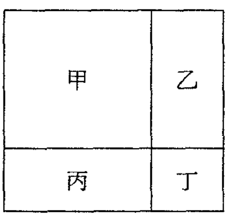
4) 나누어 얻은 첫 번째 수
5) 나누어 얻은 두 번째 수
6) 나누어 얻은 세 번째 수

라 하는데 나누어 얻은 것이 6척의 자승수에 합당하므로 상수(商)인 6척을 실수 6척의 위에다 두어 우법수와 더불어 서로 곱하여 6척을 얻어서 실수의 아래 우법수의 위에 두고 이름하여 염법수라 하고, 이에 상수와 더불어 서로 곱하여 3십6척을 얻어서 실수에서 감하면 모두 없어지므로 나누어 얻은 바의 6척이, 즉 각 한 변이다.

今有方臺上面鋪方甎四千九十六塊問每邊方甎若干
答曰六十四塊

法列四千九十六塊爲實借一算於六塊之下名曰隅法因實爲十自乘積以上故超進於實百空位之下乃商得六十於實百空位之上與隅法相乘得六十置之隅法之上爲廉法(隅法旣位故商得數亦超置廉法亦隨以超位假令商百置實萬位之上則廉法之百亦居萬位之下至於一退與商十相乘則居千位之下再退與商得單位相乘則始復本位居實百位之下也初商爲十置實百位之上則廉法之十亦居實百位之下退與商得單位相乘之時復本位居實十位之下)仍與商數相乘得三千六百以減實餘四百九十六塊爲次商實又以隅法乘初商數六十加於廉法得一百二十(卽初商之二倍)於是廉法退一位隅法退二位次商得四塊於餘實六塊之上(以廉法商除次商實得次商數)與隅法相乘得四塊加於廉法得一百二十四仍與次商數相乘得四百九十六塊減次商實恰盡以初商數次商數倂之得六十四塊爲每邊方甎(如圖甲大方爲初商自乘方乙丙二長方俱以初商爲長次商爲闊卽兩廉丁小方爲次商自乘方也)

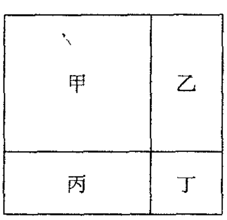
그림(1)[7]



지금 사각형의 대 윗면을 사각형 벽돌 4천9십6괴[8]로 덮었다면 각 변의 사각형의 벽돌은 몇 개인가
답은 64괴이다.

법칙은 4천9십6괴를 나열하여 실수로 하고 산가지 1을 6괴의 아래에 이름하여 우법수라 하는데 실수로 인하여 십의 자승곱은 그 이상이므로 실수 백의 빈자리 아래에 건너 뛰어 나아간다. 이에 나누어 실수 백의 빈자리 위에 6십을 얻고, 더불어 우법수와 서로 곱하여

7)



甲 ; 60×60 (초상의 자승수)
乙과 丙 ; 60×4 (염법수)
丁 ; 4×4 (차상의 자승수)

8) 괴는 덩어리를 뜻함

6십을 얻으니 그것을 우법수 위에 두어 염법수로 한다. 우법수는 이미 위치를 건너뛰므로 상득수 (나누어 얻는 수) 역시 건너 뛰어 둔다. 염법수도 역시 따라서 자리를 건너뛴다.

가령 상수의 백을 실수의 만의 위치에 두면, 즉 염법수의 백도 역시 만 자리의 아래에 둔다.한 자리를 물려서 상수의 십과 서로 곱하게 될 때 천의 자리 아래에 있게 하고, 다시 한번 물려서 나누어 얻는 단위를 서로 곱하면 비로소 본 자리인 실수 백의 자리의 아래에 있게 하는 것이다. 처음 상(商)이 십이 되어 실수의 백의 자리 위에 두게 되면 염법수의 십도 역시 실수의 백 자리의 아래에 두게 되어 물려서 상득수의 단위와 더불어 서로 곱할 때에, 비로소 본 자리로 돌아가 실수의 십 자리의 아래에 있게 된다.

이어서 상수와 더불어 서로 곱하여 3천6백을 얻어서 실수를 감하고 남은 4백9십6괴를 차상실로 삼는다. 또 우법수로서 초상 6십을 곱하여 염법수에 더하면 1백2십을 얻는다. 즉 초상의 2배이다. 이에 염법수는 한 자리 물리고 우법수는 두 자리 물려서 차상은 남은 실수 6괴의 위에서 4괴를 얻는다. 염법수로서 차상실을 나누어 제하면 차상수를 얻는다. 우법수와 더불어 서로 곱하여 4괴를 얻고 염법수에 더하면 1백2십4를 얻으니, 이에 차상수와 더불어 서로 곱하여 4백9십6을 얻어 차상실을 감하면 모두 없어지므로 초상과 차상을 아울리면 6십4괴를 얻어 매 변의 사각형 벽돌의 수가 된다.

그림(1)에서 갑의 큰 사각형은 초상(처음 몫)으로 얻어 그것으로 제곱한 사각형이고 을, 병의 2개의 직사각형은 모두다 초상을 길이로 하고 차상으로 너비가 된 것으로 즉 두 염법수이다. 정의 작은 사각형은 차상을 제곱한 사각형이다.

今有正方面積五丈四十七尺五十六寸問每一邊若干(自乘之數百寸爲尺百尺爲丈故實積有十尺十寸之數)

答曰二丈三尺四寸

法列五丈四十七尺五十六寸(卽五萬四千七百五十六寸)爲實超置隅法於實五丈位之下乃商得二丈(卽二百寸)於實五丈位之上與隅法相乘得二丈置之隅法之上爲廉法仍與商數相乘得四丈(卽四萬寸)以減實餘一丈四十七尺五十六寸爲次商實又以隅法乘初商數二丈加於廉法得四丈(卽初商之二倍四百寸)於是廉法退一位隅法退二位次商得三尺(卽三十寸)於餘實七尺位之上餘隅法相乘得三尺加於廉法得四十三尺仍與次商相乘得一丈二十九尺(卽一萬二千九百寸)以減次商實餘十八尺五十六寸爲三商實又以隅法乘次商得三尺加於廉法得四十六尺(卽初商次商共數之二倍四百六十寸)於是廉法退一位隅法退二位三商得四寸於餘實六寸位之上與隅法相乘得四寸加於廉法得四百六十四寸仍與三商相乘得十八尺五十六寸(卽一千八百五十六寸)以減三商實恰盡以初商次商三商併之得二丈三尺四寸爲每一邊

지금 정사각형의 면적이 5장[9] 4십7척 5십6촌이면 한 변은 얼마인가.

자승의 수로서 백촌이 척이 되고 백척이 장이 되므로 실수의 면적에서 십척과 십촌의 수가 있다.

답은 2장 3척 4촌이다.

---

9) 길이의 단위로 1丈=10尺, 면적의 단위로 一丈=100尺.

법칙은 5장 4십7척 5십6촌을 나열하고 즉 5만4천7백5십6촌을 실수로 하고 실수의 5장의 위치 아래에 우법수를 건너뛰어 두고 이에 나누어서 2장을 얻는다. 즉 2백 촌이다. 실수의 5장 위치의 위에 우법수와 더불어 서로 곱하여 2장을 얻어 우법수의 위에 그것을 두고 염법수라 한다.

이에 상수와 더불어 서로 곱하여 4장을 얻고, 즉 4만 촌 이것을 실수에서 감하면 1장 4십7촌 5십6촌이 남으니 차상실로 삼는다. 또 우법수로서 초상수 2장을 곱하여 염법수에 더하면 4장을 얻는다. 즉 초상의 2배 4백 촌이다. 이에 염법수를 한 자리 물리고 우법수는 두 자리 물려서 차상 3척을 얻는다. 즉 3십촌이다. 나머지 실수 7척 자리 위에서 우법수와 더불어 곱하면 3척을 얻어 염법수에 더하면 4십3척을 얻어 이에 차상수를 서로 곱하여 1장 2십7척 즉 1만 2천 7백 촌을 얻어 차상실에서 빼면 18척 5십6촌이 남아 이것을 삼상실로 삼는다. 또 우법수로서 차상을 곱하여 3척을 얻어 염법수에 더하여 4십6척을 얻는다. 즉 초상, 차상 모두의 수의 2배 4백6십촌을 얻어 이에 염법수를 한 자리 물리고 우법수는 두 자리 물려서 삼상 4촌을 얻어 나머지 실수의 6촌의 자리의 위에서 우법수와 더불어 서로 곱하면 4촌을 얻어 염법수에 더하면 4백6십4촌을 얻어 이에 삼상과 서로 곱하면 18척 5십6촌을 얻는다. 즉 1천8백5십6촌을 얻으니 이것으로 삼상실을 감하면 모두 없어지므로 초상, 차상, 삼상을 아울리면 2장 3척 4촌이 각 한 변이 된다.

今有正方面積八十二萬六千二百八十一尺問每一邊若干
答曰九百零九尺

法列八十二萬六千二百八十一尺爲實超置隅法於實二萬位之下乃商得九百於實二萬位之上與隅法相乘得九百置之隅法之上爲廉法仍與商數相乘得八十一萬以減實餘一萬六千二百八十一尺爲次商實又以隅法乘初商數九百加於廉法得一千八百於是廉法退一位隅法退二位仍無次商數(若有次商十與廉法相乘則當得一萬八千過於次商實故無次商數)乃記空位於餘實二百位之上而以次商實仍爲三商實又零法退一位隅法退二位乃三商得九尺於餘實一尺位之上與隅法相乘得九尺加於廉法得一千八百零九尺仍與三商數相乘得一萬六千二百八十一尺以減三商實恰盡以初商三商併之得九百零九尺爲每一邊

지금 정사각형 면적이 8십2만6천2백8십1척이면 한 변은 얼마인가.
답은 9백09척이다.

법칙은 8십2만6천2백8십1척을 나열하여 실수로 삼고 실수의 2만의 자리 아래에 건너뛰어 우법수를 두고 이에 나누어 9백을 얻는다. 실수 2만 위치의 위에서 우법수와 서로 곱하여 9백을 얻어 우법수의 위에 그것을 두어 염법수로 한다. 이에 상수와 서로 곱하여 8십1만을 얻으니 이것을 실수에서 감하면 나머지가 1만6천2백8십1척으로 차상실이 된다. 또 우법수로서 초상 9백을 곱하여 염법수에 더하면 1천8백을 얻는다. 이에 염법수를 한 자리 물리고 우법수는 두 자리 물리면 차상수가 없다. 가령, 차상 십이 있으면 염법수와 더불어 서로 곱하면, 즉 마땅히 1만 8천을 얻어 차상실보다 크므로 차상수가 없다. 이에 나머지 실수 2백자리 위에 0을 기록한다. 이로써 차상실로서 삼상실로 삼는다. 또 0의 염법수를 한 자리 물리고 우법수는 두 자리 물려서 이에 삼상 9척을 얻는다. 나머지 실수 1척 위치의 위에 우법수를 서로 곱하여 9척을 얻어 염법수에 더하면 1천8백09척을 얻으니 이에 삼

상수를 서로 곱하면 1만6천8십1척을 얻어 삼상실을 빼면 모두 없어지므로 초상, 삼상을 아울리면 9백09척을 얻고 각 한 변이 된다.

設正方面二千五百尺問每一邊若干
答曰五十尺

法列二千五百尺爲實補足兩空位以存單位以隅法起單位超置實五百尺位之下乃商得五十於實五百尺位之上與隅法相乘得五十置之隅法之上爲廉法仍與商數相乘得二千五百尺以減實恰盡所商五十尺爲每一邊

가령, 정사각형 면적이 2천5백척이라면 한 변은 얼마인가.
답은 5십척이다.

법칙은 2천5백을 나열하여 실수로 하고 두 빈자리를 보충하여 단의 위치가 있는 것으로 보고 우법수로서 단의 위치에서 시작하여 건너뛰어 실수 5백의 자리의 아래에 두고 이에 나누어 5십을 얻고 실수 5백척 자리 위에서 우법수와 서로 곱하여 2천5백을 얻어 실수에서 감하면 다 없어지므로 나눈 바 5십척이 각 한 변이 된다.

3. 대종평방법(帶縱平方法)

帶縱平方者長方之面也以邊求積則長闊相乘而以積求邊也必帶長闊之較或長闊之和然後可用開方故謂之帶縱

대종평방[10]이라는 것은 직사각형의 면적이다. 변으로서 면적을 구하는 것은 길이와 너비를 서로 곱하는 것이고 면적으로서 변을 구하는 것이다. 반드시 함께 길이와 너비를 교(차를 계산)하던지 혹은 길이와 너비를 합한 후에 개방법을 사용할 수 있으므로 소위 그것을 대종[11]이라 한다.

今有長方面積四十八尺長闊較二尺問長闊各若干
答曰長八尺闊六尺

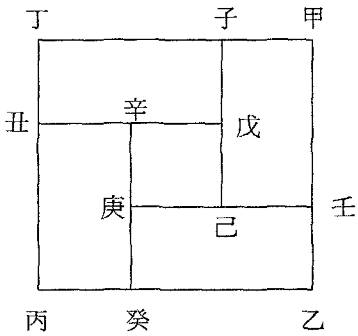
法列四十八爲實列較二尺爲縱廉於次置隅法一算於下乃商得六尺於實八尺位之上與隅法相乘得六尺加於縱廉得八尺仍與商數相乘得四十八尺減實恰盡所商六尺爲闊加長闊較爲長也(此較數帶縱法也所商爲闊而加長闊較與闊相乘則爲長闊相乘數故除得長方積恰盡)
又法列四十八尺爲實列較二尺爲縱廉於次置隅法一算於下乃商得八尺於實八尺位之上與隅法相乘得八尺內減去縱廉二尺餘六尺爲廉法與商數相乘得四十八尺減實恰盡所商八尺爲長減長闊

10) 대종평방법: 면적과 길이, 너비의 차 또는 합을 알고 길이 및 너비를 구하는 방법.
11) 대종; 길이와 너비 합과 차를 계산한 후 개방하는 법이며, 대(帶)란 정방형과 장방형을 비교하기 위한 용어임.

較爲闊也(此法所商爲長而減長闊較與長相乘則爲長闊相乘數故除得長方積恰盡或稱減縱平方法)

古法四因直積得一百九十二尺又以長闊較自乘得四尺上併得一百九十六尺爲實開平方得十四尺卽長闊和加較半之爲長減較半之爲闊(如圖甲壬邊爲長子丁丑丙癸乙三邊皆等壬乙邊爲闊甲子丁丑丙癸三邊皆等今四因直田積得甲壬己子等長方積四段又加戊己庚辛較㫪則成甲乙丙丁和㫪故開方得和)

그림(2)



或以半較一尺自乘得一尺以加直田積得四十九尺爲實開平方得七尺卽半和與半較一尺相加爲長相減爲闊(邊爲折半則積爲四分之一故直田積一段與半較㫪相併得半和㫪亦只是前圖之理也)

지금 직사각형 면적이 4십8척이고 길이가 너비보다 2척이 더 길면 길이와 너비는 각 얼마인가.

답은 길이가 8척이고 너비는 6척이다.

법칙은 4십8척을 나열하여 실수로 하고 차 2척을 나열하여 종염법수로 삼아 우법수 1을 다음에 두고 아래에서 계산하면 이에 나누어 6척을 얻고 실수 8척의 자리 위에서 우법수와 서로 곱하여 6척을 얻어 종염법수에 더하여 8척을 얻는다. 이에 상수와 더불어 서로 곱하면 4십8척을 얻어 실수에서 감하면 모두 없어지므로 상 6척을 너비로 삼아서 길이와 너비의 차를 더하면 길이가 된다.

이것이 교수대종법[12]이다.

묶인 것이 너비가 되어 길이와 너비의 차를 더하여 너비와 서로 곱하면 길이와 너비를 서로 곱한 수로서 제하여 얻은 것은 직사각형 면적과 흡사하다.

또 법칙은 4십8척을 나열하여 실수로 삼고 차 2척을 나열하여 종염법수로 삼아 다음에 우법 수1을 두고 그 아래에서 계산한다. 이에 나누어 8척을 얻어 실수 8척 자리 위에서 우법수와 더불어 서로 곱하여 8척을 얻어 그 안에서 종염법수 2척을 감해 버리면 6척이 남아 염법수가 된다. 상수와 더불어 서로 곱하면 4십8척을 얻어 실수에서 감하면 모두 없어지므로 상 8척을 길이라 하고 길이와 너비의 차를 감하면 너비가 된다. 이 법은 나누어 얻은 바를 길이로 삼고 이에 길이와 너비의 차를 감하여 길이와 더불어 서로 곱하면, 즉 길이와 너비를 서로 곱한 수로서 제하여 얻은 것은 직사각형 면적과 모두 흡사하여 혹은 감

12) 교수대종법은 길이를 구하는 방법으로 먼저 구한 너비와 차(較)를 더하여 얻는 방법.

종평방법[13]이라고 칭한다.

옛날 법은 4로서 직접 곱하면 1백9십2척을 얻고 또 길이와 너비의 차를 자승하여 4척을 얻어서 서로 아울리면 1백9십6척을 얻어 실수로 삼아 개평방으로 14척을 얻는다. 즉 길이와 너비를 더한 값에서 차를 더하여 그것의 반을 길이로 삼고 차를 감하여 그것의 반을 너비로 삼는다.

그림(2)와 같이 갑임변을 길이로 삼고 자정, 축병, 계을 3변은 모두 같으므로 임을변을 너비로 삼고, 갑자. 정축, 병계 3변은 모두 같다. 지금 4로 인하여 직사각형 밭의 면적 갑임기자 같은 직사각형 면적 4단을 얻는다. 또 무기경신 차의 자승을 더하면 갑을병정을 이루어 합의 제곱이 되므로 개평방으로 합을 얻는다.[14]

혹은 차의 반 1척으로 제곱하여 1척을 얻으므로 직사각형 밭의 면적에 더 하므로 4십9척을 얻으니 실수로 삼아 개평방으로 7척을 얻는다. 즉 합의 반과 차의 반 1척을 서로 더하여 길이로 삼고 서로 감하여 너비로 삼는다.[15]

변이 절반이 되면 면적은 4분의 1이 되므로 직사각형 면적 1단과 차의 반의 제곱을 서로 아울리면 합의 반의 제곱을 얻는다. 역시 이것도 앞의 그림의 이치이다.

今有直田積八百六十四步長闊較十二尺問長闊各幾何

答曰長三十六步闊二十四步

法列八百六十四步爲實於相列較十二尺爲縱廉於次置隅法一算於是縱廉進一位隅法超二位乃商得二十於實八百位之上與隅法相乘得二十加於縱廉得三十二仍與商數相乘得六百四十以減實餘二百二十四步爲次商實又以隅法乘商數二十加於廉法得五十二仍退一位隅法退二位次商得四步於餘實四步位之上與隅法相乘得四步加於廉法得五十六步仍與次商相乘得二百二十四步以減次商實恰盡以初商次商倂之得二十四步爲闊加較爲長

又法帶縱列位縱廉進一位隅法超二位乃商三十於實八百位之上與隅法相乘得三十內減去縱廉十二得十八爲廉法仍與商數相乘得五百四十以減實餘三百二十四步爲次商實又以隅法乘初商數三十加於廉法得四十八仍退一位隅法退二位次商得六步於餘實四步位之上與隅法相乘得六步加於廉法得五十四步仍與次商相乘得三百二十四步以減次商實恰盡以初商次商倂之得三十六步爲長減較爲闊

지금 직사각형 밭의 면적이 8백6십4보로서 길이와 너비의 차가 12척이면 길이와 너비는 각 얼마인가

답은 길이는 3십6보[16]이고 너비는 2십4보이다.

법칙은 8백6십4보를 나열하여 실수로 삼아 위에 두고 교(차) 12척은 종염법수로 삼아 그

---

13) 감종 평방법은 너비를 구하는 방법으로 먼저 구한 길이와 차(較)를 감하여 얻는 방법.

14) 그림(2)로부터 길이 a, 너비 b라 하면 $4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$.

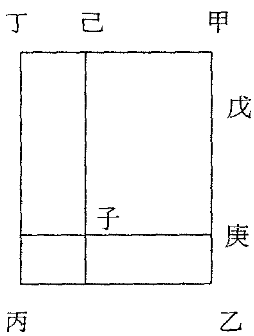
15) $(a+b)+(a-b)=2a$ 따라서, $\frac{(和+較)}{2}=a$. $(a+b)-(a-b)=2b$ 따라서, $\frac{(和-較)}{2}=b$.

16) 길이의 단위임과 동시에 넓이의 단위. 길이 1보는 사람 두 걸음에 해당하는 보폭의 길이로 6척이고 사방 1보의 넓이를 "넓이 1보"라 함.

나열은 다음에 둔 우법수 1의 아래에서 계산하는데 이에 종염법수가 한 자리 나아가면 우법수는 두 자리 건너뛰어서 이에 실수 8백의 자리 위에서 상으로 2십을 얻고 우법수와 서로 곱하여 2십을 얻어서 종염법수를 더하면 3십2를 얻어 이에 상수를 서로 곱하면 6백4십을 얻어 이로써 실수에서 감하면 2백2십4보가 남으니 차상실이 된다. 또 우법수로서 상수 2십을 곱하여 염법수에 더하면 5십2를 얻고 이에 한 자리 물리고 우법수는 두 자리 물려서 차상을 얻으니 4보로서 남은 실수의 4보 위치의 위에서 우법수와 서로 곱하면 4를 얻고 염법수에 더하면 5십6을 얻어 이에 차상과 서로 곱하여 2백2십4보를 얻으니 이로서 차상실에서 감하면 모두 없어지므로 초상과 차상을 아울리면 2십4보를 얻어 너비로 삼고 차를 더하여 길이로 삼는다.

또 법칙 대종열위로 종염법수가 한 자리 나아가면 우법수는 두 자리 건너뛰어 이에 8백 자리의 위에서 상 3십과 우법수를 서로 곱하여 3십을 얻어 그 안에서 종염수 12를 빼버리면 18을 얻어 염법수로 삼는다. 이에 상수와 서로 곱하면 5백4십을 얻어서 실수에서 감하면 3백2십4보가 남으니 차상실로 삼는다. 또 우법수로 초상수를 곱한 3십을 염법수에 더하면 4십8을 얻고 이에 한 자리 물리면 우법수는 두 자리 물려서 실수 4보의 자리의 위에서 6보를 얻어 우법수와 서로 곱하면 6보를 얻고 염법수에 더하면 5십4보를 얻는데 이에 차상과 서로 곱하면 3백2십4보를 얻어 이로서 차상실에서 감하면 모두 없어지므로 초상, 차상을 아울리면 3십6보를 얻으니 길이로 삼고 차를 감하여 너비로 삼는다.

그림(3)



(如圖甲乙丙丁長方面甲乙爲長乙丙爲闊甲戊爲長闊較求闊則甲己初商數二十與戊庚初商數與甲戊較相併得甲庚三十二與甲己初商數相乘得甲庚子己面積減實而庚子二十與子己三十二位基兩廉求長則甲庚爲初商數三十內減甲戊較餘戊庚十八卽甲己仍與甲庚初商數相乘得甲庚子己面積減實而庚子十八與子己三十爲基兩廉故並初商以後與開平方常法同也)

古法四因直田積得三千四百五十六步又以長闊較自乘得一百四十四步相併得三千六百步爲實開平方得六十步卽長闊和加較半之爲長減較半之爲闊或以半較六步自乘得三十六步以加直田積得九百步爲實開平方得三十步卽半和與半較六尺相加爲長相減爲闊

그림(3)에서와 같이 직사각형 갑을병정에서 갑을을 길이로 삼고 을병을 너비로 삼는다. 갑무를 장활교(길이와 너비의 차)라 하여 너비를 구한다면 갑기는 초상수 2십으로 삼고 무경도 같게 한다. 무경으로서 초상수와 갑무교를 서로 아울리면 갑경으로 3십2를 얻으니 갑기인 초상수를 서로 곱하면 갑경자기 면적을 얻어 실수에서 감하고 경자 2십과 자기 3십2

를 그 두 염법수로 삼아 길이를 구하는 것이다. 즉 갑경을 초상수 3십으로 삼아 그 안에서 갑무교를 감하면 무경 18이 남는다. 즉 갑기와 이에 갑경 초상수를 서로 곱하여 갑경자기 면적을 얻어 실수에서 감하면 경자 18과 자기 3십은 그 두 염법수가 되므로 초상과 아울러 그 후로는 개평방의 일반적인 방법과 동일하다.

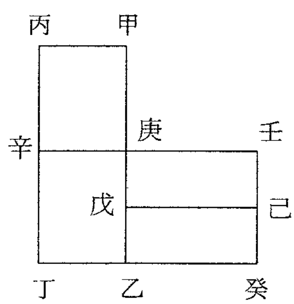
옛날 법칙은 4로 인하여 (즉 직사각형의 면적에 4배를 하면) 직사각형 면적은 3천4백5십6보를 얻고 또 길이와 너비의 차를 제곱하면 1백4십4보를 얻으니 서로 아울리면 3천6백보를 얻으니 실수로 삼고 개평방하면 6십보를 얻는다. 즉 길이와 너비의 합이다. 이에 차를 더하면 그 반은 길이가 되고 이에 차를 감하면 그 반은 너비가 된다.

혹은 차의 반 6보를 제곱하면 3십6보를 얻으니 직사각형 면적에 더하면 9백보를 얻어 실수로 삼아 개평방하면 3십보를 얻으니 즉 합의 반으로서 차의 반 6척을 서로 더하면 길이가 되고 서로 감하면 너비가 된다.[17]

今有直田積一萬三千六十八步長闊較一百三十二步先求長若干
答曰長一百九十八步闊六十六步

法列一萬三千六十八步爲實於上列一百三十二步爲縱廉於次置隅法一算於下於是縱廉進二位隅法超四位乃商得一百於實一萬位之上與隅法相乘得一百減於縱廉餘三十二爲廉法仍與商數相乘得三千二百加於直積得一萬六千二百六十八步爲次商實又以隅法乘初商數一百內減廉法三十二得六十八爲廉法仍退一位隅法退二位次商得九十於實二百位之上與隅法相乘得九十加於廉法得一百五十八仍與次商相乘得一萬四千二百二十以減次商實餘二千四十八步爲三商實又以隅法乘次商數得九十加於廉法得二百四十八仍退一位隅法退二位三商得八步於餘實八步位之上與隅法相乘得八步加於廉法得二百五十六仍與次商相乘得二千四十八步以減三商實恰盡以初商次商三商倂之得一百九十八步爲長減較爲闊

그림(4)



(如圖甲乙丙丁長方面甲乙爲長戊乙爲闊與甲丙等甲戊爲長闊較甲庚爲初商數與庚壬等甲庚辛丙面以初商數爲長以原闊爲闊故移作己癸乙戊面成己癸丁辛庚戊磬折形今以初商數一百減於長闊較餘庚戊三十二爲廉法仍與壬庚初商數一百相乘得壬己庚戊面以加磬折形則補成壬癸丁辛長

17) a를 길이, b를 너비라 하면
$a-b=12 \Rightarrow (a-b)^2=144 \therefore 4ab+(a-b)^2=(a-b)^2=3600 \Rightarrow a+b=60$
$\therefore a=3b \quad b=24$

方面其長癸丁卽原闊加初商數也其闊辛丁卽原長去初商數也其較爲壬庚與庚戊之較故初商數壬庚內減廉法庚戊餘六十八爲縱廉求得辛丁闊併丙辛初商數卽丙丁原長也或稱益積平方法)

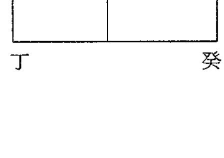
凡數彼此相形乘除生焉一彼一此是爲法實至於開方之法有廉隅各層而其中有與實同類者則算家名以正負以別之正負者多少也次多則彼少彼多則此少要在正負相當而己(法與實原爲異名而隅法卽商數自乘積縱廉卽商數幾倍凡自乘之積加商數幾倍與實積等是爲正負相當而隅與縱廉爲同名也若自乘積內減去商數幾倍與實積等則縱廉爲實之同類而與隅法爲異名或商數幾倍內減去自乘數與實積等則隅法爲實之同類而與縱廉爲異名亦皆正負相當也立方三乘方以至諸乘方皆倣此其用則須辨主客(以兩宗加減者同名爲主故相加者同加異減相減者同減異加以一宗開除者與實異名爲法之主故廉隅諸法同加異減然後與實相較也)較數帶縱之求長者卽隅爲法之主而縱廉爲異名故隅(卽隅乘商數也)與縱廉相減爲法而至於益積平方相減之餘仍是縱廉之餘實同名故以乘商數與實相加而再用隅內減縱廉之餘得與隅同名之數爲法除實盖減縱平方之變例也

지금 직사각형 밭의 면적이 1만3천6십8보이고 길이와 너비의 차가 1백3십2보이면 길이를 먼저 구하면 얼마인가.
답은 길이가 1백9십8보이고 너비는 6십6보이다.

법칙은 1만3천6십8보를 실수로 삼아 위에 나열하고, 1백3십2보를 종염수로 삼아 다음에 나열하고, 우법수 1를 두어 아래에서 계산하는데 이에 종염법수를 두 단위 나아가면 우법수는 건너뛰어 4단위 나아가서 이에 나누어 얻은 수(상)를 실수 1만 자리의 위에서 1백을 얻고 우법수와 더불어 서로 곱하여 1백을 얻어 종염법수에서 감하여 나머지 3십2를 염법수로 한다. 이에 상수와 서로 곱하여 3천2백을 얻어 직사각형 면적에 더하면 1만6천2백6십8보를 얻으니 차상실로 삼는다. 또 우법수에 초상수 백을 곱하여 그 안에서 염법수 3십2를 감하면 6십8을 얻고 염법수로 삼는다. 이에 한자리 물리면 우법수는 두 자리 물리고 차상을 2백 자리 위에서 9십을 얻고 우법수와 더불어 서로 곱하여 9십을 얻어 염법수에 더하면 1백5십8을 얻으니 이에 차상과 더불어 곱하면 9십을 얻고 염법수에 더하면 2백4십8을 얻어 이에 한자리 물리면 우법수는 두 자리 물려서 삼상 8보를 얻으니 나머지 실수 8보 위치의 위에서 우법수와 더불어 서로 곱하면 8보를 얻으니 염법수에 더하여 2백5십6을 얻고 이에 차상과 더불어 곱하여 2천4십8보를 얻어 이로써 삼상실을 감하면 모두 없어지므로 이로써 초상, 차상, 삼상을 아울리면 1백9십8보를 얻으니 길이가 되고, 차를 감하면 너비가 된다.

그림(4)의 직사각형 갑을병정에서 갑을은 길이로 삼고 무을은 너비로 삼아 갑병과 같게 하고 갑무는 길이와 너비의 차로 삼고 갑경은 초상수로 삼아 경임은 같게 잡는다. 갑경신병 면적은 초상수로서 길이가 되고 원래의 너비로써 너비가 되므로 옮겨서 기계을무의 면을 만들어 경절형[18] 기계정신경무가 만들어진다. 지금 초상수 1백으로서 장활교를 감하니

18) 경절형



나머지 경무 3십2로서 염법수로 삼는다. 이에 임경 초상수 1백과 더불어 서로 곱하면 임기 경무의 면을 얻으니 이로써 경절형에 더하면 보충하면 임계정신의 장방형의 면을 이룬다. 그 길이 계정, 즉 원래의 너비에 초상수를 더한 것이다. 그 너비 신정은, 즉 원래의 길이에서 초상수를 없앤 것이다. 그 교(차)는 임경과 경무의 차가 되므로, 초상수 임경 안에서 염법수 경무를 감하면 6십8이 남으니 종염법수로 삼아 구하면 신정인 너비와 병신 초상수를 아울리면 즉 병정, 원래의 길이를 구한다. 혹 익적평방법[19]이라고도 한다.

무릇 수는 저것과 이것이 서로 형을 이루면 승과 제가 생기고 하나는 저것, 하나는 이것이면 이를 법수와 실수로 삼아 개평방의 법에 이르러서는 염법수와 우법수의 각 층이 있는데 그 중간에 실수와 같은 류가 있는 것을, 즉 산가에서 정,부라고 이름하여 구별하고 정,부라는 것은 많고 적음을 말한다. 이것은 이쪽이 많으면 저쪽이 적고, 저쪽이 많으면 이쪽이 적은 것으로 요는 정,부가 있어 상당할 뿐이다.

법수와 실수는 원래 다른 이름이고 우법수 즉 상수를 자승 곱한 것이고 종염법수 즉 상수를 몇 배한 것이다. 무릇 자승의 곱을 상수 몇 배에 더한 것이 실수의 면적과 같게 하는 것으로 이것은 정,부에 상당한 것이고, 우법수와 종염법수는 같은 이름이 된다. 만약 자승의 곱 안에서 상수의 몇 배를 감하여 없애면 실수의 면적과 같게 된다. 즉 종염법수는 실수의 같은 류로 삼고 더불어 우법수는 다른 이름이 되는 것이다. 혹 상수의 몇 배 안에서 자승의 수를 감하여 없애면 실수의 면적과 같게 되고, 즉 우법수와 실수의 동류로 삼고 더불어 종염법수는 다른 이름이 된다. 역시 모두 정,부에 상당함이다.

입방, 삼승방, 모든 승방에 이르기까지 모두 이렇게 하는 것은 무방하다. 그 쓰임새는 모름지기 주객을 분별해야 한다.

양쪽 줄거리로 가감하는 것은 같은 이름을 주로 삼는 것이므로, 서로 더하는 것은 같은 것은 더하고 다른 것은 감하고, 서로 감하는 것은 같은 것은 감하고 다른 것은 더하는 것으로, 한 줄거리 개방법과 제법은 실수와 더불어 다른 이름인 법수로서 주를 삼는 고로 염법수와 우법수, 제법수는 같은 것은 더하고, 다른 것은 감한 연후에 실수와 더불어 서로 비교하는 것이다.

교수대종으로 길이를 구하는 것은 즉 우법수를 법의 주로 삼는 것으로 종염법수는 다른 이름이므로 우법수는 즉 우법수로 상수를 곱한 것이다. 종염법수와 더불어 서로 감하여 법수로 삼으면 익적평방에 이르니 서로 감하면 그 나머지가 마침내 종염법수의 나머지가 실수와 같은 이름이 되므로 상수를 곱하여 실수와 더불어 서로 더하고 다시 우법수와 더불어 같은 이름의 수를 법수로 하여 실수를 나누면 대체로 감하여 평방법에 따르는 다른 예이다.

今有長方面積五十四尺長闊和十五尺問長闊各若干
答曰長九尺闊六尺

法列五十四尺爲實列和十五尺爲縱廉於次置隅法一算於下乃商得六尺於實四尺位之上與隅法

19) 익적 평방법은 면적과 교(較)수를 알고 먼저 길이를 구하는 법.

相乘得六尺減於縱廉餘九尺爲廉法與商數相乘得五十四尺減實恰盡所商六尺爲闊以減長闊和爲長(此和數帶縱法也所商爲闊而減於長闊和與闊相乘則爲長闊相乘數故除得長方積恰盡)

又法列五十四尺爲列和十五尺爲縱廉於次置隅法一算於下乃商得九尺於實四尺位之上與隅法相乘得九尺減於縱廉餘六尺爲廉法與商數相乘得五十四尺減實恰盡所商九尺爲長以減長闊和爲闊(此法所商爲長而減於長闊和與長相乘則爲長闊相乘數故除得長方積恰盡)

古法四因直積得二百十六尺又以長闊和自乘得二百二十五尺相減得九尺爲實開平方得三尺卽長闊較加和半之爲長減和半之爲闊或以半和七尺五寸自乘得五十六尺二五內減直積餘二尺二五爲實開平方得一尺五寸卽半較與半和相加爲長相減爲闊(圖見較數帶縱法)

지금 직사각형 면적이 5십4척이고 길이와 너비의 합이 15척이면 길이와 너비는 각각 얼마인가.

답은 길이가 9척이고 너비는 6척이다.

법칙은 5십4척을 나열하여 실수로 하고, 합 15척을 나열하여 종염법수로 하여 다음에 두고 우법수 1을 아래에서 계산하면 실수 4척 자리의 위에서 6척의 상을 얻으니 우법수와 더불어 서로 곱하면 6척을 얻어 종염법수에서 감하면 나머지가 9척으로 염법수로 삼는다. 상수와 더불어 서로 곱하면 5십4척을 얻게 되고 실수에서 감하면 모두 없어지는바 6척을 너비로 하고 이로써 길이와 너비의 합에서 감하면 길이가 된다. 이것을 화수대종법[20]이라 한다. 상인 것을 너비로 삼고 장활화에서 감한 것을 너비와 더불어 서로 곱하면 길이와 너비를 서로 곱한 수가 되므로 나누면 직사각형 면적과 흡사한 것을 얻는다.

또 법칙은 5십4척을 나열하여 실수로 삼고, 화(합) 15척을 나열하여 종염법수로 삼아 다음에는 우법수 1을 아래에 둔다. 이에 실수 4척 자리 위에서 상(몫) 9척을 얻어 우법수와 서로 곱하여 9척을 얻어 종염수법에서 감하면 나머지 6척은 염법수로 삼아 상수와 더불어 서로 곱하면 5십4척을 얻어 실수를 감하면 모두 없어지므로 상 9척은 길이가 되고 장활화에서 감하면 너비가 된다. 이 법칙은 상이 길이가 되니, 장활화에서 감한 것은 길이와 더불어 서로 곱하면 즉 길이와 너비를 서로 곱한 수이므로 장방면적을 나누면 모두다 없어진다.

옛날 법칙[21]은 4로서 직사각형의 면적에 곱하면 2백16척을 얻고 또 장활화로서 자승하면 2백2십5를 얻으니 서로 빼면 9척을 얻으니 실수로 삼아 개평방하면 3척을 얻는다. 즉 장활교를 합에 더하여 그것의 반이 길이가 되고, 장활교를 합에서 감하여 그것의 반을 너비로 한다.[22] 혹은 합의 반 7척5촌을 자승하여 5십6척 2십5촌을 얻은 안에서 직사각형 면적을 감하여 남은 2척 2십5촌을 실수로 삼아 개평방하면 1척5촌을 얻으니 즉 차의 반이니 합의 반과 서로 더하면 길이가 되고 서로 감하면 너비가 된다. 그림(4)를 보면 교수대종법이다.[23]

今有長方面積六百零九尺長闊和五十尺問長闊各若干

答曰長二十九尺闊二十一尺

---

20) 화수대종법은 면적과 和數를 알고 商을 너비로 하여 화수에서 상을 감하여 길이를 찾는 방법.

21) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$에서 和數 $a+b$와 較數 $a-b$을 찾아 길이 a, 너비 b를 구함.

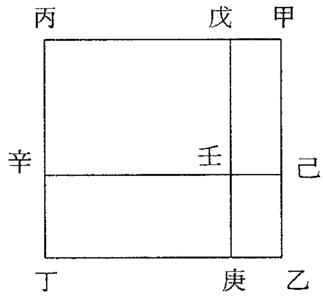
22) 화수대종법의 계산법.

23) 교수대종법의 계산법.

法列六百零九尺爲實於上列和五十尺爲縱廉於次置隅法一算於下於是縱廉進一位隅法超二位乃商得二十於實六百位之上與隅法相乘得二十減於縱廉餘三十爲廉法仍與商數相乘得六百以減實餘九尺爲次商實又以隅法乘初商數二十減於廉法得十尺仍退一位隅法退二位次商得一尺減於廉法得九尺仍與次商相乘得九尺以減次商實恰盡以初商次商併之得二十一尺爲闊以減和爲長

又法依前得次商實及廉法後次商得九尺於餘實九尺位之上與隅法相乘得九尺減於廉法得一尺仍與次商相乘得九尺以減次商實恰盡以初商次商併之得二十九尺爲長以減和爲闊

그림(5)



(如圖甲乙丙丁長方面甲乙爲長甲丙爲闊甲丙闊及丙丁長之和爲縱廉五十內減戊丙初商數二十餘廉法三十卽丙丁二十九及甲戊一之和故以初商數二十乘之得戊庚丁丙長方面及甲己壬戊長方面以減原積餘爲己乙庚壬小長方面其長卽長去初商數之壬庚也其闊卽闊去初商數之乙庚也是爲次商實又以初商數二十減於廉法三十餘十卽壬庚九及乙庚一之和故仍爲和數帶縱法也)

古法四因長方積得二千四百三十六尺又以長闊和自乘得二千五百尺相減得六十四尺開平方得八尺卽長闊較加和半之爲長減於和半之爲闊或以半和二十五尺自乘得六百二十五尺內減長方積得十六尺爲實開平方得四尺卽半較與半和相加爲長相減爲闊

지금 직사각형 면적이 6백09척이고, 길이와 너비의 합이 5십척이면 길이와 너비는 각각 얼마인가.

답은 길이가 2십9척, 너비가 2십1척이다.

법칙은 6백 09척을 실수로 삼아 위에 나열하고, 합 5십척을 종염법수로 삼아 다음에 둔 우법수 1을 아래에 나열하여 여기에서 종염법수가 한자리 나아가면 우법수는 두 자리 건너뛰어 이에 상으로 실수 6백의 자리 위에서 2십을 얻고 우법수와 서로 곱하여 2십을 얻어 종염법수에서 감하여 남은 3십을 염법수로 삼는다. 이에 상수와 더불어 서로 곱하여 6백을 얻어 실수에서 감하여 남은 9척을 차상실로 삼는다.

또 우법수로서 초상수 2십을 곱하여 염법수에서 감하면 십척을 얻는다. 이에 한자리 물리면 우법수는 두 자리 물리어 차상으로 1척을 남은 실수 9척의 자리 위에서 얻어 우법수와 더불어 서로 곱하여 얻는 1척을 염법수에서 감하면 9척을 얻으니 차상과 더불어 서로 곱하면 9척을 얻고 이것을 차상실에서 감하면 모두 없어지므로 이로써 초상, 차상을 아울리면 2십1척을 얻어 너비로 하고 이것으로 합에서 빼면 길이가 된다.

또 법칙에 따르면 먼저 차상실과 염법수를 얻고 후에 차상으로 실수 9척 자리의 위에서 9척을 얻어 우법수와 더불어 서로 곱하여 9척을 얻어 염법수에서 감하면 1척을 얻으니 이

에 차상과 더불어 서로 곱하면 9척을 얻어 이로써 차상실에서 감하면 모두 없어지므로 초상, 차상을 아울리면 2십9척을 얻으니 길이로 삼고 합에서 감하여 너비로 삼는다.

그림(5)에서와 같이 장방면 갑을병정에서 갑을을 길이로 삼고 갑병을 너비로 삼는다. 갑병 너비와 병정 길이의 합을 종염법수 5십으로 삼아 그 안에서 무병 초상수 2십을 감하면 나머지는 염법수 3십이다. 즉 병정 2십9와 갑무 1의 합이므로 초상수 2십으로 이것을 곱하면 무경정병 장방면과 갑기임무 장방면을 얻으니 원래의 면적에서 이것을 감하면 나머지는 기을경임의 작은 장방면이 된다. 이때의 길이는 즉 (본)길이에서 초상수를 뺀 것으로 임경이다. 이때의 너비 즉 (본)너비에서 초상수를 뺀 을경이다.

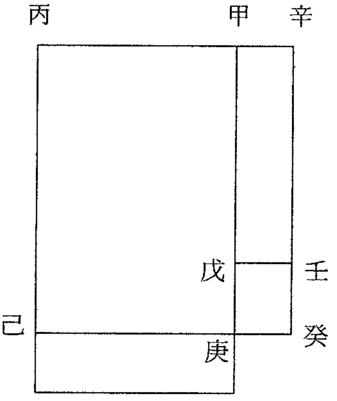
이것을 차상실로 삼는다. 또 초상수 2십으로써 염법수 3십에서 감하면 십이 남는다. 즉 임경 9와 을경 1의 합이므로 이것을 화수대종법이라 한다.

옛날 법칙으로 장방형의 면적에 4를 곱하면 2천4백3십6척을 얻는다. 또 길이와 너비의 합을 자승하면 2천5백척을 얻으니 서로 감하면 6십4척을 얻으니 개평방하면 8척을 얻는다. 즉 길이와 너비의 차를 합에 더하면 그것의 반이 길이가 되고, 합에 감하면 그것의 반은 너비가 된다. 혹은 합의 반 2십5척을 자승하면 6백2십5척을 얻으니 그 안에서 장방의 면적을 감하면 16을 얻어 실수로 삼아 개평방하면 4척을 얻는다. 즉 차의 반과 합의 반을 서로 더하면 길이가 되고, 서로 감하면 너비가 된다.

今有直田積三千四百五十六步長闊和一百二十步問先求長若干
答曰長七十二步闊四十八步

法列三千四百五十六步爲實於上列和一百二十步爲縱廉於次置隅法一算於下於是縱廉進一位隅超二位乃商得七十於實四百位之上與隅法相乘得七十減於縱廉得五十爲廉法仍與商數相乘得三千五百內飜減實餘四十四步爲次商實又以隅法乘初商數得七十內飜減廉法餘二十仍退一位隅法退二位次商得二步於餘實四步位之上與次商相乘得二步加於廉法得二十二步仍與次商相乘得四十四步以減次商實恰盡以初商次商併之得七十二步爲長以減和爲闊

그림(6)



(如圖甲乙丙丁長方面甲乙爲長甲巫爲闊與乙丁等甲丙闊及丙丁長之和一百二十內減丙己初商數七十餘五十卽己丁二及甲丙闊之和如丙辛爲廉法以乘初商數丙己得辛癸己丙長方面其中辛壬戊庚卽初商數內減原闊之餘也其闊壬戊卽原長內減初商數之餘也其較卽二倍初商數內減長闊和也是爲次商實又以初商數七十內減廉法餘二十卽壬戊二與戊庚二十二之較故用較數帶縱法求得闊倂初商數爲原長也若長闊和過初商數二倍則次商實長方面之長爲原長內減初商數之餘而闊爲初商數內減原闊之餘其較爲原和內減初商數爲次商廉法求得長倂初商數爲原長如以積一千六十四和六十六設問則初商得三十後飜減餘實爲十六次商廉法爲原和內減二倍初商之餘六次商得長八內減廉法餘二以乘次商減實是也或稱飜積平方法)

和數帶縱法卽縱廉爲法之主而隅爲異名故隅爲法也至於長闊之初商異數而求長者必法多於實爲飜積則隅法爲主而飜減得次商廉法與隅同名(凡飜減者正負交變)故相加爲法也若縱廉過於初商二倍則次商廉法仍與飜積同名而與隅異名(次商廉法仍是縱廉所餘故正負不變)故次商之除實也竟飜減爲法也(飜積則積已變號故以隅法爲主也)

지금 직사각형 밭의 면적이 3천4백5십6보이고 길이와 너비의 합이 1백2십보이면 먼저 길이를 구하면 얼마인가.

답은 길이가 7십2보이고, 너비는 4십8보이다.

법칙은 3천4백5십6보는 실수로 삼아 위에 나열하고, 합 1백2십보는 종염법수로 삼아 다음에 두고 우법수 1을 아래에 나열한다. 여기서 종염법수가 한자리 나아가면 우법수는 두 자리 건너뛰어 상으로 이에 실수 4백 자리의 위에서 7십을 얻어 우법수와 서로 곱하여 7십을 얻어 종염법수에서 감하면 5십을 얻으니 염법수로 삼고, 이에 상수와 서로 곱하여 3천5백을 얻어 안에서 거꾸로 실수를 감하면 4십4보가 남으니 차상실로 삼는다. 또 우법수로 초상수를 곱하면 7십을 얻으니 안에서 거꾸로 염법수를 감하면 2십이 남는다. 이에 한 자리 물리면, 우법수는 두 자리 물려서 차상으로 2보를 얻으니 남은 실수의 4보 자리의 위에서 얻고, 우법수와 서로 곱하여 2보를 얻어 염법수에 더하면 2십2보를 얻는다. 이에 차상과 곱하면 4십4보를 얻어 차상실로써 감하면 모두 없어지므로 초상과 차상을 아울리면 7십2를 얻으니 길이가 되고, 합에서 빼면 너비가 된다.[24]

그림(6)과 같이 갑을병정 직사각형의 면적에서 갑을을 길이로 하고, 갑무를 너비로 하여 을정과 같게 한다. 갑병 너비와 병정 길이의 합 1백2십 안에서 병기 초상수 7십을 감하면 나머지는 5십이다. 즉 기정 2와 갑병 너비의 합이다. 만일 병신을 염법수로 삼고 초상수 병기를 곱하면 신계기병의 직사각형 면적을 얻으니 그중 신임무갑의 면과 경을정기의 면은 같으므로, 거꾸로 갑을병정 원래의 면적을 감하면 임계경무의 작은 직사각형 면적이 남는데 그 길이 무경 즉 초상수 안에서 원래의 너비를 뺀 나머지이다. 그 너비 임무 즉 원래의 길이에서 초상수를 감한 나머지이다. 그 차 즉 초상수 2배에서 길이와 너비의 합을 뺀 것이다. 이것을 차상실로 삼고, 또 초상수 7십 안에서 염법수를 감하면 2십이 남는다. 즉 임무 2와 무경 2십2의 차이므로 교수대종법을 사용하여 구하여 얻은 너비와 초상수를 아울리면 원래의 길이가 된다.

만약 길이와 너비의 합이 초상수의 2배를 초과하면 즉 차상실 직사각형 면적의 길이를 원래의 길이 안에서 초상수를 뺀 나머지를 삼고, 너비는 초상수 안에서 원래의 합 안에서

24) 번감(작은 수에 큰 수를 감함)하여 길이와 너비를 계산하는 법.

초상수의 2배를 감한 나머지가 되므로 초상 염법 내에서 또 초상수를 감하여 차상 염법으로 하여 구하여 얻은 길이와 초상수를 아울러 얻으면 원래의 길이가 된다.

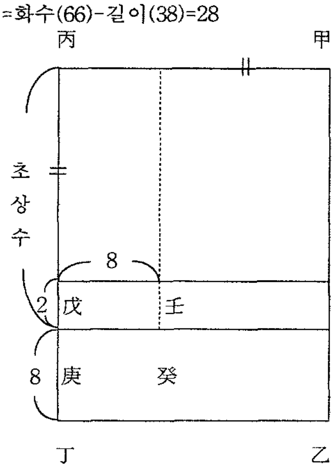
가령 면적이 1천6십4이고 합이 6십6인 문제를 설정하면, 즉 초상으로 3십을 얻은 후에 거꾸로 감하면 나머지 실수가 16이 되고, 다음 상득한 염법수는 원래의 합에서 초상수의 두배를 감한 나머지 6으로 삼고, 다음 상득한 길이 8안에서 염법수를 감하면 2가 남는데 이로써 차상을 곱하여 실수를 감한 것이 이것인데 즉 번적평방법[25]이라고 칭한다.

화수대종법 즉 종염법수를 법의 주로 삼는 것으로 우법수의 다른 이름이 되므로, 우법수를 감하여 법수로 한다. 길이와 너비가 초상수와 다른 수 일 때는 길이를 구하려면 반드시 실수보다 법수가 많으므로 번적하면 즉 우법수를 주로 하여 뒤집어 감하여 얻은 차상 염법수는 우법와 같은 이름이다. 무릇 뒤집어 감하는 것은 정,부가 교대로 변하는 것이므로 서로 더하여 법수로 한다. 만약 종염수가 초상의 2배보다 크면 다음 상득한 엽법수는 뒤집은 면적과 이름이 같고 우법수와는 다른 이름이다. 다음에 상득한 염법수가 곧 종염법수의 남은 것이므로 정,부는 변하지 않는다. 그러므로 다음 차상을 실수와 제함에는 반드시 거꾸로 감하여 법수로 한다. 번적하면 즉 면적이 이미 변하므로 (부호가 변하므로) 우법수로서 주로 삼는다.

4. 개입방법(開立方法)

立方者面面上等之正方體也爲面六爲邊十二以邊求積則用自乘再乘以積求邊則用開立方開之

25) 번적평방법으로 다음과 같이 푼다.
주어진 면적이 1064, 장활화(화수)66에서 초상수를 30으로 하여 푼다. 이때 원래 면적이 초상수 30으로 한 면적 1080(=30×36)보다 작으므로 거꾸로 감하면(번감) 16을 얻는데 이것을 차상실로 삼는다.
종염수 · · · · 66
염법수 · · · · 36
차상염법수(장활교) · · · · 6=66-2×30=和-2배 초상수
차상수 · · · · 8
여기서 차상수 8을 차상염법수 6으로 빼면 2가 남아 차상실 16과 2배 차상수를 서로 감하면 0이 되므로
길이=초상수(30)+차상수(8)=38
너비=화수(66)-길이(38)=28



之法畧與平方等而惟其自乘再乘爲積故商得自乘再乘之數以除之且自乘再乘者必進二位故商數之定位也常超三位而命之(如十自乘再乘爲千百自乘再乘爲百萬故商數之十位定於實數之千位商數之百位定於實數之百萬位皆超三位而命之)初商以後三方廉(卽以初商爲長闊再商爲厚)三長廉(卽以初商爲長再商爲闊厚)生焉至於多商方廉愈大而愈薄(初商再商併之爲長闊故愈大三商數少於再商數故愈薄)長廉愈長而愈細也(初商再商併之爲長故愈長三商數少於再商數故愈細)

입방이라 함은 면과 면이 서로 같은 정방체이다. 면이 6개이면 변(모서리)은 12개가 되는 데 변으로서 체적을 구하려면 자승과 재승을 하고, 체적으로서 변을 구하려면 개입방(세제곱근을 구하는 것)을 하는 것으로 개(근을 구하는 것)의 방법은 대략 평방과 같고 오로지 자승과 재승으로 체적을 구하므로 나누어 얻은 자승과 재승의 수로서 그것을 나누고 또 자승과 재승을 하는 것도 반드시 두 자리 나아가므로 상수(몫)의 자리를 정함에 있어 항상 세 자리를 건너뛰어 자리를 명한다.

가령 십을 자승, 재승하면 천이 되고, 백을 자승, 재승하면 백만이 되므로 상수의 십 자리는 실수의 천 자리 수에 정하고, 상수의 백 자리는 실수의 백만 자리에 정하니 모두 세 자리를 건너뛰어서 그것을 정한다.

초상수를 구한 이후에 세 모서리는 염법수이다. 즉 초상수를 길이와 너비로 하고 재상수를 두께(높이)로 한다. 세 길이 염법수 즉 초상수는 길이가 되고 재상수는 너비와 두께가 되는 것이다. 여러 번의 상하는 (몫을 구하는) 방염에 이르러서는 더욱 커질수록 더욱 얇다.[26]

초상과 재상을 아울리면 길이와 너비가 되므로 더욱 커지고 삼상수는 재상수보다 작으므로 더욱 얇아진다. 장염법수가 더욱 길어지면 더욱더 가늘어진다. 초상수와 재상수를 아울리면 길이가 되므로 더욱 길어지며 삼상수는 재상수보다 작으므로 더욱 가늘어지는 것이다.

設正方體積七百二十九尺問每一邊幾何
答曰九尺

法列七百二十九尺爲借一算於九尺之下名曰隅法商得可合於九尺自乘再乘之數故置商數九尺於實九尺位之上與隅法相乘得九尺置於隅法之上爲長廉法仍與商數相乘得八十一尺置於實之下長廉法之上爲方廉法仍與商數相乘得七百二十九尺以減實恰盡所商九尺卽每一邊也

가령 정방형(정육면체)의 체적이 7백2십9척이면 한 변(모서리)은 얼마인가.
답은 9척이다.

법칙은 7백2십9척을 실수로 하여 나열하고 한 개의 산가지를 9척의 아래 자리에 빌려와 우법수라 하고 나누어 얻는 수(상득하여) 9척에 자승과 재승을 할 수이므로 실수 9척의 위치의 위에 상수 9척을 두어 우법수와 더불어 서로 곱하여 8십1척을 얻어 실수의 아래 장염법수의 위에 두어 방염법수로 삼고 이에 상수와 서로 곱하면 7백2십9를 얻으니 실수로서 감하면 다 없어지므로 상수 9척이 즉 각 모서리이다.[27]

---

26) 길이와 너비가 커지면 두께가 작아진다. 체적이 일정하므로

今有正方體積十四萬八千八百七十七尺問每一邊若干
答曰五十三尺

法列十四萬八千八百七十七尺爲實超置隅法於實八千位之下乃商得五十於實八千位之上與隅法相乘得五十置之隅法之上爲長廉法仍與商數相乘得二千五百尺置之實之實之下長廉法之上爲方廉法仍與商數相乘得十二萬五千尺以減實餘二萬三千八百七十七尺爲次商實又以隅法乘初商數得五十加於長廉法得一百仍與初商數相乘得五千可於方廉法得七千五百(卽初商自乘數之三倍)又以隅法乘初商數得五十加於長廉法得一百五十(卽初商數之三倍)於是方廉法退一位長廉法退二位隅法退三位次商得三尺於實七尺位之上與隅法相乘得三尺可於長廉法得一百五十三尺仍與次商數相乘得四百五十九尺加於方廉法得七千九百五十九尺仍與次商數相乘得二萬三千八百七十七尺以減次商實恰盡以初商次商併之得五十三尺爲每一邊(長闊高各五十三尺之正方體內先減長闊高各五十尺之正方體則餘積卽長闊高三面各付方五十尺厚三尺之扁方體故初商數五十尺自乘三倍爲方廉法也又三方廉相切之邊各付方三尺長五十尺之長方體故初商數五十尺三倍爲長廉法也三方廉三長廉湊合之一隅又付三尺自乘再乘之小正方體故以隅法乘次商數加於長廉法也)

지금 정방의 체적이 14만8천8백7십7척이면 한 변은 얼마인가
답은 5십3척이다.

법칙은 14만8천8백7십7척을 실수로 하여 나열하고 건너뛰어 우법수를 실수의 8천 자리의 아래에 두어 나누어 얻은 수 5십을 실수 8천의 자리의 위에 두어 우법수와 서로 곱하여 5십을 우법수의 위에 두어 장염법수로 삼고 이에 상수와 더불어 서로 곱하여 2천5백척을 얻어 실수의 아래 장염법수의 위에 두어 방염법수로 삼아 상수와 더불어 서로 곱하면 12만5천척을 얻어 실수에서 감하면 2만3천8백7십7척이 남으니 차상실로 삼는다. 또 우법수로서 초상수를 곱하면 5십을 얻으니 장염법수에 더하면 1백을 얻어 초상수와 더불어 서로 곱하면 5천을 얻고 방염법수에 더하면 7천5백을 얻으니 즉 초상수의 자승의 3배이다. 또 우법수로써 초상수를 곱하면 5십을 얻으니 장염법수에 더하면 1백5십을 얻는다. 즉 초상수의 3배이다. 이에서 방염법수를 한자리 물리면 장염법수는 두 자리 물리고, 우법수는 세 자리 물리면, 차상으로 실수 7척 자리의 위에서 3척을 얻으니 우법수와 더불어 서로 곱하여 3척을 얻어 장염법수 1백5십3척을 얻고 이에 차상수와 더불어 서로 곱하여 4백5십9척을 얻어 방염법수에 더하면 7천9백5십9척을 얻으니 차상실에서 감하면 다 없어지므로 초상과 차상을 아울리면 5십3척을 얻으니 각 한 변이 된다.[28)]

27)

상			9
실 수	7	2	9
	7	2	9
			0
방염법수		8	1
장염법수			9
우법수			1

길이, 너비, 높이가 각 5십3척인 정방형의 체적 안에서 먼저 길이, 너비, 높이가 각 5십척인 정방형의 체적을 감하면 즉 나머지 체적은 즉 길이, 너비, 높이가 3인 면 즉 각 모서리가 5십척에 두께가 3척인 편방체이므로 초상수 5십척의 자승에 3배하여 방염법수로 삼은 것이다. 또 세 방염법수를 서로 나누어 변에 각 모서리 3척의 길이를 5십척의 길이를 가진 것에 붙여 장방의 체적이 되므로 초상수 5십척의 3배가 장염법수가 된다. 세 방염법수와 세 장염법수를 서로 더하면 한 모서리가 된다. 또 3척을 자승, 재승하면 작은 정방체가 되므로 우법수를 차상수에 곱하여 장염법수에 더하는 것이다.

5. 대종입방법(帶縱立方法)

帶縱立方者長方或扁方體之長闊高三者有二等一不等者有三邊俱不等者以邊求積則長闊高連乘而以積求邊也必帶其較或和按立方法開之

대종입방이란 장방 또는 편방체이다. 체의 길이, 너비, 높이의 세 가지 중에서 두 가지는 같고 한가지가 다른 경우가 있고, 세 변이 모두 다른 경우가 있으니 변으로써 체적을 구하는 것은 길이, 너비, 높이를 연이어 곱하면 되고, 체적으로써 변을 구할 때는 반드시 그 가지고 있는 교(차)와 화(합)를 고찰하여 입방법으로 그것을 푼다.

今有長方體積二千四百四十八尺其高闊相等長比高闊多五尺問長闊高若干
答曰長十七尺高闊各十二尺

法列二千四百四十八尺爲於上列較五尺於長廉層爲縱廉置隅法一算於下乃縱廉超二位隅法超三位商得一十於實二千位之上仍與隅法相乘得一十加於縱廉得十五爲長廉法仍與商數相乘得一百五十爲方廉法仍與商數相乘得一千五百以減實餘九百四十八尺爲次商實又以隅法乘初商數得一十以加長廉法得二十五仍與初商數相乘得二百五十以加方廉法得三十五於是方廉法退一位長廉法退二位隅法退三位次商得二尺於餘實八尺位之上與隅法相乘得二尺加於長廉法得三十七尺仍與次商數相乘得七十四尺加於方廉法得四百七十四尺仍與次商數相乘得九百四十八尺以減次商實恰盡以初商次商併之得十二尺爲高或闊加多五尺爲長也(此較數帶一縱立方法也高闊既等則

---

28)

초상		5	0			
실수	1	4	8	8	7	7
	1	2	5	0	0	0
차상실		2	3	8	7	7
방염법수			2	5	0	0
장염법수			5	0		
우법수			1			

⇒

차상					3
차상실	2	3	8	7	7
	2	3	8	7	7
					0
방염법수		7	9	5	9
장염법수			1	5	3
우법수					1

∴초상 + 차상 =53

每邊十二尺之正方體外另付十二尺自乘以五尺自乘以五尺再乘之扁方體故以五尺爲縱長廉則與商數十二尺自乘數相乘減實也)又法列二千四百四十八尺爲實於上以較五尺自乘得二十五尺爲縱方廉以較五尺倍之得一十爲縱長廉負置隅法一算於下乃縱方廉進一位縱長廉超二位負隅法初三位商得一十於實二千位之上仍與隅法相乘得一十與縱長廉相減恰盡(縱長廉負隅法正爲名故相減而數適上等故恰塵若縱長廉有餘則仍爲負若隅法多而翻減則變爲正)只以縱方廉乘商數得二百五十以減實餘二千一百九十八尺爲次商實又以隅法乘初商數得一十置之長廉層仍與初商數相乘得一百以加縱方廉得一百二十五又以隅法乘初商數以加長廉法得二十於是方廉法退一位長廉法退二位隅法退三位次商得七尺於餘實八尺位之上與隅法相乘得七尺以加長廉法得二十七尺仍與次商相乘得一百八十九尺以加方廉法得三百十四尺仍次商法相乘得二千一百九十八尺以減次商實恰盡以初商次商併之得十七尺爲長減較五尺爲高或闊(原積比長闊高各十七尺之正方體積高闊兩面各少方十七尺厚五尺之扁方體故倍五尺爲縱長廉負則與商數十七尺自乘數相乘益實而兩扁方體相聯之一邊疊方五尺長十七尺之長方體故以五尺自乘爲縱方廣則餘商數十七尺相乘減實也蓋負算卽減於法減於法所以益實也)

지금 장방체의 체적이 2천4백4십8척인데 그 높이와 너비는 서로 같고, 길이는 높이와 너비에 비해 5척이 길다면 길이, 너비, 높이는 각각 얼마인가.
답은 길이는 17척이고 높이와 너비는 각 12척이다.

법칙은 2천4백4십8척을 실수로 하여 위에 나열하고 장염층에 차 5척을 나열하여 종염법수를 삼고 우법수 한가지를 아래에 둔다. 이에 종염법수를 두 자리 건너뛰고, 우법수는 세 자리 건너뛰어 나누어 얻은 십을 실수 2천 자리의 위에서 나누어 얻으므로 우법수와 서로 곱하여 얻은 십을 종염법수에 더하면 15를 얻으니 장염법수로 삼는다. 상수와 더불어 서로 곱하면 1백5십이 되니 방염법수로 삼고 상수와 서로 곱하면 1천5백이 되니 실수에서 감하면 9백4십8척이 남으므로 차상실로 삼는다. 또 우법수로써 초상수를 곱하면 십을 얻고 이것을 장염법수에 더하면 2십5를 얻으므로 초상수와 서로 곱하면 2백5십을 얻고 이것을 방염법수에 더하면 4백을 얻는다. 또 우법수로 초상수를 곱하면 십을 얻고 장염법수에 더하면 3십5를 얻으니 여기에서 방염법수를 한자리 물리고, 장염법수는 두 자리 물리고, 우법수는 세 자리 물리면 차상인 2척을 남은 실수 8척의 자리 위에서 얻는다. 우법수와 더불어 곱하면 2척을 얻어 장염법수에 더하면 3십7척을 얻고 이에 차상을 서로 곱하면 7십4척을 얻어 방염법수에 더하면 4백7십4척을 얻고 이에 차상을 곱하면 9백4십8척을 얻으니 차상실을 감하면 다 없어지므로 초상과 차상을 아울리면 12척을 얻으니 높이 혹은 너비로 삼아 5척을 더하면 길이가 된다. 이것은 교수대일종 입방법이다.[29]
높이, 너비는 이미 같으므로 각 변이 12척인 정방체 외에 별도로 부친 12척의 자승에 5척을 다시 곱하여 편방체가 되므로 5척으로 종장염법수로 삼으면, 즉 상수 12척의 자승한 수에 서로 곱하여 실수를 감한다.

또 법칙은 2천4백4십8척을 실수로 하여 위에 나열하고 교수(차)로서 5척을 자승하면 2십5척을 얻어 종방염법수로 삼고, 교수 5척을 배하여 십을 얻어 종장염법수로 삼아 부수로 하고 우

29) 차의 수를 가진 일종의 입방법이다.
교수대일종 입방법 : 높이, 너비가 같으므로 장방체 체적 $V=a^2(a+5)=a^3+5a^2$는 상수 12척의 정방체 체적과 종장염수 5척의 12척 편방체의 체적을 합한 것이다. 즉 교수로써 각각을 구하는 방법이다.

법수 1은 아래에 둔다. 이에 종방염법수는 한자리 나아가고, 종장염법수는 두 자리 건너뛰어 부수로 하고, 우법수는 세 자리 건너뛰어 나누어 얻은 십은 실수 2천의 자리 위에서 얻는다. 이에 우법수와 더불어 서로 곱하여 십을 얻어 종장염법수와 서로 감하면 다 없어진다. 종장염법수는 부수(-)로 하고 우법수는 정(+)으로 하면 다른 이름으로 된다.[30]

그러므로 서로 감하면 수는 마땅히 서로 같으므로 다 없어진다. 만약 종장염수가 나머지가 있으면 즉 이것이 부수가 된다. 만약 우법수가 많으면 뒤집어 감하면 즉 변하여 정이 된다. 다만 종방염법수로서 상수와 곱하면 2백5십을 얻고 이로써 실수에서 감하면 2천1백9십8척이 남으니 차상실로 삼는다. 또 우법수로서 초상수와 곱하면 십을 얻으므로 이를 장염층에 두고 이에 초상수와 더불어 서로 곱하면 1백을 얻어 종방염법수에 더하면 1백2십5를 얻는다. 또 우법수로서 초상수와 곱하여 장염법수에 더하면 2십을 얻으니 이에서 방염법수를 한자리 물리고 장염법수는 두 자리 물리고 우법수는 세 자리 물리면 차상수 5척을 나머지 실수 8척의 자리 위에서 얻으니 우법수와 더불어 서로 곱하면 7척을 얻고 장염법수에 더하면 2십7척을 얻으니 이에 차상과 더불어 서로 곱하면 1백8십9척을 얻어 이를 방염법수에 더하면 3백1십4척을 얻으니 이에 차상을 서로 곱하면 2천1백9십7척을 얻으니 이로써 차상실에서 감하면 모두 없어지므로 초상, 차상을 서로 아울리면 17척을 얻어 길이로 하고 차 5척을 감하여 높이 혹은 너비로 한다.

원래의 체적은 길이, 너비, 높이 각각이 17척인 정방체의 체적에 비해, 높이, 너비 양면이 각각 같다. 정사각형 면적의 모서리가 17척, 두께 5척인 것은 편방체이므로 5척의 배를 종장염법수로 하여 부로써 하고 즉 상수 17척을 제곱한 수를 서로 곱하여 실수에 더하면 양 편방체를 서로 연이어 한 모서리가 겹쳐진 것은 정사각형 면적의 모서리가 5척 길이가 17척의 장방체이므로 5척의 자승으로 종방염법수로 삼아 크게 한 것으로 즉 상수 17척과 서로 곱하여 실수에서 감한다. 대개 부수를 계산하면 즉 법수에서 감하므로 실수에는 더하는 까닭이다.

今有扁方體積三萬四千三百尺長闊各比高多七尺問長闊高各若干
答曰長闊各三十五高二十八尺

法列三萬四千三百尺爲實於上以較七尺自乘得四十九尺爲縱方廉倍較七尺得十四尺爲縱長廉置隅法一算於下按法開得二十八爲高加較七尺爲長或闊(此較數帶兩縱相同立方法也原積比長闊高各二十八尺之正方體積長闊兩面各多方二十八尺厚七尺之扁方體故倍七尺爲縱長廉則與商數二十八尺自乘數上乘減實也兩扁方體相切之二邊又多方七尺長二十八尺之長方體故七尺自乘爲縱方廉則與商數十七尺上乘減實也)

又法列三萬四千三百尺爲實於上列較七尺於長廉層爲縱長廉負置隅法一算於下按異減同加法開得三十五尺爲長或闊減較七尺爲高(原積長闊旣等則比長闊高各三十五尺之正方體積少三十五尺自乘以七尺再乘之一扁方體積故以七尺爲縱長廉負則與商數三十五尺自乘數上乘益實也)[31]

지금 편방체[32]의 체적이 3만4천3백척으로 길이, 너비 각각이 높이에 비해 7척이 크다면

30) 서로 다른 부호를 가진 수
31) 多少는 오늘날 大小와 같은 표현이다.
32) 두 변의 길이가 같을 경우 ; 부피 $V=a^2b$ 에서
① $a<b$ 일 때 V는 장방체의 부피이고

길이, 너비, 높이는 각각 얼마인가.

답은 길이, 너비가 각 3십5척이고, 높이가 2십8척이다.

법칙은 3만4천3백척을 실수로 하여 위에 나열하고 차 7척을 자승하여 4십9척을 얻어 종방염법수로 삼고 차 7척의 배를 하여 14척을 얻어 종장염법수로 삼고 우법수 1을 아래에 둔다. 개평법으로 2십8척을 얻어 높이로 삼고 차 7척을 더하여 길이 혹은 너비로 삼는다. 이 교수대양종법은 입방법[33]과 서로 같다.

원래의 체적은 길이, 너비, 높이가 각 2십8척인 정방체의 체적에 비해 길이, 너비 양 면이(두 모서리가) 각 정사각형의 한 모서리가 2십8척, 두께가 7척이 많은 편방체이므로 7척의 배를 종장염법수로 삼은 즉 상수 2십8척의 자승을 서로 곱하여 실수에서 감한다. 양 편방체가 두 변으로 서로 나뉜다.(35= 28 + 7) 또 방 7척이 더 크고 길이가 2십8척인 장방체이므로 7척의 자승을 종방염법수로 삼은 즉 상수 17척을 서로 곱하여 실수에서 감한다.

또 법칙은 3만4천3백척을 실수로 하여 위에 나열하고 차 7척은 장염층에 나열하여 종장염법수로 삼아 부수로 하고 우법수 1은 아래에 둔다. 이감동가법(서로 다른 것은 감하고, 같은 것은 더하는 법)으로 풀면 3십5척을 얻어 길이 혹은 너비로 삼고 차 7척을 감하여 높이로 한다. 원래의 체적은 길이와 너비가 이미 같은 즉 길이, 너비, 높이가 각 35척인 정방체의 체적에 비해 작다. 3십5척의 자승에 7척으로 다시 곱한 편방체의 체적보다 작으므로 7척으로 종장염법수로 삼아 부수로 하는 즉 상수 3십5척의 자승수와 서로 곱하여 실수에 더한다.

今有長方體積六萬二千一百尺長比高多二十九尺闊比高多二十一尺問長闊高各若干

答曰長五十四尺闊四十六尺高二十五尺

法列六萬二千一百尺爲實於上以二十九尺與二十一尺上乘得六百九尺爲縱方廉以二十九與二十一尺相併得五十尺爲縱長廉置隅法一算於下按法開得二十五尺爲高加二十一尺爲闊加二十九尺爲長(此較數帶兩縱不同立方法也與兩縱相同法本法無異兩較上乘卽較自乘之意也兩較相併卽倍較數之意也)

又法以二十九尺內減二十一尺餘八尺爲長比闊之較(長高較內減闊高較故爲長闊較也)乃列六萬二千一百尺爲實於上以闊高較二十一尺與長闊較八尺上乘得一百六十八尺爲縱方廉負又以二十一尺內減八尺餘十三尺爲縱長廉負置隅法一算於下按異減同加法開得四十六尺爲闊減二十一尺爲高加八尺爲長(二十一尺內減八尺爲縱長廉負者卽二十一尺爲縱長廉負八尺爲縱長廉正異名相減也原積比長闊高各四十六尺之正方體積一面少方四十六尺厚二十一尺之扁方體故以二十尺爲縱長廉負與商數四十六尺上乘益實也一面多四十六尺爲長以原高爲闊八尺爲厚之長方體而以八尺爲縱長廉正與四十六尺自乘數上乘減實則多減去四十六尺爲長闊高較爲厚之體積故以闊高較二十一尺與八尺上乘爲縱方廉負與商數四十六尺上乘益實也)

又法列六萬二千一百尺爲實於上長高較二十九尺與長闊較八尺上乘得二百三十二尺爲縱方廉

② $a>b$ 일 때 V는 편방체의 부피이다.

33) 교수대종법으로 풀이하면 종방염수 49, 종장염수 14, 높이 28(14×2), 교수 7, 상수 28이므로
원체적: $34300=35\times35\times28=(28+7)^2\times28=28^3$(정방체)$+2\times7\times28^2$(양평방체)$+7^2\times28$(장방체)이 되어 값을 구하게 된다.

又以二十九尺與八尺相併得三十七尺爲縱長廉負置隅法一算於下按異減同加法開得五十四尺爲長減二十九尺爲高減八尺爲闊(此法與帶一縱法又法無異也)

지금 장방체의 체적이 6만2천1백척인데 길이가 높이에 비해 2십9척이 크고, 너비는 높이에 비해 2십1척이 더 크다고 하면, 길이, 너비, 높이는 각 얼마인가.
답은 길이는 5십4척, 너비는 4십6척, 높이는 2십5척이다.

법칙은 6만2천1백척을 실수로 삼아 위에 나열하고, 2십9척으로 2십1척과 더불어 서로 곱하여 6백9척을 얻어 종방염법수로 삼는다. 2십9척으로 더불어 2십1척을 서로 아울리면 5십척을 얻어 종장염법수로 삼고 우법수 1은 아래에 두어 개평법을 고찰하면 2십5척을 얻어 높이로 삼고 2십1척을 더하여 너비로 하고, 2십9척을 더하여 길이로 한다.
이 교수대양종법[34]은 입방법과 같지 않다.
양 종(염수)과 더불어 서로 같은 법은 본법(입방법)과 다르지 않다. 양 교수를 서로 곱하면 즉 교수의 자승의 뜻이다. 양 교수를 서로 아울리면 즉 교수의 배를 뜻한다. 또 법칙은 2십9척 안에서 2십1척을 감하여 남는 8척은 길이의 너비에 비교한 차로 한다. 길이와 높이의 차 안에서 너비와 높이의 차를 감하는 것이므로 길이와 너비의 차가 된다.
이에 6만2천1백척을 실수로 삼아 위에 나열하고 너비와 높이의 차 2십1척과 길이와 너비의 차 8척을 서로 곱하여 1백6십8척을 얻어 종방염법수를 삼아 부수로 한다. 또 2십1척 안에서 8척을 감하여 남은 13척을 종장염 부수로 삼고 우법수 1은 아래에 둔다. 이감동가의 개방법으로 풀면 4십6척을 얻어 너비로 삼고 2십1척을 감하여 높이로 삼고 8척을 더하여 길이로 한다.
2십1척 안에서 8척을 감한 것을 종장염 부수로 삼은 것은, 2십1척을 종장염 부수로 삼고 8척을 종장염 정수로 삼은 것으로 다른 이름 (정,부)이니 서로 감한다.
원래의 체적은 길이, 너비, 높이가 각 4십6척인 정방체의 체적에 비해, 한 면이 작은 면적(정사각형)이 4십6척이고 두께가 2십1척인 편방체로서 보다 작으므로 2십1척을 종장염 부수로 삼아 상수 4십6척과 더불어 서로 곱하여 실수에 더한다. 한 면이 큰 4십6척을 길이로 삼고, 원래 너비와 높이의 차를 너비로 하고 8척을 두께로 한 장방체이다. 8척으로 종장염 정수로 삼아 4십6척의 자승수와 더불어 서로 곱하여 실수에서 감한 즉 많은 것은 감하고 버린다. 4십6척을 길이로 삼고 너비와 높이의 차를 너비로 삼고 8척을 두께로 한 체적이므로 너비와 높이의 차 2십1척을 8척과 더불어 서로 곱하여 종방염 부수로 삼아 상수 4십6척과 곱하여 실수에 더한다.

또 법칙은 6만2천1백척을 실수로 하여 위에 나열하고 길이와 높이의 차 2십9척을 길이와 너비의 차 8척과 더불어 서로 곱하여 2백3십2척을 얻어 종방염법수로 삼고 또 2십9척을 8척과 서로 아울리면 3십7척을 얻어 종장염 부수로 두어 우법수 1은 아래에 둔다.
이감동가법에 따라 5십4척을 얻어 길이로 하고 2십9척을 감하여 높이로 하고 8척을 감하여 너비로 한다. 이 법은 대일종법과 더불어 또 이 법은 다르지 않다.

34) 교수대양종법 ; 길이, 너비와 높이가 각각 다르나 길이 너비는 높이와의 교수로 이루어지므로 부피 $V=a(a+21)(a+29)=a^3+50a^2+609a$에서 종방염수 609와 종장염수 50, 즉 양염수를 사용하여 이감동가의 개방법으로 풀어 교수로써 각각을 구하는 법이다.

今有長方體積五千六百二十五尺長闊和長高和各四十尺問長闊高各若干
答曰長二十五尺高闊各十五尺

法列五千六百二十五尺爲實於上以四十尺爲縱長廉置隅法一算於下負按異減同加法開得十五尺爲高或闊減於和爲長(此和數帶兩縱相同法也長高和內減商數餘爲長高與商數自乘數上乘減實也商數自乘之數卽高闊上乘之數也一隅爲負卽所以減商數也)

又法列五千六百二十五尺爲實於上以四十尺自乘得一千六百爲縱方廉倍四十尺得八十尺爲縱長廉負置隅法一算於下按異減同加法飜積開得二十五尺爲長減於和爲高或闊(此法高闊旣等則以高冪爲法除積可以得長而今以和冪一千六百爲法比高冪多長與和上乘積長與高上乘積各一段故倍和爲縱長廉負以隅乘商數長以減之則餘一和一高共數仍與商數長上乘以減和冪餘高冪爲法也)

지금 장방체의 체적이 5천6백2십5척이고 길이와 너비의 합과 길이와 높이의 합이 각각 4십척이면 길이, 너비, 높이는 각 얼마인가.

답은 길이가 2십5척, 높이와 너비는 각 15척이다.

법칙은 5천6백2십5척을 실수로 하여 위에 나열하고 4십척은 종장염법수를 삼고 우법수 1은 아래에 부수로 둔다. 이감동가법으로 풀면 15척을 얻어 높이 혹은 너비로 삼아 합에서 감하여 길이로 삼는다. 이것은 화수대양종상동법[35]이다.

길이와 높이의 합 안에서 상수를 감하여 남은 것은 길이가 되므로 상수 자승수와 더불어 서로 곱하여 실수에서 감한다. 상수를 자승한 수는 즉 높이와 너비를 서로 곱한 수이다. 우법수 1을 부(-)로 한 것은 즉 상수를 감하는 까닭이다.

또 법칙은 5천6백2십5척을 실수로 하여 위에 나열하고 4십척을 자승하여 1천6백을 얻어 종방염법수로 삼고 4십척을 배로 하여 8십척을 얻어 종장염법수로 삼아 부수로 두고 우법수 1은 아래에 둔다.

이감동가법으로 번적하여 풀면 2십5척을 얻어 길이로 삼고 합에서 감하여 높이 또는 너비로 삼는다. 이 법칙은 높이와 너비가 이미 같은 즉 높이의 멱(승)으로 법수로 삼아 체적에서 나누면 길이를 얻게 된다.

이제 합의 멱(승) 1천6백을 법수로 하고 높이 멱수에 비해 길이와 합을 서로 곱한 면적이 더 크고 길이와 높이를 서로 곱한 면적이 각 1단이므로 합의 배수를 종장염법수로 삼아 부수로 하고 우법수와 상수인 길이를 곱하여 이것으로 감하면 하나의 합과 하나의 높이가 남고 공수(같은 수)가 된다. 이 공수에 상수인 길이와 서로 곱하여 합의 멱수에서 감하면 높이의 멱수가 남으니 법수로 한다.

今有長方體積三萬九千三百七十五尺長與高之和七十尺闊與高之和六十尺問長闊高各幾何
答曰長四十五尺闊三十五尺高二十五尺

法列三萬九千三百七十五尺爲實於上兩和上乘得四千二百爲縱方廉兩和相併得一百三十爲縱長廉負置隅法一算於下按異減同加法飜積開得二十五尺爲高減於長高和爲長減於闊高和爲闊(此

35) 화수대양종상동법 ; 두 화수가 같아 구하는 두수가 같으므로 체적 $V = a(40-a)^2 = a^3 - 80a^2 + 1600a$ 에서 1600척을 종방염수, 80척을 종장염수로 하여 이감동가법으로 번적하여 풀어 화수로써 각각을 구하는 방법이다.

和數帶兩縱不同法也與前問又法無異也)

又法列三萬九千三百七十五尺爲實於上兩和相減得十尺爲長闊較乃以長高和七十尺與長闊較十尺上乘得七百尺爲縱方廉負長高和七十尺與長闊較十尺相併得八十尺爲縱長廉置隅法一算於下負按異減同加法開得四十五尺爲長減於長高和爲高減去長闊較爲闊(此法以闊高上乘積爲法除實可以得長而今以長高和與長闊較之共數爲縱長廉內減商數餘爲高及長闊較以乘商數得長高上乘積一段長乘長闊較積一段也以長高和長闊較上乘爲縱方廉負基數爲高乘長闊較積一段長乘長闊較積一段故以之相減則長乘長闊較積上等減盡而長高上乘積內減高乘長闊較積餘爲闊高相乘積也)

又法列三萬九千三百七十五尺爲實於上闊高和六十與長闊較十尺上乘得六百尺爲縱方廉闊高和六十尺內減長闊較十尺餘五十尺爲縱長廉置隅法一算於下負按異減同加法開得三十五尺爲闊或於闊高和爲高加長闊較爲長(此法以長高上乘積爲法除實則可以得闊而今以長闊較減闊高和爲縱長廉內減商數餘爲高內去長闊較以乘商數得闊高上乘積內少濶乘長濶較積也以闊高和與長闊較上乘爲縱方廉其數爲闊乘長闊較積及高乘長闊較積適補其所少而濶高上乘積得高乘長闊較積爲長高上乘積也)

지금 장방체의 체적이 3만9천3백7십5척이고 길이와 높이의 합이 7십척이고, 너비와 높이의 합이 6십척이면 길이, 너비, 높이는 각 얼마인가.

답은 길이 4십5척, 너비 3십5척, 높이는 2십5척이다.

법칙은 3만9천3백7십5척을 실수로 하여 위에 나열하고, 두 합을 서로 곱하여 4천2백을 얻어 종방염법수로 하고, 두 합을 서로 아울리면 1백3십을 얻어 종장염법수를 부수로 하고 우법수 1은 아래에 둔다.

이감동가법으로 번적하여 풀면 2십5척을 얻어 높이로 하고 길이와 높이의 합에서 감하여 길이를 얻고 너비와 높이의 합에서 감하여 너비를 얻는다. 이것은 화수대양종부동법[36]으로 앞의 문제와 더불어 또 법칙은 다르지 않다.

또 법칙은 3만9천3백7십5척을 실수로 하여 위에 나열하고 두 개의 합을 서로 감하여 십척을 얻어 길이와 너비의 차로 하고 이에 길이와 높이의 합인 7십척과 더불어 길이와 높이의 차 십척을 서로 곱하면 7백척을 얻으니 종방염 부수로 하고 길이와 높이의 합 7십척과 길이와 너비의 차 십척을 서로 아울리면 8십척을 얻어 종장염법수로 하고 우법수 1은 아래에 부수로 둔다. 이감동가법으로 풀면 4십5척을 얻으니 길이로 삼고, 길이와 높이의 합에서 감하여 높이로 하고 길이와 너비의 차를 빼면 너비가 된다.

이 법칙은 너비와 높이를 서로 곱한 면적을 법수로 하여 실수에서 나누면(실수를 법수로 나누면) 길이를 얻을 수 있게 된다.

지금 길이와 높이의 합과 길이와 너비의 차의 공수를 종장염법수로 하여 안에서 상수를 감하면 남는 것은 높이와 길이와 너비의 차가 된다. 이미 상수를 곱하므로 길이와 높이를 서로 곱한 면적 1단을 얻고, 길이와 길이와 너비의 차를 곱한 면적인 1단을 얻는다.

길이와 높이의 합과 길이와 너비의 차를 서로 곱하여 종방염 부수로 하고 그 수를 높이와 길이와 너비의 차를 곱한 면적을 1단으로 하고, 길이와 길이와 너비의 차를 곱한 면적

36) 화수대양종부동법 ; 두 화수가 다른 경우에 교수를 얻어 화수와 교수의 곱과 합을 각각 종방염수, 종장염수 부수로 하여 이감동가법으로 번적하여 풀고 화수 및 교수로써 각각 구하는 방법이다.

을 1단으로 하므로 이것으로 서로 감하면 즉 길이와 길이와 너비의 차를 곱한 면적과 서로 같으므로 감하면 없어지고, 길이와 높이를 서로 곱한 면적 안에서 높이와 길이와 길이와 너비의 차를 곱한 면적을 감하면 나머지는 너비와 높이를 서로 곱한 면적이 된다.

또 법칙은 3만9천3백7십5척을 실수로 삼아 위에 나열하고 너비와 높이의 합 6십과 길이와 너비의 차 십척을 서로 곱하여 6백척을 얻어 종방염법수로 하고, 너비와 높이의 합 6십척안에서 길이와 너비의 차 십척을 감하면 5십척이 남으니 종장염법수로 하고 우법수 1은 아래에 두어 부로 한다.

이감동가법에 따라 풀면 3십5척을 얻어 너비로 하고 너비와 높이의 합에서 감하면 높이를 얻고, 길이와 너비의 차를 더하여 길이를 얻는다. 이 법칙은 길이와 높이를 서로 곱한 면적을 법수로 하여 실수에서 나누어 너비를 얻을 수 있게 된다.

지금 너비와 높이의 합에서 길이와 너비의 차를 감하여 종장염법수로 하여 그 안에서 상수를 감하여 남은 것을 높이로 삼고 그 안에서 길이와 너비의 차를 빼서 상수를 곱하면 너비와 높이를 서로 곱한 면적에서 너비와 길이와 너비의 차의 면적보다 작은 것을 얻는다.

너비와 높이의 합과 더불어 길이와 너비의 차를 서로 곱하여 종방염법수로 하고 그 수를 너비로 하여 길이와 너비의 차를 곱한 것과 높이에 길이와 너비의 차를 곱한 것은 공수이므로 이것을 서로 더한 것은 즉 너비와 길이와 너비의 차를 곱한 면적은 그 작은 바를 보충하는데 적합하고 너비와 높이를 서로 곱한 면적은 높이에 길이와 너비의 차의 면적을 얻어 길이와 높이를 서로 곱한 면적이 된다.

6. 제승방법(諸乘方法)

平方爲面立方爲體過此以往數之所衍無形可稽(如三乘方卽立方之依邊數者四乘方卽三乘方之依邊數層疊者五乘方卽四乘方之依邊數層疊者而並無實形)其爲積也每多一乘則(自乘積爲平方再乘積爲立方三乘積爲三乘方四乘積爲四乘方五乘積爲五乘方至於十乘百乘皆倣此推之(開之也法多一層(平方之法二層立方之法三層三乘方之法四層四乘方之法五層五乘方之法六層十乘百乘皆倣此推之)而超一位商之(平方超二位商之立方超三位商之三乘方超四位商之四乘方超五位商之五乘方超六位商之十乘百乘皆倣此推之)一串爲例玆不逐條設則畧擧數端焉又有省算代開者三乘方可以兩次平方開之(三乘方爲平方積自乘數)五乘方可以一次平方開之一次立方開之(五乘方爲立方積自乘數)七乘方可以三次平方開之亦可以一次平方開之一次三乘方開之(七乘方爲三乘方積自乘數)八乘方可以兩次立方開之(八乘方爲立方積再乘數)九乘方可以一次平方開之一次四乘方開之(九乘方四乘方積自乘數)

평방은 면적이고, 입방은 체적으로 이것보다 넘쳐나가는 수는 형태는 없으나 헤아릴 수는 있다. 즉 3승방은 입방에 한 변수에 의하고, 4승방은 3승방에 한 변수의 층첩에 의하고, 5승방은 4승방에 한 변수의 층첩에 의하니 나란히 실제의 형태는 없다. 자승적은 평방이고, 재승적은 입방이고, 3승적은 3승방이고, 4승적은 4승방이고, 5승적은 5승방으로 십승, 백승에 이르기까지 모두다 이와 같이 한다. 그것을 푸는 법은 1층이 많다. 평방의 법은 2

층이고, 입방의 법은 3층이고, 3승방의 법은 4층이고, 4승방의 법은 5층이고, 5승방의 법은 6층이고, 십승, 백승 모두 이와 같이 한다. 그리고 한자리 건너뛰어 그것을 나눈다. 평방은 두 자리 건너뛰어 그것을 나누고, 입방은 세 자리 건너뛰어 그것을 나누고, 3승방은 네 자리 건너뛰어 그것을 나누고, 4승방은 다섯 자리 건너뛰어 그것을 나누고, 5승방은 여섯 자리 건너뛰어 그것을 나누고, 십승, 백승 모두 이와 같이 한다. 일연의 예 인즉 이로써 조목을 설명하지 않고, 생략하여 수를 열거할 뿐이다. 또 계산하는 것을 살펴보면 대개는 3승방은 두 차례 평방개로 할 수 있다. 3승방은 평방적의 자승수이다.[37]

5승방은 한 차례 평방개와 한 차례 입방개로 할 수 있다. 5승방은 입방적의 자승수이다.[38]

7승방은 세차례 평방개로 할 수 있고, 역시 한차례의 평방개와 한차례의 3승방개로 할 수 있다. 7승방은 3승방적의 자승수이다.[39]

8승방은 두차례의 입방개로 할 수 있다. 8승방은 입방적의 재승수이다.[40]

9승방은 한차례의 평방개와 한차례의 4승방개로 할 수 있다. 9승방은 4승방적의 자승수이다.[41]

今有三乘方積三十九萬六百二十五尺問每邊若干
答曰二十五尺

法列三十九萬六百二十五尺爲實於上超置隅法一算於實九萬位之下乃商得二十於實九萬位之上以隅法乘之得二十置之隅法之上爲長廉法仍乘商數得四百置之長廉之上爲平方廉法仍乘商數得八千置之平方廉之上爲立方廉法仍乘商數得十六萬以減實餘二十三萬六百二十五爲次商實(隅法內含商數所以三乘除實也長廉已得商數所以再乘除實也平方廉商數自乘積所以自乘自乘除實也立方廉商數再乘積所以爲法除實也四乘方以上皆倣此推之)又以隅法乘初商數得二十加長廉爲四十仍乘初商數得八百加平方廉爲一千二百仍乘初商數得二萬四千加立方廉爲三萬二千(卽初商數再乘四倍數也)又以隅法乘初商數得二十加長廉爲六十仍乘初商數得一千二百加平方廉爲二千四百(卽初商數自乘六倍數也)又以隅法乘初商數得二十加長廉八十(卽初商數四倍數也)於是立方廉一退平方廉二退長廉三退隅法四退皆復本位次商得五尺於餘實五尺位之上以隅法乘之得五尺加長廉爲八十五仍乘次商數得四百二十五加平方廉得二千八百二十五仍乘次商數得一萬四千一百二十五加立方廉得四萬六千一百二十五仍乘次商數得二十三萬六百二十五以減次商實恰盡併初商次商得二十五尺爲每一邊

又法列三十九萬六百二十五尺爲實以一爲隅法開平方得六百二十五尺仍爲實以一爲隅開平方得二十五尺爲每一邊

지금 3승방적이 3십9만6백2십5척이면 각 변은 얼마인가.
답은 2십5척이다.

---

37) $a^4=(a^2)^2$

38) $a^6=(a^3)^2$

39) $a^8=((a^2)^2)^2$, $a^8=(a^4)^2$

40) $a^9=(a^3)^3$

41) $a^{10}=(a^5)^2$

법칙은 3십9만6백2십5척을 실수로 하여 위에 나열하고 우법수 1은 건너뛰어 실수 9만의 위치 위에서 상 2십을 얻어, 이로써 우법수를 곱하여 2십을 얻어 우법수의 위에 이것을 두어 장염법수로 한다. 이에 상수를 곱하여 4백을 얻어 장염법수의 위에 두고 평방염법수로 한다. 이에 상수를 곱하여 8천을 얻어 평방염법수의 위에 두고 입방염법수로 하고 이에 상수를 곱하여 16만을 얻어 이를 실수에서 감하면 2십3만6백2십5가 남으니 차상실로 한다. 우법수는 상수를 포함하므로[42] 그 3승적은 실수를 제한다. 장염법수는 이미 얻은 상수이므로 그 재승은 실수를 제한다.[43]

평방염법수는 상수를 자승적한 것이므로 자승은 실수를 제한다.[44]

입방염법수는 상수를 재승적한 것이므로 법수(상수 = 장염법수)로서 실수를 제한다.[45]

4승방 이상은 모두 이와 같게 한다.

또 우법수에 초상수를 곱하여 2십을 얻어 장염법수에 더하여 4십을 얻는다. 이에 초상수를 곱하여 8백을 얻어 평방염법수에 더하여 1천2백을 얻고 이에 초상수를 곱하여 2만4천을 얻어 입방염법수에 더하여 3만2천을 얻는다. 즉 초상수를 재승하여 4배한 수이다.[46] 또 우법수로 초상수를 곱하여 2십을 얻어 장염법수에 더하면 6십을 얻고 이에 초상수를 곱하여 1천2백을 얻어 평방염법수에 더하면 2천4백이 된다. 즉 초상수의 자승의 6배수이다.[47] 또 우법수로 초상수에 곱하여 2십을 얻어 장염법수에 더하면 8십이 된다. 즉 초상수의 4배수이다. 이에 입방염법수는 한자리 물리고, 평방염법수는 두 자리 물리고, 장염법수는 세 자리 물리고, 우법수는 네 자리 물리면 모두 다시 본래의 위치로 돌아오고, 차상 5척을 남은 실수 5척의 자리 위에서 얻어 이로써 우법수로 그것에 곱하여 5척을 얻어 장염법수에 더하여 8십5를 얻는다. 이에 차상수를 곱하여 4백2십5를 얻어 평방염법수에 더하여 2천8백2십5를 얻고 이에 차상수를 곱하여 1만4천1백2십5를 얻어 입방염법수에 더하여 4만6천1백2십5를 얻어 이에 차상수를 곱하여 2십3만06백2십5를 얻어 이를 차상실에서 감하면 다 없어지므로 초상과 차상을 아울리면 2십5를 얻으니 각 한 변이 된다.

또 법칙은 3십9만06백2십5를 실수로 삼아 나열하고 1을 우법수로 하여 개평방하여 6백2십5척을 얻으니 이것을 실수로 하고 1을 우법수로 하여 개평방하여 2십5척을 얻어서 각 한 변으로 한다.

今有五乘方積二倍三乘方積五倍平方積四十一倍共數內減四乘方積三倍立方積三十倍邊數五百倍餘數五百二十七萬七千二百十六問每邊數幾何

答曰十二

42) 여기서의 우법수는 장염법수, 평방염법수, 입방염법수

43) $\dfrac{a^4}{a^3} = a$

44) $\dfrac{a^4}{a^2} = a^2$

45) $\dfrac{a^4}{a} = a^3$

46) $20^3 = 8000$, $8000 \times 4 = 32000$

47) $20^2 = 400$, $400 \times 6 = 2400$

法列五百二十七萬七千二百十六爲實於上列五百爲縱四乘廉法負(四乘廉居除法之層故邊數從之減故爲負也)四十一爲縱三乘廉法正(三乘廉居平方隅法之層故平方積從之)三十爲縱立方廉法負(立方廉居立方隅法之層故立方積從之減故爲負也)五爲縱平方廉法正(平方廉居三乘方隅法之層故三乘方積從之)三爲縱長廉法負(長廉居四乘方隅法之層故四乘方積從之減故爲負也)二爲隅法正於是四乘廉進一位三乘廉進二位立方廉進三位平方廉進四位長廉進五位隅法進六位商得一十於實五百萬位之上以隅法乘之內減縱長廉餘十七爲長廉變爲正仍乘商數加縱平方廉得一百七十五爲平方廉正仍乘商數內減縱立方廉餘一千七百二十爲立方廉變爲正仍乘商數加縱三乘廉得一萬七千二百四十一爲三乘廉正仍乘商數內減縱四乘廉餘十七萬一千九百十爲四乘廉變爲正仍乘商數以減實餘三百五十五萬八千一百十六爲次商實又以隅法乘初商加長廉仍乘初商加平方廉仍乘初商加立方廉仍乘初商加三乘廉仍乘初商加四乘廉得一百六萬一千三百二十(卽初商數之四乘積二段六百立方積五段四倍商數四十一段二倍共數內減三乘積三段五倍平方積三十段三倍及五百算之餘數也)

又以隅法乘初商加長廉仍乘初商加平方廉仍乘初商加立方廉仍乘初商加三乘廉得二十七萬二千一百四十一(卽初商數之三乘積二段十五倍平方積五段六倍及四十一算共數內減立方積三段十倍商數三十段三倍之餘數也)又以隅法乘初商加長廉仍乘初商加平方廉仍乘初商加立方廉得三萬七千一百七十(卽初商數之立方積二段二十倍商數五段四倍共數內減平方積三段十倍及三十算之餘數也)又以隅法乘初商加長廉仍乘初商加平方廉得二千八百五十五(卽初商數之平方積二段十五倍及五算共數內減商數三段五倍之餘數也)又以隅法乘初商加長廉得一百十七(卽初商數二段六倍內減三算之餘數也)於是四乘廉一退三乘廉二退立方廉三退平方廉四退長廉五退隅法六退皆復本位次商得二於餘實六尺位之上以隅法乘之加長廉得一百二十一仍乘次商加平方廉得三千九十七仍乘次商數加立方廉得四萬三千三百六十四仍乘次商數加三乘廉得三十五萬八千八百六十九仍乘次商數加四乘廉得一百七十七萬九千零五十八仍乘次商數得三百五十五萬八千一百十六以減次商實恰盡併初商次商得十二爲每邊數

지금 5승방적의 2배, 3승방적의 5배, 평방적의 4십1배를 합한 수에서 4승방적의 3배, 입방적의 3배, 변수의 5백을 감하면 남은 수가 5백2십7만7천2백1십6이면 각 변수는 얼마인가.

답은 12이다.48)

법칙은 5백2십7만7천2백16을 실수로 하여 위에 나열하고 5백은 종4승염법수로 하여 부수로 한다. 4승염법수는 제법의 층에 있으므로 변수는 그것에 따라 감하므로 부가 된다.49)

4십1은 종3승염법수로 하여 정으로 한다. 3승염법수는 평방우법의 층에 있으므로 평방적은 그것에 따른다.50)

3십은 종입방염법수로 하여 부로 한다. 입방염법수은 입방우법의 층에 있으므로 입방적은 그것에 따라 감하므로 부가 된다.51)

5는 종평방염법수로 하여 정으로 한다. 평방염법수는 3승방 우법의 층에 있으므로 3승방적은 그것에 따른다. 3은 종장염법수로 하여 부로 한다. 장염법수는 4승방우법의 층에 있으므로 4승방적은 그것에 따라 감하므로 부가 된다.52)

---

48) $(2a^6+5a^4+41a^2)-(3a^5+30a^3+500a)=5277216, a=12$

49) -500a

50) $+41a^2$

51) $-30a^3$

2는 우법수로 하여 정으로 한다.[53]

이에 4승염법수는 한자리 나아가고, 3승염법수는 두 자리 나아가고, 입방염법수는 세 자리 나아가고, 평방염법수는 네 자리 나아가고, 장염법수는 다섯 자리 나아가고, 우법수는 여섯 자리 나아가서 실수의 5백만 자리의 위에서 상(商) 십을 얻어 우법수로 곱하여 안에서 종장염법수를 감하면 17이 남아 이것을 장염법수로 하여 바꾸어 정으로 한다.[54]

이에 상수를 곱하여 종평방염법수에 더하여 1백7십5를 얻어 평방염법수로 하여 정이 된다.[55]

이에 상수를 곱하여 종입방염법수를 감하면 나머지가 1천7백2십이 되고 입방염법수로 하여 바꾸어 정이 된다.[56]

이에 상수를 곱하여 종3승염법수를 더하면 1만7천2백4십1을 얻어 3승염법수로 하여 정이 된다.[57]

이에 상수를 곱하여 종4승염법수를 감하면 나머지가 1십7만1천9백1십이 되고 4승염법수로 하여 바꾸어 정이 된다.[58]

이에 상수를 곱하여 실수를 감하면 3백5십5만8천1백1십6이 남으니 차상실로 한다.[59]

또 우법수로 초상수를 곱하여 장염수법수를 더하고, 이에 초상수를 곱하여 평방염법수를 더하고, 이에 초상수를 곱하여 입방염법수를 더하고, 이에 초상수를 곱하여 3승염법수를 더하고, 이에 초상수를 곱하고 4승염수법수를 더하면 1백6만1천3백2십을 얻는다.[60]

즉 초상수의 4승적의 2단의 6배, 입방적의 5단의 4배와 상수의 4십1단의 2배의 합한 수(공수)안에서 3승적의 3단의 5배, 평방적의 3십단의 3배에 5백을 계산하여 감하여 남은 수이다.[61][62]

또 우법수에 초상수를 곱하고 장염법수를 더하고 이어서 초상수를 곱하고 평방염법수를 더하고 이어서 초상수를 곱하고 입방염법수를 더하고 초상수를 곱하고 3승염법수를 더하면 2십7만2천1백4십1를 얻는다.[63]

---

52) $-3a^5$

53) $+2a^6$

54) $2\times10-3=17$

55) $17\times10+5=175$

56) $175\times10-30=1720$

57) $1720\times10+41=17241$

58) $17241\times10-500=171910$

59) $5277216-1719100=3558116$

60) $[\{[\{(2\times10+17)\times10+175\}\times10+1720]\times10+1724\}\times10+171910]=1061320$

61) $(10^5\times2\times6+10^3\times5\times4+10\times41\times2)-(10^4\times3\times5+10^2\times30\times3+500)=1061320$

62) $10\times2+17=37$ (제2 장염수)
$37\times10+175=545$ (제2 평방염수)
$545\times10+1720=7170$ (제2 입방염수)
$7170\times10+17241=88941$ (제2 삼승염수)
$88941\times10+171910=1061320$ (제2 사승염수)

63) $10\times2+37=57$(제3 장염수)
$57\times10+545=1115$(제3 평방염수)

즉 초상수의 3승적의 2단의 15배와 평방적의 5단의 6배에 4십1를 더한 수 안에서 입방적의 3단의 십배와 상수 3십단의 3배의 수를 감하여 남은 수이다.[64]

또 우법수로 초상수를 곱하고 장염법수를 더하고 이어 초상수를 곱하고 평방염법수를 더하고 이어 초상수를 곱하고 입방염법수를 더하면 3만7천1백7십을 얻는다.[65]

즉 초상수의 입방적의 2단의 2십배와 상수의 5단의 4배를 더한 수에서 평방적의 3단의 십배에 3십을 더한 수를 감하여 남은 수이다.[66]

또 우법수에 초상수를 곱하고 장염법수를 더하고 이어 초상수를 곱하고 평방염법수를 더하면 2천8백5십5를 얻는다.[67]

즉 초상수의 평방적의 2단의 15배에 5를 더한 수안에서 상수의 3단의 5배를 감하여 남은 수이다.[68]

또 우법수로 초상수를 곱하고 장염법수를 더하면 1백1십7을 얻는다.[69]

즉 초상수의 2단의 6배 안에서 3을 감하여 남은 수이다.[70]

여기서 4승염법수는 한자리 물리고, 3승염법수는 두자리 물리고, 입방염법수는 세자리 물리고, 평방염법수는 네자리 물리고, 장염법수는 다섯자리 물리고 우법수는 여섯자리 물리면 모두 본래의 자리로 돌아와 차상수 2를 남은 실수의 6척 위에서 얻는다.

우법수로 그것을 곱하고 장염법수를 더하면 1백2십1를 얻고 이어 차상수를 곱하고 평방염법수를 더하면 3천9십7를 얻고 이어 차상수를 곱하고 입방염법수를 더하면 4만3천3백6십4를 얻고, 이어 차상수를 곱하고 3승염법수를 더하면 3십5만8천8백6십9를 얻고, 이어 차상수를 곱하고 4승염법수를 더하면 1백7십7만9천05십8을 얻고, 이어 차상수를 곱하면 3백5십5만8천1백1십6을 얻으니 차상실에서 감하면 모두 없어지므로 초상,차상을 아울리면 12를 얻어 각 변수가 된다.[71]

開方之法置商數於實上以商乘隅連乘爲法上達於實帶縱者遇同名則相加正仍爲正負仍爲負異名則相減減餘在正爲正在負爲負而法實異名以法減實卽其常也或法多餘減則爲換骨(卽翻積)同名

$1115\times10+7170=18320$(제3 입방염수)
$18320\times10+88941=272141$(제3 삼승염수)

64) $(10^4\times2\times15+10^2\times5\times6+41)-(10^3\times3\times10+10\times30\times3)=303041-30900=272141$

65) $10\times2+57=77$(제4 장염수)
$77\times10+1115=1885$(제4 평방염수)
$1885\times10+18320=37170$(제4 입방염수)

66) $(10^3\times2\times20+10\times5\times4)-(10^2\times3\times10+30)=40200-3030=37170$

67) $10\times2+77=97$(제5 장염수)
$97\times10+1885=2855$(제5 평방염수)

68) $(10^2\times2\times15+5)-10\times3\times5=2855$

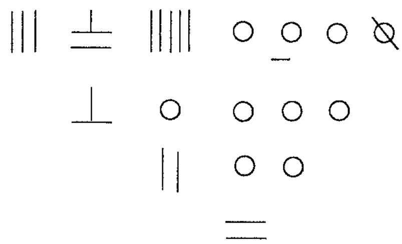
69) $10\times2+97=117$(제6 장염수)

70) $10\times2\times6-3=117$

71) $2\times2+117=121$
$121\times2+2855=3097$
$3097\times2+37170=43364$
$43364\times2272141=358869$
$358869\times2+1061320=1779058$
$1779058\times2=3558116$

相加則爲投胎(卽益積)而換骨或投胎者法必有飜自平方以至百乘千乘同此一規也其列位則擇其異名之可以相步者步之(步者商除也上實下法以法步實而以方廉隅按法超進至於冗數無過法實之首位者爲可步也)以方(卽方廉也)步實者齊實及方之首位以廉(卽長廉也)步方者齊方及廉之首位以隅步廉者齊廉及隅之首位(實少法多差一位如除法)視其末超幾位冗數從以進退而其首位之相差懸殊不問也(如有實三百七十五萬負方廉六萬長廉二百隅二俱正則以方步實齊實及方之首位列之)

그림(7)[72]



개방의 법칙은 상수를 실수의 위에 놓고 상수로서 우법수와 곱하고 연이어 곱하여 실수에 다다르는 법이다. 대종이 같은 이름(같은 부호)과 만난다는 것은 즉 더하여 정이면 정이 되고, 부이면 부가 된다는 것이다. 다른 이름(다른 부호)과 만난다는 것은, 즉 서로 감하여 남은 것이 정이면 정이 되고, 부이면 부가 된다는 것이다. 법수와 실수가 다른 이름이면 실수에서 법수를 감하는 것 즉 이것이 상이다. (일반적인 방법이다.)

혹은 법수가 많으면 바꾸어 감하는 것으로 환골이라 한다. 즉 번적이다.

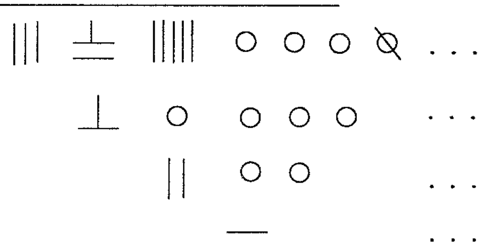
같은 이름이면 서로 더하는 것으로 투태라 한다. 즉 익적이다.[73]

환골 또는 투태라는 법은 반드시 바꿀 수 있으므로 평방에서 백승, 천승까지 이와 같이 한다.

그 자리를 나열하는 즉 그 다른 이름 (다른 부호)을 택하여 서로 보 할 수 있는 것은 보 한다. 보라는 것은 상으로 나누는 것이다.

위에는 실수를 아래에는 법수를 두어 법수로 실수를 보 하는 것이고 방염수와 장염수와 우법수로서 법수를 고찰하여 초과하면 나아가고 다른 수가 법수와 실수의 첫째자리를 지날 수 없음에 이르러서는 보 할 수 있게 된다.

---

72) 

: 負數 표시

73) 대종 같은 이름 : +a +b = +(a+b), -a-b = -(a+b)
다른 이름 : +a -b = +(a -b), a>b, +a -b = -(b-a), a<b

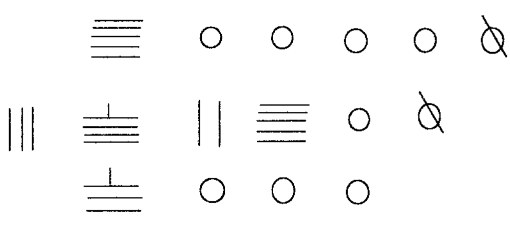
방으로 (즉 방염법수이다.) 실수를 보 하는 것은 실수와 방염법수의 첫째자리를 가지런히 하는 것이다. 염으로 (즉 장염법수이다.) 방염법수를 보 하는 것은 방염법수와 장염법수의 첫째자리를 가지런히 하는 것이다. 우법수로서 장염법수를 보 하는 것은 장염법수와 우법수의 첫째자리를 가지런히 하는 것이다. 실수가 작고 법수가 많으면 차를 한 자리로 하는 제법이다. 그 자리가 몇 자리를 초과하는 것을 보고 다른 수도 좇아서 나아가거나 물러서는 것이다. 그 첫째자리의 서로의 차가 뚜렷하게 다른 것은 문제 삼지 않는다.

가령 실수가 3백7십5만으로 부이고, 방염법수가 6만, 장염법수가 2백, 우법수가 2로서 모두 정이면 방염법수로 실수를 보 하는 것으로 실수와 방염법수의 첫째자리를 가지런히 하여 다음과 같이 나열한다.

(開立方得五十其方廉末位超實一位故長廉末位超方廉一位隅之末位超長廉一位而首位相差不問也如有實五十萬方廉三十九萬二千五百俱負長廉八千隅一俱正則以廉步方齊方及廉之首位列之)

개입방으로 5십을 얻고 그 방염법수의 끝자리가 실수보다 한자리 건너뛰므로 장염법수의 끝자리는 방염법수의 한자리를 건너뛰고, 우법수의 끝자리는 장염법수의 한자리를 건너뛰어 첫째자리의 서로의 차는 문제되지 않는다. 가령 실수가 5십만이고, 방염법수가 3십9만2천5백으로 모두 부이고, 장염법수가 8천이고 우법수는 1로서 모두 정이면 장염법수로 방염법수를 보하고, 방염법수와 장염법수의 첫째자리를 가지런히 하여 나열한다.[74]

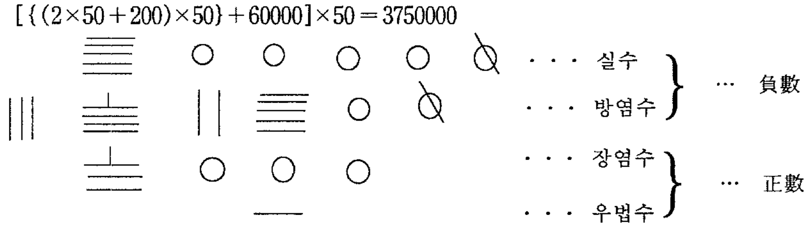
그림(8)[75]



(開立方得五十其長廉末位超方廉一位故方廉末位超實一位隅之末位超長廉一位而首位相差不問也如有實六千方廉三千一百八十五長廉三百九十二俱負隅一正則以隅步廉齊及隅之首位而列之)

74) $[\{(2\times50+200)\times50\}+60000]\times50=3750000$

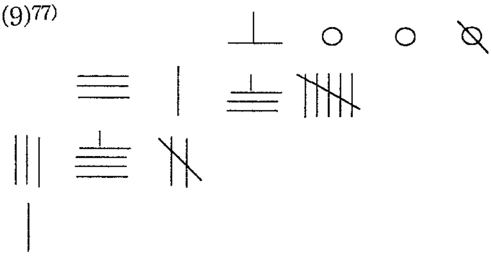
75)



개입방으로 5십을 얻고 그 장염법수의 끝자리는 방염법수의 한자리를 건너뛰므로 방염법수의 끝자리는 실수의 한자리를 건너뛰고 우법수의 끝자리는 장염법수의 한자리를 건너뛰는 것으로 첫째자리의 서로의 차는 문제가 되지 않는다.

가령 실수가 6천이고 방염법수가 3천1백8십5이고 장염법수가 3백9십2로서 모두 부이고, 우법수는 1로서 정이면 우법수로서 장염법수를 보하고 장염법수와 우법수의 첫째자리를 가지런히 하여 나열한다.[76]

그림(9)[77]



(開立方得四百其隅之末位超長廉二位故長廉末位超方廉二位方廉末位超實二位而首位相差不問也)有以廉步實者以隅步方者按平方法齊其首(實有千位而法當實之百位便是齊也更進則過實首位故也)亦視其末位冗數從而進退而首位不問也(如有實二千二百四十萬負方廉八千長廉八千隅十六俱正則法當以方步實而不進則法實不齊--進則廉過法之首位故以廉步實而按平方法再進則法大於實故一進列之)

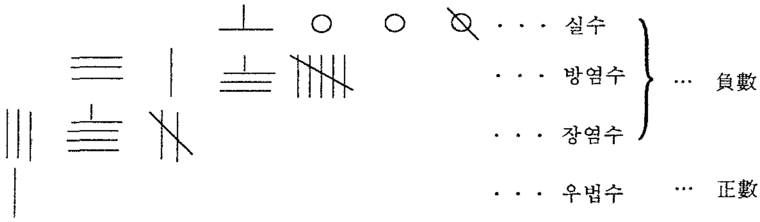
입방법으로 4백을 얻고 그 우법수의 끝자리가 장염법수의 두 자리를 건너뛰므로 장염법수의 끝자리는 방염법수의 두 자리를 건너뛰고 방염법수의 끝자리는 실수의 두 자리를 건너뛰는 것으로 첫째자리의 서로의 차는 문제가 되지 않는다. 장염법수로 실수를 보 하거나 우법수로서 방염법수를 보 하는 경우는 평방법을 고찰하여 그 첫째자리를 가지런히 하는 것이다. 실수가 천 자리에 있으면 법수는 실수의 백의 자리에 마땅하므로 곧 이것을 가지런하게 한다는 것이다. 다시 더 나아가면 실수의 첫째자리를 넘는 까닭이다. 역시 그 끝의 위치를 보고 다른 수가 따르므로 나아가고 물리는 것은 첫째자리와는 상관이 없다.

가령 실수가 2천2백4십만으로 부이고, 방염법수는 8천, 장염법수는 8천, 우법수는 16으로 모두 정이면, 법칙은 방염법수로 실수를 보 하는 것이 마땅하고, 나아가지 않으면 즉 법수와 실수가 가지런하지 않고 하나 나아간다. 즉 염법수는 법수의 첫째자리보다 넘으므로 염법수로서 실수를 보한다. 평방법으로 생각하여 법수는 다시 나아가는 즉 법수는 실수보다

---

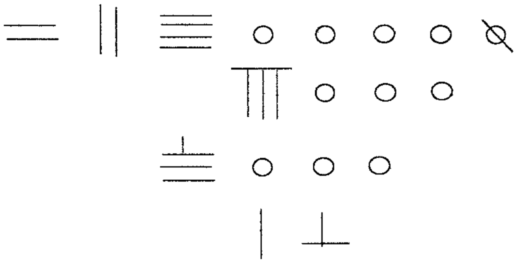
76) $\{(1\times 50+8000)\times 50-392500\}\times 50=500000$

77)



크므로 하나 나아가 나열한다.[78]

그림(10)[79]



(開立方得五十其長廉末位超實二位則方廉居其間故末位超實一位而退長廉一位隅之末位超長廉一位而首位相差不問也以隅步方者倣此)其商數則異名相步者爲正數同名相步者爲負數故初商變位訖覺商數過多(餘實及方廉隅同名者卽商數過多)則續商負數相減覺商數過少(餘實尙多者卽商數過少)則續商正數相加

입방법으로 풀어 5십을 얻고, 그 장염법수의 끝자리가 실수의 두 자리를 건너뛰므로 방염법수는 그 사이에 있으므로 끝의 자리는 실수의 한자리를 건너뛰므로 장염법수를 한자리 물리고 우법수의 끝자리는 장염법수의 한자리를 건너뛰며 첫째자리의 차는 있더라도 문제가 없다. 우법수로서 방염법수를 보 하는 것은 이와 비슷하다.

그 상수는 즉 다른 부호로 서로 보 하면 정수가 되고, 같은 부호로 서로 보 하면 부수가 되므로 초상수는 자리가 변하고 상수가 많다는 것을 깨닫게 된다.

나머지 실수 및 방염법수, 우법수가 같은 부호이면 상수가 많다. 계속하여 상수가 부수이고 서로 감하면 상수가 적다는 것을 깨닫게 된다.

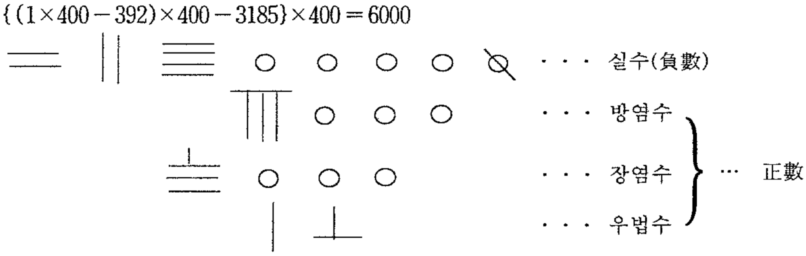
실수의 나머지가 항상 많다는 것은 즉 상수가 적다는 것이다. 즉 계속하여 상수가 정수이면 서로 더한다.

(如有實四十九萬八千四百五十六負方廉五萬正長廉六百負隅一正以廉步方飜積開得八十六而誤商九十則實餘十二萬九千四百五十六方廉餘三萬三千七百長廉餘三百三十俱負隅一正實方及廉同名而隅一異名無以相消故變容同減異加續商得負數四減於九十得八十六也誤商七十飜減則實餘四十萬四千五百四十四正方廉餘一萬九千三百長廉餘三百九十俱負隅一正足可商十故續商得正數十六加於七十得八十六也)

---

78) $\{(1\times400-392)\times400-3185\}\times400=6000$

79)



가령 실수가 4십9만8천5십6으로 부이고 방염법수는 5만으로 정이고 장염법수 6백은 부이고 우법수는 1로서 정이면, 장염법수로서 방염법수를 보하고 거꾸로 풀면 8십6을 얻는다. 잘못하여 상수를 9십이라 하면 실수는 12만9천4백5십6이 남고, 방염법수는 3만3천7백이 남고, 장염법수도 3백3십이 남아 모두 부이고 우법수는 1로서 정이고, 실수와 방염법수 및 장염법수까지 같은 부호(負)이고, 우법수 1은 다른 부호(正)이므로 서로 소(消)하면 없으므로 동감이가를 변용하여 계속해서 나누어 얻은 부수 4를 9십에서 감하여 8십6을 얻는다.

잘못하여 상을 7십이라 하면 바꾸어 감한 즉 실수는 남은 것이 4십만4천5백4십4로서 정이고, 방염법수는 남은 것이 1만9천3백이고, 장염법수는 남은 것이 3백9십으로 모두 부이고, 우법수는 1로서 정으로 족히 상 십이 되므로 계속해서 나누어 얻은 정수16을 7십에 더하면 8십6을 얻는다.

商數不易者無論初商次商以五約商(五爲中數便於進退故也)後進退之(如以前數約商五十飜減則實餘六十二萬六千五百四十四正方廉餘二千五百長廉餘四百五十俱負隅一正以廉步實續商得三十六加之得八十六也又如實九千四百三十八方廉一萬四千五百俱負長廉三百隅二俱正以廉步方益積開得三十九而約商五十飜減則實餘二十六萬五千五百六十二方廉餘三萬五百長廉餘六百隅二俱正覺商數過多故變容同減異加續商得十一減之得三十九也)

立方之例而平方及諸乘方可以類推也

상수가 바뀌지 않는다는 것은 초상, 차상을 막론하고 5로서 상수로 어림잡는다.

5는 중수이고 나아가고 물러섬에 있어 편리하기 때문이다. 후에 나아가고 물러선다.

가령 앞의 수로서 상수를 5십으로 어림잡아 거꾸로 감하면 즉 실수는 남은 것이 6십2만6천5백4십4로서 정이고, 방염법수는 남은 것이 2천5백이고, 장염법수는 남은 것이 4백5십으로 모두 부이고, 우법수는 1로서 정이면 장염법수로 실수를 보하여 계속해서 나누어 3십6을 얻게 되고 그것에 더하면 8십6을 얻게 된다.

또 가령 실수가 9천4백3십8이고, 방염법수가 1만4천5백으로 모두 부이고, 장염법수가 3백, 우법수가 2로서 모두 정이면 장염법수로 방염법수를 보 하여 익적으로 풀면 3십9를 얻게 된다. 어림잡아 상수를 5십으로 하여 거꾸로 감하면 실수의 남은 수는 2십6만5천5백6십2이고, 방염법수의 남은 수는 3만5백이고, 장염법수의 남은 수는 6백, 우법수는 2로서 모두 정이므로, 상수가 지나치게 많은 것을 알게 되므로 동감이가를 변용하여 계속해서 나누어 11를 얻게 되어 그것에서 감하면 3십9를 얻게 된다.

이것 모두 입방의 예이나 평방에서부터 여러 승방까지도 이와 같이 유추할 수 있다.

7. 맺음글

본 내용에서 개평방법(開平方法), 대종평방법(帶縱平方法), 개입방법(開立方法), 대종입방법(帶縱立方法), 제승방법(諸乘方法)에 대해 연구하였다. 개평방법과 대종평방법은 면적에서의 길이와 너비를 구하는 법이고, 개입방법과 대종입방법은 정방체, 장방체 및 편방체의 체적에서의 길이, 너비 및 높이를 구하는 법이다. 나아가 제승방적에서 한 변을 구하는 과

정을 보였다.

1. 면적문제

(1) 개평방법에 의해 정사각형 면적에서 각 변을 구하는 데에 자승을 이용한다.
(2) 대종평방법에 의해 직사각형 면적에서 구할 때, 면적과 교수 또는 화수에서 아래와 같이 길이와 너비를 구한다.
① 교수대종법(較數帶縱法)으로서 먼저 너비를 구하고 교수로써 길이를 구한다.
② 감종대종법(減縱帶縱法)으로서 먼저 길이를 구하고 길이에서 교수를 감하여 너비를 구한다.
③ 길이를 a, 너비를 b라 할 때 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ 로부터 $a=\frac{화수+교수}{2}$, $b=\frac{화수-교수}{2}$ 을 얻는다.
④ 익적평방법(益積平方法)으로서 면적과 교수로부터 평방법으로 풀어 얻는다.
⑤ 화수대종법(和數帶縱法)으로서 면적과 화수를 이용하여 상(商, 몫)을 너비로 하고 화수에서 상을 감하면 길이가 된다.
⑥ 번적평방법(飜積平方法)으로서 화수와 초상수를 찾아 초상수로 한 면적이 주어진 면적(실수)보다 클 경우 거꾸로 감하여 (번감) 차상실로 삼아 차상수를 구하고 이 차상수와 초상수의 합이 곧 길이가 되고 화수를 사용하여 너비를 구한다.

2. 체적문제

입방은 면과 면이 서로 같은 정방체이고 변으로서 체적을 구하려면 자승과 재승을 하고 개입방(세제곱근 구하는 법)한다. 정방체의 체적이 주어졌을 때 이 체적을 실수(실수 또는 차상실)로 두고 방염법수, 장염법수, 우법수로써 계산하여 한 변을 구하게 되며 장방체 또는 편방체의 체적에서 길이, 너비 및 높이를 대종입방법으로 구하는데, 첫째 두 변의 길이가 같을 경우, 두 번째로 세 변의 길이가 모두 다른 경우에 대해 각각 한 변을 구한다. 또 변으로써 체적을 구하는 것은 길이, 너비 및 높이를 연이어 곱하면 되고, 체적으로써 변을 구할 때는 그들의 교수와 화수를 감안하여 입방법으로 푼다. 여기서 두 변의 길이가 같을 경우 체적을 a^2b 라 둘 때, $a<b$ 일 때 장방체의 부피이고, $a>b$ 일 때는 편방체의 부피이다.

대종입방법으로 장방체의 부피로부터 다음과 같이 세 변의 길이를 구한다.

(1) 너비와 높이의 길이가 같고, 길이와의 각각의 교수가 주어졌을 경우에는 교수대일종입방법으로써 주어진 장방체의 체적이 정방체의 체적과 교수를 곱한 편방체의 체적의 합이므로 교수로 각 변을 구한다.
(2) 높이와의 각각의 교수가 주어졌을 경우(세 변의 길이가 모두 다를 경우)는 교수대양종법으로써 주어진 장방체의 체적이 정방체의 체적과 길이와 너비의 화수를 곱한 편방체의 체적과 세 변 길이를 곱한 장방체의 합이 되므로 이감동가(異減同加)의 개방법으로 양교수를 이용하여 각각을 구한다.
(3) 길이와의 각각의 화수가 같을 경우(너비와 높이가 같을 경우)에는 화수대양종상동법으

로 주어진 장방체의 체적이 나머지 한 변으로 된 정방체의 체적과 두 화수의 負數를 곱한 평방체의 체적과 두 화수의 곱과 나머지 한 변의 길이의 곱으로 된 장방체의 체적의 합이므로 이감동가법으로 번적하여 두 화수로써 각각의 변의 길이를 구한다.

(4) 높이와 각각의 화수가 같을 경우 (세 변의 길이가 모두 다른 경우)에는 화수대양종부동법으로 두 화수가 다른 경우로 이것도 (3)의 방법으로 구한다.

또한, 편방체의 체적에서도 세 변의 길이를 구하는 방법은 교수대양종법을 사용하는데 이 또한 입방법과 서로 같다.

3. 제승방의 문제

제승방법은 평방은 면적이고 입방은 체적이므로 그 이상에는 그 형태는 알 수 없다.

평방: a^2 = 자승적 = 평방의 법 2층

입방: $a^3 = a^2 \times a$ = 재승적 = 입방의 법 3층

3승방: $a^4 = a^3 \times a$ = 3승적 = 3승적의 법 4층

4승방: $a^5 = a^4 \times a$ = 4승적 = 4승방의 법 5층

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

한편, 대개(代開)를 통하여 3승방 a^4은 $(a^2)^2$으로 평방적의 자승수, 5승방은 a^6은 $(a^3)^2$으로 입방적의 자승, 8승방은 a^9은 $(a^3)^3$으로 입방적의 재승수 등으로 나타낼 수 있다.

(1) 본문의 내용에서 3승방적의 변을 구하기 위해서 그 적(積)을 실수로 하고 1을 우법수로 삼아 개평방하여 얻은 수를 또 실수로 하고 1을 우법수로 하여 얻은 수가 한 변이 되는데 이때 우법수는 장염법수, 평방염법수, 입방염법수로써 다음과 같이 배열한다.

입방염수	
평방염수	
장염수	
우법수	실수

종3승염수	
종입방염수	
종평방염수	
종장염수	
우법수	실수

(2) 본문의 문제중 5승방적 2배, 3승방적 5배, 평방적 41배를 합한 수에 4승방적 3배, 입방적의 3배, 변수의 500을 감하면 남은 수가 5277216이면 한 변의 길이 a를 구하라에서 $(2a^6+5a^4+41a^2)-(3a^5+3a^3+500a)=5277216$의 a에 대한 6차 방정식이 되는데 정수(正數, +), 부수(負數, -)를 감안하여 위 (1)에서의 우법수를 순서대로 배열하여 각각을 구하면 초상, 차상을 얻게 되어 그 합이 바로 한 변의 길이가 된다.

(3) 일반적으로 개방의 법칙은 상수를 실수 위에 놓고 상수로써 우법수를 곱하고 연이어 곱하여 실수에 다다르는 법으로 같은 부호끼리 더하여 정수이면 정수이고, 부수이면 부수가 된다. 법수와 실수가 다른 부호이면 실수에서 법수를 감하면 상(商, 몫)이 된다. 이때에 법수가 실수보다 많을 때 환골(번적)이라 하고, 또 법수와 실수가 같은 부호이면 서로 더한 것으로 투태(익적)이라 한다. 즉,

$$\left.\begin{matrix} +a+b=+(a+b) \\ -a-b=-(a+b) \end{matrix}\right\}\text{투태},\qquad \left.\begin{matrix} +a-b=+(a-b)(a>b) \\ +a-b=-(b-a)(a<b) \end{matrix}\right\}\text{환골}.$$

따라서 평방에서 백승, 천승까지 환골(換骨) 또는 투태(投胎)로 바꿀 수 있다.

산목(算木)의 배열에서 한 예로서 그림 7, 8, 9, 10과 같이 실수, 방염법수, 장염법수, 우법수를 正數 또는 負數로 하여 자리를 가지런히 놓아 개입방하여 얻은 수 a와 함께 실수＝우법수$\times a^3\pm$장염법수$\times a^2\pm$방염법수$\times a$로 나타낼 수 있다.

참고문헌

1. 김동기, 한국수학사(한국문화사대계 6권), 고려대학교출판부, 1982.
2. 김용운, 김용국 공저, 한국수학사, 열화당, 1982.
3. 김용운, 김용국 공저, 동양의 과학과 사상, 일지사, 1984.
4. 김용운, 김용국 공저, 중국수학사, 민음사, 1996.
5. 박한식, 한국수학교육사, 대한교과서주식회사, 1990.
6. 야유부시 기요시 저, 박세희 역, 중국의 수학, 현대과학신서, 1976.
7. 유휘 엮음, 김혜경, 윤주영 옮김, 구장산술, 서해문집, 1998.
8. 전상운, 과학기술사, 정음사, 1994.
9. 정지호, 고려 조선시대의 수학과 사회, 한국수학교육학회지, <수학교육> 1986.1. 제24권, 제2호.
10. 정지호, 한자문화가 한국수학교육이 미친 영향, 한국수학교육학회지 시리즈A, <수학교육>, 1995. 6. 제34권, 제1호.
11. 최길남, 박영식, 산학정의 (上-1)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학논문집 제9권 제2호, 2000.2.
12. 최길남, 박영식, 산학정의 (上-2)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학논문집 제10권 제1호, 2000.8.
13. 최삼룡, 윤원호, 최전승, 김기현, 하우봉 공저, 이재 황윤석, 민음사, 1994.
14. 최석정 저, 한국과학사학회 편저, 구수략, 성심여자대학교출판부, 1983.