UIT Report Vol. 15. No. 2. pp. 277~286. 1984　　연구논문집 제15권 제 2 호 pp. 277~286. 1984

準解析的인 方法에 依한 直四角形 平板의 挫屈解析

함 원 국
조선공학과
(1984. 4. 30 접수)

〈요 약〉

本 論文은 Mindlin 平板理論을 使用, Ritz 法을 應用한 準 解析的인 方法으로 單純支持된 面內荷重을 받는 平板挫屈에 對한 것이다.

一般的으로 比較的 두꺼운 平板에 對하여는 Mindlin 平板 理論은 古典的인 板理論을 使用하여 얻어진 값들 보다 낮은 挫屈荷重係數를 갖는 것을 알 수 있다.

Buckling analysis of rectangular plates by semi-analytical method

Ham, Won Kuk
Dept. of Naval Architecture & Shipbuilding
(Received April 30, 1984)

〈Abstract〉

In this paper, the buckling analysis of moderately thick plates is considered by semi-analy tical method based on Ritz method, using a mindlin's plate theory.

Compared with a wide variety of published results, for both thin and moderately thick plates, excellent accuracy is obtained. Especially compared to the well known' method; such as finite element method, the present method is very effective in computing time for buckling analysis of a rectangular plate subjected to uniaxial or biaxial load with all edges simply supported.

In general, it is found that for moderately thick plates, Mindlin's plate theory gives lower buckling loads than those obtaned using classical thin plate theory.

I. 緖 言

平板의 挫屈解析 問題는 그 重要性이 널리 認識되어 많은 硏究者들에 依하여 古典的인 解析方法 또는 電子計算機의 發達로 有限要素法 等의 數値解析法으로 다루어져 왔다. 特히 有限要素法은 複雜한 構造와 一般的인 荷重條件과 境界條件을 갖는 挫屈問題에 가장 一般的인 方法이긴 하나 프로그램의 대형화, 資料의 準備와 結果値의 解析에도 많은 時間과 努力이 必要하다.

本 論文에서는 이같은 點을 認識하여 平板의 挫屈問題를 有限要素法의 結果보다 解析精度가 더 높고 計算時間이 덜 소요되는 準 解析的인 方法을 使用하였다.

먼저 平板全體의 거동과 境界條件을 滿足하는 變位函數를 假定하므로 Ritz 의 방법을 應用하였고 Mindlin 平板理論을 導入하므로 板의 剪斷効果를 考慮하였다.

本 論文에서는 얇은 板으로부터 두께가 비교적 두꺼운 平板에 이르기까지 縱橫比(aspect ratio)를 變化시켜가며 一軸 壓縮荷重과 二軸 壓縮荷重에 對한

挫屈解析을 수행 하였다.

얇은 板의 境遇는 文獻[1,2,3]에서 解析한 結果와 잘 一致하여 比較的 두꺼운 平板에 對하여서는 文獻[4,5]의 E. Hinton 이 解析한 結果値와도 滿足한 一致를 나타내었다.

Ⅱ. 直四角形 平板의 挫屈解析

1. 概　　要

船體의 構造를 形成하는 대부분의 平板은 다른 數値에 比하여 板두께는 대단히 작은 수치이므로 二次元的으로 解析하여도 무방하다.

Fig. 1. 에서와 같이 二軸荷重과 剪斷荷重을 同時에 받는 두께가 比較的 두꺼운 平板의 挫屈變形에너지를 考察하고 이것을 最少 포텐셜 에너지 原理를 使用하여 準解析的인 方法으로 定式化하여 挫屈解析을 하였다.

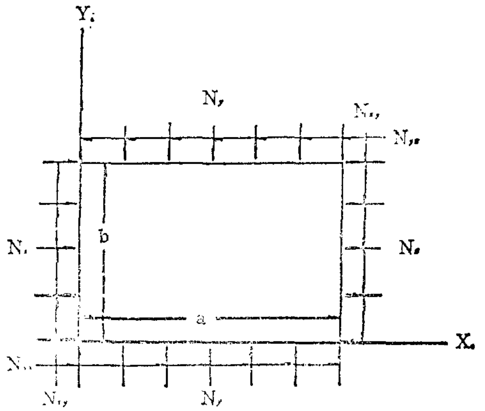


Fig. 1. Inplane Loads

여기서 N_x, N_y, N_{xy}, 및 N_{yx}는 길의 單位로 平板의 單位 길이당 應力을 나타내며 $N_x=\sigma_x \cdot t$, t는 平板의 두께를 나타낸다.

2. 假　　定

두께가 비교적 두꺼운 平板의 二次元解析을 爲하여는 아래와 같은 假定이 必要하다.

◦ 平板의 材料는 完全 彈性體로서 等方性이며 Hooke의 法則이 適用된다.

◦ 平板의 中立面에 對한 伸張은 無視하고 힘에 依한 變位만을 考慮한다.

◦ 平板의 두께 方向으로의 伸張은 無視하며 變形은 板두께에 比하여 작은 것으로 한다.

◦ 挫屈時 初期變形은 없는 것으로 한다.

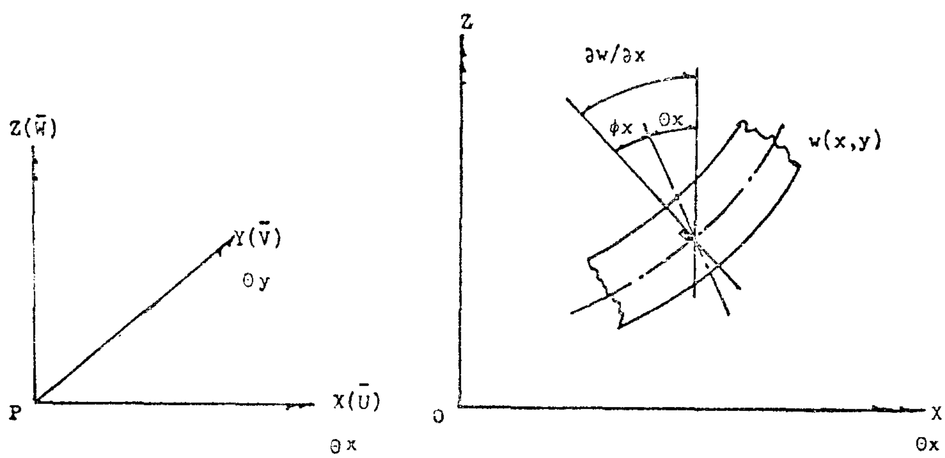
3. 變形度와 應力成分

Fig. 2(a)에서와 같이 座標를 設定하면 平板內의 임의점 $P(x, y, z)$에서의 x, y, z 方向의 變位 u, v, w는 中立面의 變位 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$와 中立面의 垂線의 回轉角 θ_x, θ_y로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
u &= \bar{u}(x, y, z) + u_b(x, y) \\
v &= \bar{v}(x, y) + v_b(x, y) \qquad (2.1) \\
w &= \bar{w}(x, y) + w(x, y)
\end{aligned}
$$

2-2절의 假定에 따라 式(2.1)은 아래와 같이 된다.

$$u = -Z \cdot \theta_x(x, y) = -Z \cdot \theta_x$$



(a) Midplane deformation　　(b) Rotation of Cross Section on X-Z Plane

Fig. 2. Deformation

$$v=-Z\cdot\theta_y(x,y)=-Z\cdot\theta_y \tag{2.2}$$
$$w=w(x,y)=w$$

Fig. 2(b)에서 θ_x는 휨에 依한 中立面에 垂直한 斷面의 回轉角이며 ϕ_x는 剪斷變形에 依한 變形角이다. 또한 $\partial w/\partial x$는 임의 點 $P(x,y,z)$에서의 기울기로 θ_x에 ϕ_x를 加한 값이다.

式 (2.2)의 變位成分 u, v, w로부터 微少變形 理論을 適用하여 變形度 成分을 求하면 아래와 같다.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=-Z\frac{\partial\theta_x}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=-Z\frac{\partial\theta_y}{\partial y}$$
$$\varepsilon_z=0 \tag{2.3}$$
$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{Z}{2}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\right)$$
$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\right)$$

그런데 等方性 平板에서는 應力—變形度 關係式은 다음과 같다.

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)$$
$$\tau_{xy}=2G\varepsilon_{xy}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy} \tag{2.4}$$
$$\tau_{xz}=2G\varepsilon_{xz}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xz}$$
$$\tau_{yz}=2G\varepsilon_{yz}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yz}$$

여기서 E, G는 彈性係數이며 ν는 포아송 比이다.

4. 平面 內荷重에 依한 變形 에너지

Fig. 1. 에서와 같이 直四角形 平板에 平面 內荷重이 加해진 境遇, 彈性 限度內에서 平板에 저장되는 變形에너지는 아래 式과 같이 된다.

$$U=\frac{1}{2}\int_v[\sigma_x\cdot\varepsilon_x+\sigma_y\cdot\varepsilon_y-2\tau_{xy}\cdot\varepsilon_{xy} \tag{2.5}$$
$$+2\tau_{xz}\cdot\varepsilon_{xz}+2\tau_{yz}\cdot\varepsilon_{yz}]dv$$

式 (2.5)의 應力成分을 식 (2.3)과 (2.4)를 使用하여 變位成分으로 置換하고, 軸方向에 對하여 積分을 遂行하면 變形에너지는 다음 式과 같이된다.

$$U=\frac{1}{2}\int_A\left[\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left\{\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.+2\nu\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right\}$$
$$+\frac{Et^3}{24(1+\nu)}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{Et}{2(1+\nu)}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\right)^2\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\right)^2\right\}\right]dxdy \tag{2.6}$$

위 式에서 剛性係數 D, S를 導入하면 아래와 같다.

$$U=\frac{1}{2}\int_A\left[D\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2+D\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2\right.$$
$$+2\nu D\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta_y}{\partial y}$$
$$+\frac{1-\nu}{2}\cdot D\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2$$
$$\left.+S\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\right)^2+S\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\right)^2\right]dxdy \tag{2.6}$$

여기서 $D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$S=\alpha Gt=\frac{Et}{2.4(1-\nu)}$$
$$\alpha=5/6$$

Fig. 2(b)에서와 같이 α는 假定된 平均剪斷應力의 變形度 ϕ_x, ϕ_y에 對한 剪斷應力의 比로써 等方性平板의 境遇는 一般的으로 $\alpha=5/6$을 使用한다.

또한 Fig. 3에서와 같이 平板 內荷重 N_x, N_y, N_{xy}에 依한 포텐셜 에너지는 아래와 같이 誘導할 수 있다.

荷重 N_x가 임의 帶板에 作用할 때 포텐셜 에너지 dv_x는 아래와 같다.

$$dv_x=-N_x dy\left[\frac{1}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

그러므로

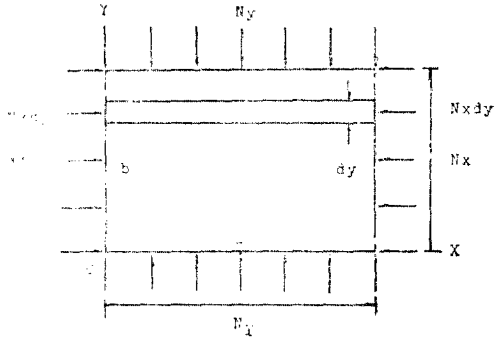


Fig. 3. Inplane loads

$$V_x=-\int_0^b\frac{N_x}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dxdy$$

같은 方法으로 面內力 N_x, N_y, N_{xy}에 依한 포텐셜 에너지 V는 다음과 같다.

$$V=-\frac{1}{2}\int_A\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)+2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right]dxdy \qquad (2.7)$$

따라서 式(2.6)와 (2.7)을 加하여 平板 全體의 포텐셜 에너지 Π를 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\Pi&=U+V\\&=\frac{1}{2}\int_A\left[D\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2+D\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2\right.\\&\quad+2\nu D\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\\&\quad+\frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2\\&\quad\left.+S\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\right)^2+S\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\right)^2\right]dxdy\\&\quad-\frac{1}{2}\int_A\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right.\\&\quad\left.+2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right]dxdy\end{aligned} \qquad (2.8)$$

5. Ritz 法에 依한 挫屈方程式의 誘導

(1) 變形度—變位 關係式

Fig. 2(b)에서 알 수 있는 바와 같이

$\frac{\partial w}{\partial x}=\theta_x+\phi_x$ 이므로 $\phi_x=\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x$, 같은 方法으로 $\phi_y=\frac{\partial w}{\partial y}-\theta y$ 이다.

따라서 線形 剪斷 變形度 $\{\varepsilon_s\}$는 아래와 같다.

$$\{\varepsilon_s\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\\ \frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix} \qquad (2.9a)$$

휨으로 因한 變形度 $\{\varepsilon_b\}$

$$\{\varepsilon_b\}=\begin{Bmatrix}\chi_x\\ \chi_y\\ \chi_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\\ -\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\\ -\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\end{Bmatrix} \qquad (2.9b)$$

그러므로 平板의 剪斷 變形을 考慮한 變形度 $\{\varepsilon\}$는 다음과 같다.

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\chi_x\\ \chi_y\\ \chi_{yx}\\ \cdots\\ \phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\\ -\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\\ -\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\\ -\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\\ \frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\end{Bmatrix} \qquad (2.9c)$$

(2) 應力—變形度 關係式

$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$ 이므로

$$=\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\\ \cdots\\ S_x\\ S_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_b & O\\ \cdots & \cdots\\ O & D_s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_x\\ \chi_y\\ \chi_{xy}\\ \cdots\\ \phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix} \qquad (2.10)$$

위식에서 D_b와 D_s는 剛性係數로서 아래와 같은 값을 갖는다.

$$[D_b]=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$$

$$=D\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$$

$$[D_s]=\frac{Et}{2.4(1+\nu)}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=S\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

(3) 平板 全體의 포텐셜 에너지 Π

平板에 저장된 變形에너지를 U 라하면 다음과 같다

$$U=\frac{1}{2}\int_A\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dA \qquad (2.11a)$$

平板 內荷重 N_x, N_y, N_{xy}에 依한 포텐셜 에너지를 V 라 하면

$$\begin{aligned}V&=-\frac{1}{2}\int_A\{G\}^T\begin{bmatrix}N_x & N_{xy}\\ N_{xy} & N_y\end{bmatrix}\{G\}dA\\&=-\frac{1}{2}{}_A\{G\}^T[S_0]\{G\}dA\end{aligned} \qquad (2.11b)$$

여기서

$$\{G\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix} \quad [S_0]=\begin{bmatrix}N_x & N_{xy}\\ N_{xy} & N_y\end{bmatrix}$$ 이다.

따라서

$$\Pi=U+V$$

$$=\frac{1}{2}\int_A\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dA-\frac{1}{2}\int_A\{G\}^T[S_0]\{G\}dA \tag{2.11c}$$

(4) 變位函數의 假定

從來의 挫屈解析에서는 Kirchhoff 平板理論을 適用하여 中立面의 처짐 變位 w에 對한境界條件을 滿足하는 函數만을 선정하여 使用하였다.

本 論文에서는 Mindlin 平板理論을 適用하였고 中立面의 처짐 變位 w와 回轉變位 θ_x, θ_y에 對한 境界條件을 滿足하는 函數를 獨立的으로 選定하여 剪斷變形의 영향을 考慮한 挫屈解析을 하였다.

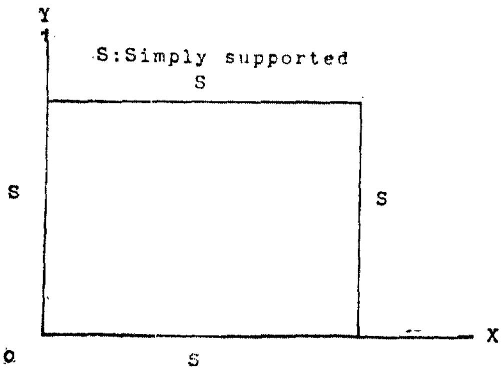


Fig. 4. Boundary Condition

Fig. 4에서와 같이 처짐 w일때 아래 境界條件을 滿足해야 한다.

$x=0, a$ 일때 $w=\partial^2w/\partial x^2=0$

$y=0, a$ 일때 $w=\partial^2w/\partial y^2=0$

같은 方法으로 回轉角 θ_x, θ_y도 아래 境界條件을 滿足해야 한다.

$x=0, a$ 일때 $\theta_y=0$

$y=0, a$ 일때 $\theta_x=0$

그러므로 위의 條件들을 滿足하는 變位函數를 아래와 같이 獨立的으로 假定한다.

$$w=W_{nm}\ \sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\theta_x=\Theta_{xmn}\ \cos\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\theta_y=\Theta_{ymn}\ \sin\frac{m\pi x}{a}\ \cos\frac{n\pi y}{b} \tag{2.12}$$

여기서 W_{mn}, Θ_{xmn}, Θ_{ymn}은 각각 w, θ_x, θ_y의 未知係數, 즉 Ritz coef.이고 m, n은 挫屈 모우드의 半週期의 數를 나타낸다.

(5) 變形度—未知係數 關係式

위 (2.12)식을 이용하여 (2.9c)식의 變形度 $\{\varepsilon\}$와 (2.11b)식의 行列 $\{G\}$를 나타내면 아래와 같은 式을 얻는다.

$$\{\varepsilon_b\}=\begin{Bmatrix}\chi_x\\ \chi_y\\ \chi_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial\theta_x}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial\theta_y}{\partial y}\\ -\left(\dfrac{\partial\theta_x}{\partial y}+\dfrac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\Theta_{xmn}\dfrac{m\pi}{a}\ \sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b}\\ \Theta_{ymn}\dfrac{n\pi}{b}\ \sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b}\\ -\left(\Theta_{xmn}\dfrac{n\pi}{b}\ \cos\dfrac{m\pi x}{a}\ \cos\dfrac{n\pi y}{b}+\Theta_{ymn}\dfrac{m\pi}{n}\ \cos\dfrac{m\pi}{a}\ \cos\dfrac{m\pi y}{b}\right)\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{m\pi}{a}\ \sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b} & 0\\ 0 & \dfrac{n\pi}{b}\ \sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b}\\ -\dfrac{n\pi}{b}\ \cos\dfrac{m\pi x}{a}\ \cos\dfrac{n\pi y}{b} & -\dfrac{m\pi}{a}\ \cos\dfrac{m\pi x}{a}\ \cos\dfrac{n\pi y}{b}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Theta_{xmn}\\ \Theta_{ymn}\end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon_s\}=\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}W_{mn}\dfrac{m\pi}{a}\ \cos\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b}-\Theta_{xmn}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b}\\ W_{mn}\dfrac{n\pi}{b}\ \sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \cos\dfrac{n\pi y}{b}-\Theta_{ymn}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \cos\dfrac{n\pi y}{b}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{m\pi}{a}\ \cos\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b} & -\cos\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b} & 0\\ \dfrac{n\pi}{b}\ \sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \cos\dfrac{n\pi y}{b} & 0 & -\sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \cos\dfrac{n\pi y}{b}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}W_{mn}\\ \Theta_{xmn}\\ \Theta_{ymn}\end{Bmatrix}$$

그러므로, $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_b\}+\{\varepsilon_s\}$이므로

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_b\\ \varepsilon_s\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ 0 & -\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} & -\frac{mn}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \\ \hline \frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} & -\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} & 0 \\ \frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} & 0 & -\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{ny\pi}{b} \end{array}\right]\begin{Bmatrix}W_{mn}\\ \Theta_{xmn}\\ \Theta_{ymn}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}B_b\\ B_s\end{bmatrix}\{\delta\}=[B]\{\delta\} \qquad (2.13a)$$

같은 방법으로 式 (2.11b)의 行列 $\{G\}$는

$$\{G\}=\begin{Bmatrix}-\frac{\partial w}{\partial x}\\ -\frac{\partial w}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}W_{mn}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\ W_{mn}\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\ \frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\end{bmatrix}\{W_{mn}\}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} & 0 & 0\\ \frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}W_{mn}\\ \Theta_{xmn}\\ \Theta_{ymn}\end{Bmatrix}=[C]\{\delta\} \qquad (2.13b)$$

(6) 固有値 方程式의 構成

平板 全體의 포텐셜 에너지를 Π, 平板 內荷重에 依한 變形 에너지를 U 그리고 平板의 포텐셜 에너지를 V라 하면 Π는 아래와 같다.

$$\Pi=U+V$$

$$=\frac{1}{2}\int_A\{\delta\}^T\{\varepsilon\}dA-\frac{1}{2}\int_A\{G\}^T[S_0]\{G\}dA$$

$$=\frac{1}{2}\int_A\{\varepsilon\}^T[D]^T\{\varepsilon\}dA$$

$$-\frac{1}{2}\int_A\{G\}^T[S_0]\{G\}dA$$

$$=\frac{1}{2}\int_A\{\delta\}^T[B]^T[D][B]\{\delta\}dA$$

$$-\frac{1}{2}\int_A\{\delta\}^T[C]^T[S_0][C]\{\delta\}dA$$

$$=\frac{1}{2}\{\delta\}^T\Big(\int_A[B]^T[D][B]dA$$

$$-\int_A[C]^T[S_0][C]dA\Big)\{\delta\} \qquad (2.14a)$$

最少 에너지 原理에 따라 中立平衡을 取하면

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\delta}=\Big(\int_A[B]^T[D][B]dA$$

$$-\int_A[C]^T[S_0][C]dA\Big)\{\delta\}=0$$

여기서

$$\int_A[B]^T[D][B]dA=[K]$$

$\int_A[C]^T[S_0][C]dA=[K_G]'$라 두면

$$([K]-[K_G]')\{\delta\}=0$$

그런데 荷重 係數 λ를 導入하여 $N_x=\lambda N_{x0}$, $N_y=\lambda N_{y0}$, $N_{xy}=\lambda N_{xy0}$라 하면

$$[S_0]=\lambda\begin{bmatrix}N_{x0} & N_{xy0}\\ N_{xy0} & N_{y0}\end{bmatrix}=\lambda[S]$$

$$([K]-\lambda[K_G])\{\delta\}=0 \qquad (2.14b)$$

即 (2.14b)式과 같은 固有値 方程式으로 귀착된다.

Ⅲ. 電算 프로그램과 解析例

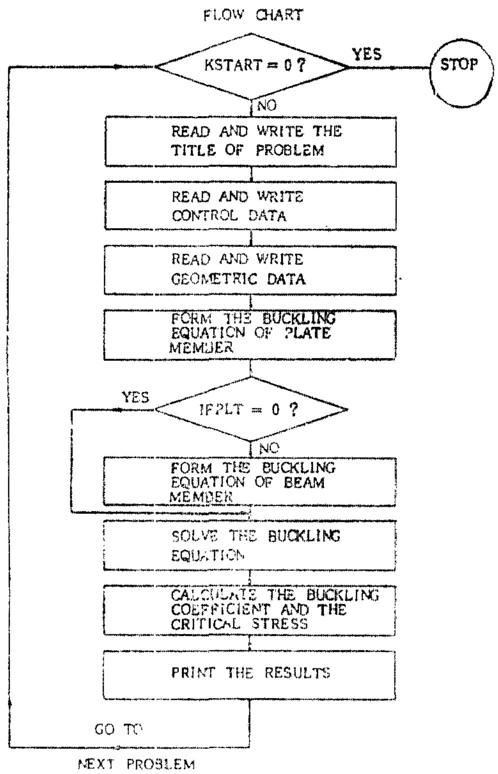
1. 電算 프로그램의 흐름도

아래와 같이 프로그램화 하여 計算하였다.

2. 解析例

(1) 解析精度의 比較

四邊 單純支持 狀態에서 폭 b=800mm이고, 종횡비(a/b)가 0.2에서 4.0까지, 그리고 平板의 두께 폭비(t/b)가 0.001에서 0.2가지 變하는 다양한 平



板의 一軸 壓縮 및 二軸 壓縮荷重하에서의 挫屈解析을 수행하여 挫屈係數의 最少値를 추정하였다.

本 研究方法의 解析精度를 確認하기 爲하여 一軸 및 二軸 壓縮荷重을 받는 경우에 對한 挫屈係數를 求하여 文獻 [1, 8, 9, 10]에서 解析한 結果와 比較하여 Table. 1에 나타내었다. Fig. 5와 Table 1은 本 研究 結果가 Timoshenko의 얇은 平板解와 잘 일치함을 보여준다.

Table 1 Buckling factors simply supported square plate

author	elements	uniaxial load	biaxial load	remark
K. K. Kapur & J. Hartz	16	3.770	—	
	64	3.993	—	
D. J. Allman	16	4.031	2.016	
	64	4.006	2.003	
P. D. C. Yang	4	3.9113	2.003	
	16	4.0244	—	
Present method	—	4.000	1.9996	b/t=800
		3.9965	1.9982	b/t=80
Timoshenko	—	4.000	2.000	

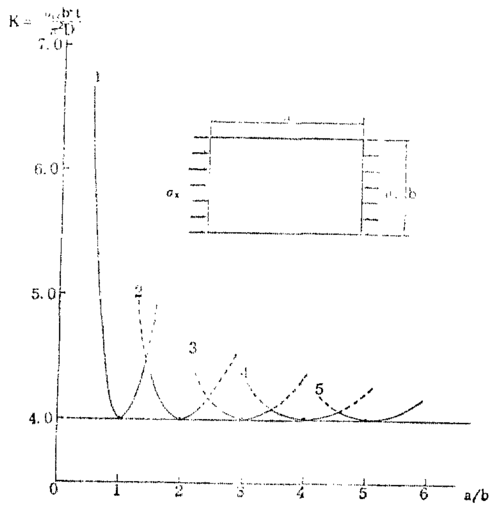


Fig. 5. Buckling curves for simply supported rectangular plates

(2) 一軸 壓縮荷重을 받는 平板

四邊單純 支持平板이 一軸 壓縮荷重을 받을 때 판 두께가 增加함에 따라 剪斷變形이 挫屈荷重에 미치는 영향을 조사하였다. Table 2.는 a/b=1.0 이고 t/b = 0.00125에서 0.20까지 變化할 때 挫屈係數의 變化를 나타낸다. Fig. 6과 Table 2.에서 알 수 있는 것은 三次元解 文獻 [13], Timoshenko의 얇은 板에 對한 解 文獻 [1], Rao에 依한 두꺼운 平板解 文獻 [7], 有限帶板法에 依한 解析値 文獻 [5] 사이에서 近似한 값을 나타내고 있다. 얇은 平板解析에서는 t/b의 增加에 따라 挫屈荷重係數가 實際 必要 以上으로 크게 됨을 알 수 있다. 또한 얇은 平板 解析에서는 挫屈係數의 最少値는 종횡비의 增加에 關係없이 a/b=1.0, 2.0, 3.0… 等 정수값에서 發生되었으나 板 두께의 增加에 따라 종횡비(a/b)의 값이 커질 수록 점차 正數値보다 작은 어떤 값에서 挫屈荷重 係數의 最少値가 發生됨을 Table 3.과 Fig. 7에서 보여준다.

(3) 二軸 壓縮荷重을 받는 平板

얇은 平板이 二軸 壓縮荷重을 받는 境遇, t/b가 각각 0.01과 0.1에 對하여 應力比(σ_y/σ_x)가 $-1.0 \leq \sigma_y/\sigma_x \leq 1.0$인 범위이고 종횡비가 0.2에서 5.0까지 變化할 때 挫屈 荷重係數를 求하였다. 그 結果를 文

Table 2. Buckling of Simply Supported Square plates under uniaxial loads

Reference Author	[13] Exact 3-D	[5] F.S.	Author	[7] F.E.M.	[10] P.D.C.Y.	[1] T.P.
t/b	K					
0.001	4.000	3.999	4.000	4.000	4.020	4.000
0.00125	—	—	4.000	—	—	4.000
0.050	3.000	3.929	3.944	3.944	3.889	4.000
0.100	3.741	3.737	3.787	3.787	3.787	4.000
0.150	—	—	3.550	—	—	4.000
0.200	3.150	3.126	3.236	3.263	—	4.000

Table 3. Lowest values of buckling factor

No	t/b a/b	K 0.9	 1.0	 1.9	 2.0	 2.9	 3.0
1	.00125		4.000		4.000		4.000
2	.00625		3.9991		3.9991		3.9991
3	.0205		3.9860		3.9860		3.9860
4	.0500		3.9440		3.9440		3.9440
5	.0750		3.8770		3.8770		3.8770
6	.1000		3.7865	3.7855		3.7837	
7	.1250		3.6761	3.6697		3.6699	
8	.1500	3.5423		3.5374		3.5370	

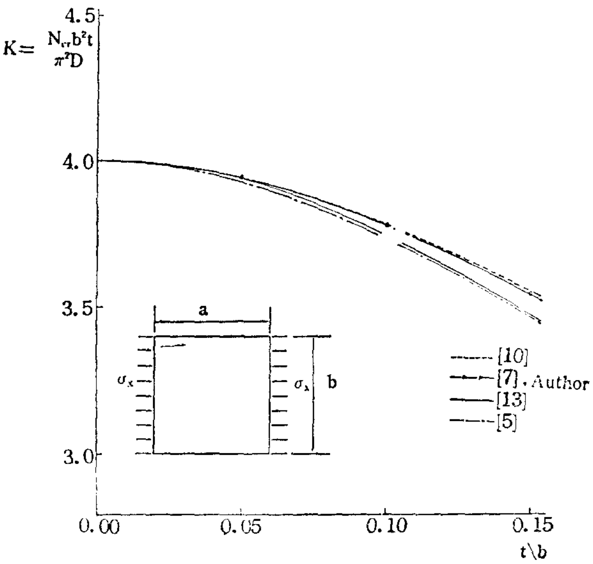


Fig. 6 Buckling Factors for considering sheer effect simply Supported Square plates of various thickness vs span ratio (a/b=1.0)

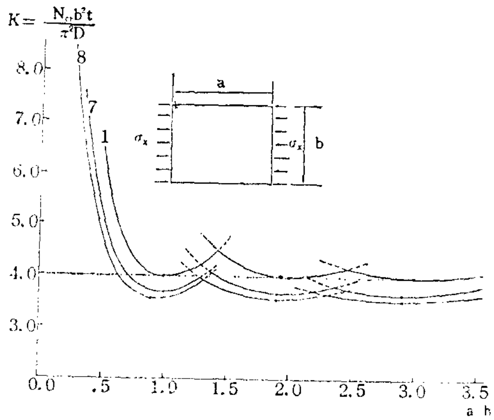


Fig. 7. Lowest values of buckling factors vs aspect ratio.

Table 4 Buckling of simply supported rectangular palte under biaxial load

Author		$\sigma_y/\sigma_x=1.0$				
	a/b	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
	t/b	K				
Exact Sol.	0.01	2.000	1.640	1.444	1.327	1.250
Finite Strip		1.999	1.639	1.444	1.326	1.250
Present method		1.999	1.639	1.444	1.326	1.250
Finite Strip	0.1	1.777	1.475	1.317	1.221	1.159
Present method		1.873	1.568	1.388	1.279	1.207

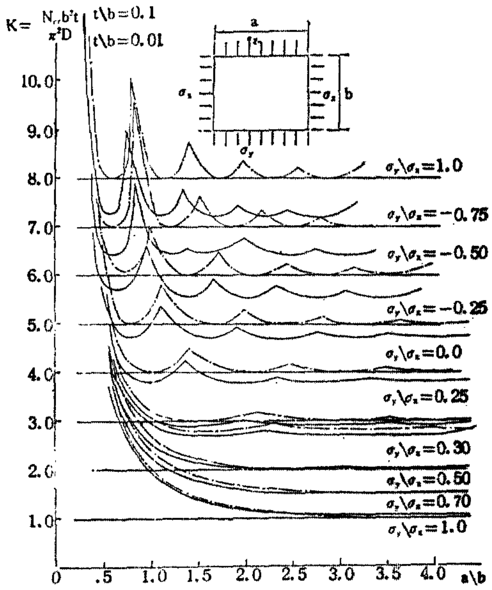


Fig. 8. Buckling factors for simply supported rectanglar plates under biaxial loads.

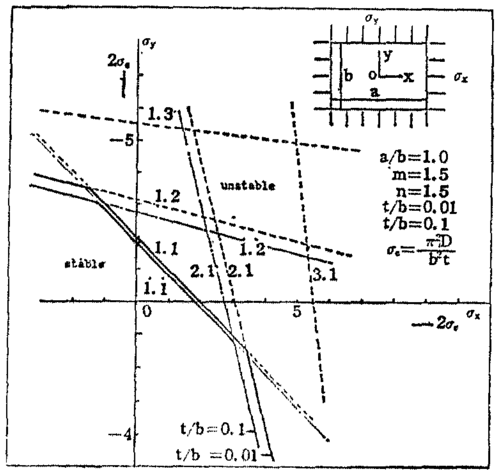


Fig. 9. Stability region for a simply supported plates subjected to longitudinal and transverse compression

獻[5,11,14]와 比較하여 Table 4와 Fig.8 9에 나타내었다. 이에서 알 수 있는바와 같이 二軸 壓縮時에도 本 論文의 解析 方法이 높은 精度를 나타낸다.

Table 5. Comparison of Computational effort

time used / method	CPU	I/O	CON	FEM: Present method
F. E. M	0 : 00 48 : 38	1 : 29 0 : 01	0 : 00 14 : 12	8.0×10⁴
Present method	0 : 00 0 : 57	0 : 02 0 : 03	0 : 00 0 : 07	1

3. 電算 時間의 比較

本 論文의 文法과 有限要素法의 境遇에 電算 時間을 比較한 結果 Table 5에서와 같이 經濟的인 側面에서 대단히 有利한 方法이라 생각된다.

IV. 結 言

本 論文에서는 比較的 두께가 두꺼운 等方性 平板의 挫屈解析을 Ritz의 方法을 適用하여 수행하

[illegible] 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 本 論文은 有限要素法 平板의 挫屈解析에 있어 板의 厚幅比(t/b)가 0.5이상의 매우 厚板에 대한 剪斷變形의 영향을 考慮할 수 있다.

(2) 本 論文의 平板 挫屈解析 結果와 다른 解析的인 解와의 比較結果 잘 맞으므로 다른 어떠한 方法보다는 經濟的인 側面에서 더욱더 有利한 方法임을 알 수 있다.

(3) 本 論文에서 使用한 프로그램은 直四角形平板에 대한 固有値 問題는 勿論 一部 變形하여 補剛된 平板의 固有値 問題에도 適用할 수 있다.

(4) 本 論文의 方法은 有限 要素法에 依한 解析으로 보다 넓은 범위의 制限的이긴 하나 더 擴張하여 보다 일반 條件에서 使用할 수 있는 프로그램으로의 研究가 必要하다.

參考文獻

[1] S.P. Timoshenko and J.M. Gere. "Theory of classic stability 2nd ed. McGraw-Hill Book ltd. 1961.

[2] Rudolph Sziland "Theory and analysis of plates" Prentice-Hall Inc. 1974.

[3] M.S. Troitsky "Stiffened plates bending, stability and vibration" Elsevier Scientific publishing Co., 1976.

[4] E. Hinton "A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problem" I.J.N.M.E. Vol. 10. 1976.

[5] E. Hinton "Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method" Computers and Structures Vol. 8, 1978.

[6] K.-J. Bathe and E.L. Wilson "Numerical method in finite element analysis" Prentice Hall Inc. 1976.

[7] G.V. Rao. J. Venkataraman and P.K. Raju "Stability of moderately thick rectangular plates using a high precision triangular element" Computers and structures Vol. 15, 1975.

[8] K.K. Kapur and B.J. Hartz "Stability of plates using the finite element method" ASCE. Engineering Mechanics Div. 1966.

[9] D.J. Allman "Calculation of the elastic buckling loads of thin flat reinforced-plates using triangular finite element" I.J.N.M.E. Vol. 9, 1975.

[10] 양박달치, "補剛板의 挫屈解析" 工學碩士 學位論文 서울大學校, 1981.

[11] 이재신, "船體構造力學" 初版, 財團法人 韓國海事問題研究所.

[12] 服部堅一 "船體 構造設計 における 挫屈基準" 住友重機械技報, Vol. 24, No. 72, 1976.

[13] S. Srinivas and A.K. Rao. "Buckling of thick rectangular plates" AIAA J. 7(8), 1645–1646(1969)

[14] Ir. H. Geertsema "Buckling analysis of ship plate-structures" Report No. 207s, Netherland ship research centre TNO, Delft, The Netherland.

後 記

本 論文의 作成中 모든 면에서 도움과 忠告를 주신 船工學科 教授 모든 분에게 感謝드리며 特히 프로그램 作成에 도움을 아끼어 주신 이주성 君에게 謝意를 표합니다.