

수직진동하중을 받는 궤도형 구조물의 거동

김성득 · 이대희*
지구환경시스템공학부

<요약>

철도궤도시스템은 레일과 침목, 도상, 보조도상 및 노반으로 구성되는데 이들 요소들은 다른 역학적 특성을 지니고 있어 그 역할과 거동양상이 서로 독특하며, 그 거동과 응력의 규명은 어려운 일이다.

본 연구에서는 철도궤도시스템을 궤도와 지반으로 단순화시킨 궤도형 구조물에 대한 동역학적 거동을 규명하기 위한 동적해석을 수행하였다. 수직진동하중 하에서의 적용될 하중진폭을 산정하기 위한 예비해석으로 대상지반의 극한지지력을 구하였으며, 다층의 궤도지반에 대한 변위함수와 진동수와의 관계를 밝혔다. 또한 궤도지반의 공진진동수와 실제 궤도지반에서 측정되는 진동수 범위의 수직진동하중 하에서 동적응답과 도상타입의 변화가 동적해석 시 각각 지지력 변화에 미치는 영향을 알아보기 위하여 FLAC을 이용한 수치해석이 수행되었다.

Behavior of Track-Type-Structure under Vertical Vibrated Loads

Sung-Deuk Kim · Dae-Hee Lee^{*1)}
School of Geo-Environmental System

<Abstract>

In general the rail-tie-soil system is composed rail, tie, ballast, subballast and subgrade, because of this elements have different dynamic peculiarity, the roles and the

* 울산대학교 대학원 공학석사과정 수료

movements are peculiar, then the examine of movements and stresses is very difficult.

On study the dynamic analysis were worked for examine dynamical movements about the rail-tie-soil system which is simplified rail and soil medium. The ultimate bearing capacity of the subject soil medium was worked preparation explanation for estimate force amplitude. Under the vertical vibrated loads which is in the natural frequency and another frequency ranges the dynamic response of soil medium and the effects of the various features associated with the ballast type was worked.

1. 서론

궤도형 구조물에 작용하는 하중은 레일을 통하여 재하되기 때문에 도로 노반과는 달린 동일한 지점에 반복적으로 작용한다. 또한 열차가 선로 위를 주행하면, 선로 및 선로구조물에는 철도차량의 자중 이외에 열차의 주행과 레일의 단차 및 틀림 등에 의해 불규칙한 동적인 힘이 발생한다. 이러한 동적인 힘이 설계에 반영되더라도 실제의 거동은 이론에 의해 예측된 것에 비해 복잡한 문제점을 가지고 있다. 이러한 이유로 진동 측정과 데이터의 유기적인 분석은 구조물 응답의 동적 특성을 얻는데 있어 매우 중요하다.

이러한 종류의 측정은 실험실 환경에서 행해질 수 없기 때문에 가진력의 특성과 크기를 정확하게 파악하기 어렵다. 단지 가진원에 대한 구조물의 전체적인 또는 전반적인 응답만을 얻을 수 있다. 물론 이러한 결과만이 가용할 수 있는 정보이기 때문에 이 자료들은 매우 중요하다. 그러나 이러한 상태에서는 지반의 특성에 대해 얻을 수 있는 정보가 제한적이라는 사실을 인정하여야 한다.

지반에 발생하는 수직 진동하중에 대한 연구도 활발히 진행되어오고 있다. Lamb(1904)은 탄성반공간상의 어느 한 점에 작용하는 단일 진동하중에 대한 문제를 연구하였다. 이 연구는 흔히 동적 부시네문제(Dynamic Boussinesq Problem)라고 불리는 것으로 수직진동과 수평진동을 함께 다루었다. Reissner(1936)는 탄성반공간상의 원형기초에 작용하는 분포하중에 대한 문제를 연구하였다. 하지만 다양한 진원과 지반상태, 전파경로 열차의 특성, 속도, 등 여러 가지 요인의 상호 불확실성 및 특수성 때문에 열차 진동의 크기를 예측하는 기술은 아직 개발단계에 있다. Raymond와 Komos(1878)는 기차의 통행으로 인한 진동에 의하여 발생하는 철도의 타이(tie)등의 침하를 예상하는데 이용하기 위하여 띠기초에서의 진동하중에 대한 모델실험을 하였다. 런던의 경우에는 지하철에서 발생하는 지반 진동을 제거하기 위해 진동분리방법을 사용한 구조물이 건설되었고 이 구조물과 더불어 인접 건물로 전달되는 진동을 줄이기 위해 지하철 트랙 일부분이 진동분리기 위에 설치되었다. 이러한 구조의 세부사항은 Morton(1967), Waller(1966), 그리고 Grootenhuis(1967)에 의해서 작성되었다. 철도 진동원으로부터 거리변화에 따른 진동의 크기를 예측하는 식이 Degebo(1962)에 의해서 제안되었다.

국내의 경우는 이제까지 철도진동에 의한 궤도지반의 영향에 대하여 특별한 자료수집이나 대책에 큰 관심을 기울이지 못한 실정이었다, 극히 일부에서만 진동대책이 실시되고 있는 실정이다. 목영진(1987)은 미국 테네시주 채펠힐 북쪽 3.2km 저점에서의 열차 주행에 의한 지반진동을 계측 및 분석하였고, 김 등(1993)은 경부선 평택역과 천안역 사이에 위치

한 직선철도 주변의 철도운행에 따른 진동의 전파특성에 관하여 연구하였다. 또한 김 등(1996)은 철도차량의 실험모드해석에 구분선형법을 적용하여 모드 특성치를 구하는 방법을 검토하였다. 강 등(1997)은 경부선 철도의 12개 구간에서 철로로부터 배거리로 3개 지점에서 총 169대의 열차통과시에 측정된 진동레벨과 주파수 특성을 분석하여 경부선 철도진동의 특성과 영향범위를 구하였다. 이상의 연구와 같은 진동실험 및 측정은 동적해석의 필수적인 요소이다. 그러나 토목공학분야에 있어서 구조물의 크기뿐만 아니라 구조물이 위치할 곳의 이상화가 어렵기 때문에 전체 구조물의 동적 해석에는 실제적으로 많은 어려움이 있다. 거대한 구조물은 광범위한 측정을 요구하고, 측정 환경에 맞는 특별한 장비가 요구되기 때문이다.

따라서 본 연구에는 최근 들어 비약적인 발전을 이룬 컴퓨터를 이용한 수치해석 방법을 이용하여 궤도형 구조물의 동적거동해석의 실험적 어려움을 극복하고자 하였다. 궤도형 구조물 하부를 실제에 가까운 비선형 탄소성 지반으로 보고 개발된 모델을 이용하여 하중의 단계적 증가의 경우와 수직진동하중이 작용했을 경우의 궤도하부지반의 거동을 해석하여 여러 가지 변수와 지지력 및 침하량 등과의 관계, 궤도 각 부분의 상호 연관성 및 의존성을 밝혀 보고자 한다.

2. FLAC과 해석모델

이제까지 개발된 지반해석 프로그램은 사면안정, 지지력 산정 등에만 국한된 부분적 해석 프로그램이 대부분이었다. 이에 반해 FLAC은 지지력산정, 사면안정, 지중연속벽해석, 압밀해석, 침투와 배수문제 그리고 핵폐기물 등에 의한 열응력 해석 등 거의 전반적인 지반해석 프로그램이라 할 수 있다. 또한 단순한 입력과정, 다양한 출력모드 등 그래픽 기능이 강력하여 초보자나 비전문인이 보아도 쉽게 이해할 수 있는 장점을 가지고 있다. 본 연구에서는 궤도형 구조물의 지지력 해석에 FLAC을 적용하여 결과를 도출하였다.

FLAC은 Fast Lagrangian Analysis of Continue의 약자로서 변형이 크게 발생하는 모델을 해석하는데 적합한 "Lagrangian"의 해석법에 근거를 두고 있다. 또한 흙, 암반이나 다른 여러 가지 재료로 구성된 모델을 평형방정식, 적합방정식, 구성방정식, 연속방정식, 운동방정식, 연전달 방정식 등의 지배방정식으로 선택하여 2차원 연속체 공간을 유한차분망(Finite Difference Mesh)으로 자세하게 분할하여 임의의 위치에서 각각의 지배방정식의 해를 구하는 프로그램이다.

모델의 구성재료는 요소(element) 또는 영역(zone)으로 표시되며, 이것들은 모델을 목적에 적합한 상태로 조성하여 그리드를 형성한다. 각 절점에서는 운동방정식($F=m \cdot a$)에 대한 해가 구해지며 이 힘들은 평형상태가 아니다. 이러한 평형상태가 아닌 힘들은 절점에서 element mass를 가속시키고, 이러한 mass의 가속에 대한 적분이 이루어지면 절점의 time step에 의한 속도(변위비율)가 구해지고 다음은 element의 변형이 정해진다. 또한 적용되는 각 모델의 변형-응력 구성식(Constitutive Law)에 따라 응력의 증분량이 구해지며, 모델의 각 절점에 해당되는 Unbalance Force가 정해진다. 이러한 불균형 힘이 0이 되어 모델에 완전히 흡수될 때까지 계산은 반복(Time Step)된다.

본 논문에서의 2차원 모델은 그리드 개수 30×22 , 그리고 경계조건 영향에 미치는 영향을 최소화하기 위하여 가로, 세로(15m \times 10m)로 크게 하였고, 탄소성 해석 그리고 수직진

동하중에 의한 궤도형 구조물 해석 시 사용될 것이다.

동일한 물성의 궤도지반에 대하여 3차원 입체해석 및 2차원 Plane Strain 해석을 비교하여 거의 동일한 결과를 얻었으며, Kansas Test 실측치와 비교에서 나타난 오차는 기존의 탄성이 아닌 좀 더 실상에 가까운 탄소성 지반에 대한 해석을 통하여 줄일 수 있음을 확인함으로써 궤도형 구조물에 대한 극한지지력 산정 시 2차원 Plane Strain 탄소성 해석의 적용여부를 검증하였다.

수직진동하중에 대한 궤도형 구조물의 거동을 해석하기 위한 대상이 되는 지반은 앞장에서 탄소성 해석 시 사용된 지반과 동일한 것으로, 침목, 도상, 보조도상, 노반으로 구성된 궤도형 구조로 구성되었다. 각층의 물성으로 도상은 밀도 2.0 t/m³, 체적탄성계수(K) 4.17×10^7 Pa, 전단탄성계수(G) 1.92×10^7 Pa, 포아슨비(ν) 0.3, 내부마찰각(ϕ) 40°, 보조도상은 앞의 차례대로 1.8 t/m³, 1.67×10^8 Pa, 5.56×10^7 Pa, 0.35, 42, 그리고 노반은 2.0 t/m³, 2.50×10^7 Pa, 1.15×10^7 , 0.3, 33 이다. 해석상 용이함을 위해서 symmetric으로 모델링 되었고, 경계조건의 해석에 미치는 영향을 줄이기 위해 가로 세로 각각 15m, 10m로 크게 하였다.

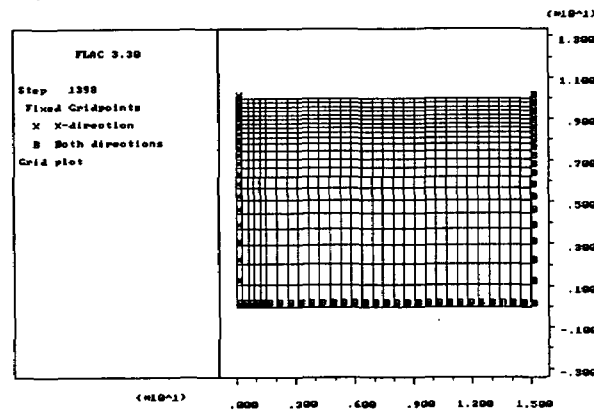


Fig. 4.6 FLAC zone geometry

모델의 y축을 궤도의 침목 중앙으로 정하고 침목부는 중앙으로부터 전체 침목폭의 1/2인 1.5m로 하였다. 하중은 침목부 전체에 걸쳐 작용한다고 가정하였다.

본 연구에는 Mohr-Coulomb Plastic Model을 사용하여 극한지지력이 산정되었고, FLAC의 내부언어인 fish(FLACish)를 사용하여 각 스텝의 Unbalance Force에 따라서 침하 속도를 조절하였다. Fig. 4.6은 해석에 사용된 모델을 나타내고 있다.

3. 점증하중에 의한 극한지지력 산정

수직진동하중에 대한 해석을 하기에 앞서 해석 지반에 대한 정적하중 상태에서의 극한지지력을 구하고, 극한상태에서의 파괴양상을 살펴보았다. 본 해석은 다음에 수행하게 될 수직진동하중 하에서의 지반 파괴 양상과 비교를 위한 것이다.

Fig. 4.7은 x축 침하에 대한 y축 하중을 나타낸 그래프이다. 어떤 재하응력값에서 침하가 매우 커지기 시작하고 예측하기 어려운 상태가 되는데 이때의 하중을 극한지지력이라고 한다. 그래프를 보면 수직방향 변위가 증가함에 따라 일정한 기울기로 하중이 증가하는 양상을 볼 수 있고, 어느 지점을 통과하면서 더 이상 하중의 증가가 없이도 침하가 매우 커지는 상태가 되는데 이것은 해석지반이 국부전단파괴를 지나 전반전단 파괴에 도달했음을 나타낸다. 따라서 이때의 하중이 극한지지력(ultimate bearing capacity)이다.

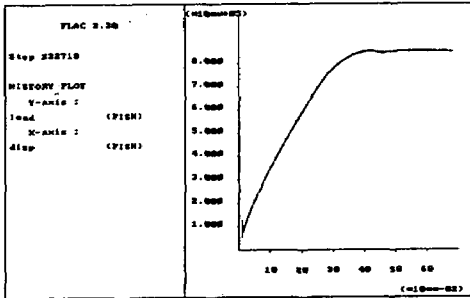


Fig. 4.7 Load-Disp.

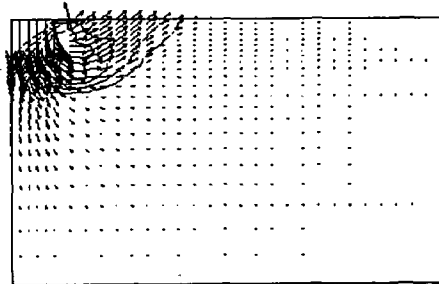


Fig. 4.8 Displacement patterns

Fig. 4.7을 보면 본 해석지반의 극한지지력은 약 $8 \times 10^5 \text{Pa}$ 임을 알 수 있다. Fig. 4.8은 정적하중 하에서의 파괴 시 거동형태를 보이고 있다.

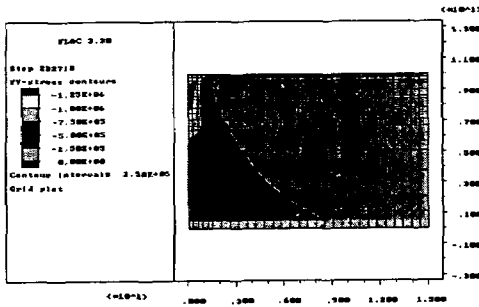


Fig. 4.9 Contours of yy-stress at collapse loads

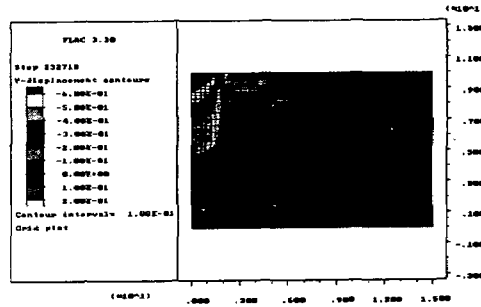


Fig. 4.10 contours of y-disp. at collapse loads

Fig. 4.9와 Fig. 4.10은 파괴시 각 절점의 침하량과 응력분포를 보이고 있다.

4. 주파수별 거동양상

4.1 진동수 변화에 따른 침하량

FLAC을 이용하여 해석하였고, 그 옵션으로 dynamic option이 사용되었다. 해석에 앞서

먼저 적용진동수에 대한 가정이 있어야 하는데, 위에서 밝힌 바와 같이 궤도요소 각 부에서 측정되는 진동수와 본 해석지반의 고유진동수 범위에 대하여 해석하였다.

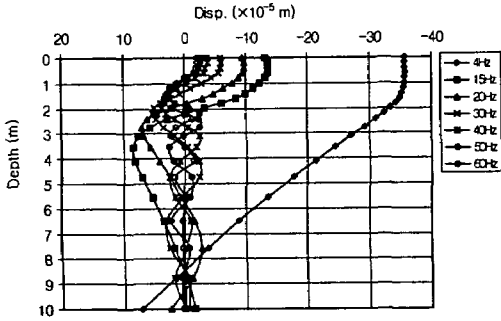


Fig. 4.12 진동수 변화에 대한 깊이별 침하량

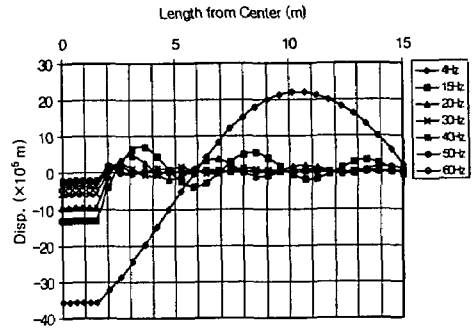


Fig. 4.13 진동수 변화에 대한 표면 침하량

Fig. 4.12는 주파수의 변화에 따른 깊이별 침하량 변화를 나타내고 있다. 그래프의 y축은 궤도지반의 깊이인데 이 축상의 0지점이 표면을 나타낸다. 그리고 x축은 침하량을 나타내고 있다. 침목하부의 도상, 보조도상과 상부노반에서는 고유진동수 범위의 4Hz에서 가장 큰 침하가 발생했으며, 고유진동수 범위에 근접할수록 상부지반의 침하량은 증가함을 볼 수 있다. 고유진동수에서의 깊이별 침하 양상은 정적하중에 대한 해석 시 나타나는 그것과 매우 유사하다. 또한 그래프에서 각각의 침하양상은 실제 적용된 진동수의 정현파의 모양과 매우 유사함을 알 수 있다. 진동수가 큰 범위에서는 수치상으로 그다지 큰 침하를 볼 수 없으나 반면에 큰 수평 변위를 확인할 수 있다.

Fig. 4.13은 각각의 주파수변화에 대한 해석지반 표면의 침하량을 나타내고 있다. 그래프의 수평축을 보면 침목중양으로부터 거리를 나타내는데 0점은 침목의 중앙이고, y축은 침하량을 나타낸다. 그래프의 각각의 곡선들은 정현파의 모양을 하고 있다. 고유진동수 범위의 4Hz에서 침목부의 가장 큰 침하를 확인할 수 있고, 진동수 값이 커짐에 따라, 즉 고진동수에서는 침목부 침하 및 표면의 움기가 상대적으로 적게 나타났다.

Table 4.2 진동수별 지반거동 양상

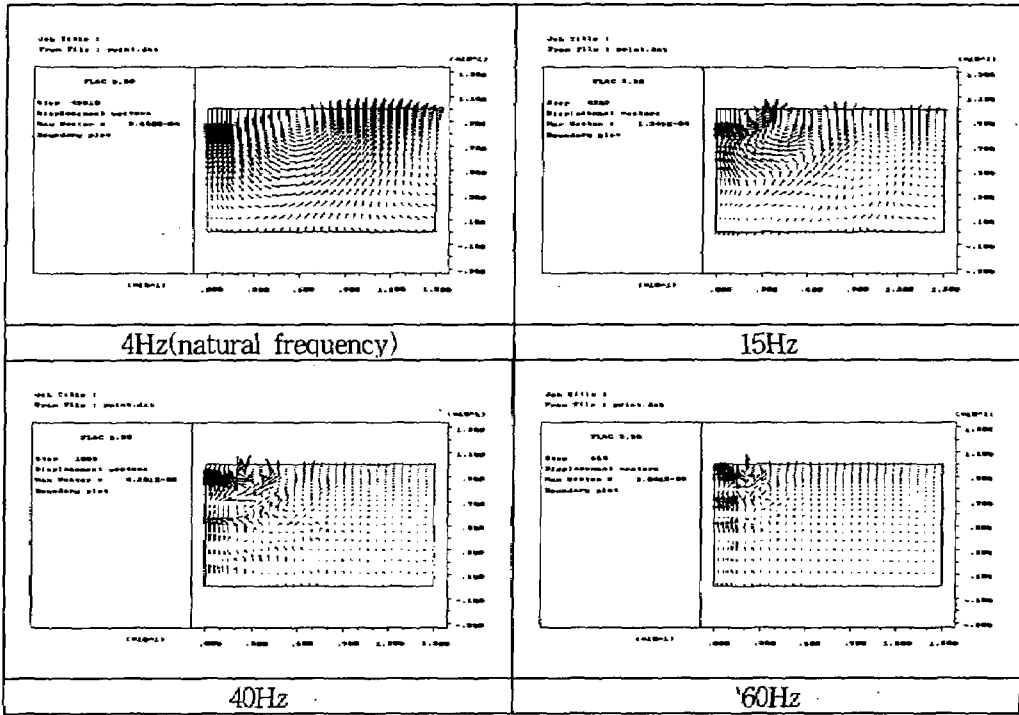


Table 4.2는 여러 가지 진동수에 대한 10 cycle 후의 지반 변형 양상을 비교하고 있다. 공진진동수를 적용했을 경우 지반의 거동양상은 극한지지력 산정 시 지반의 파괴 후와 매우 유사한 거동을 함을 알 수 있다. 고진동수로 갈수록 수직변위 보다는 횡변위가 크게 나타나고 지반의 교란정도가 양호함을 확인할 수 있다.

4.2 15Hz에서 도상변화

실제 철도 궤도지반에서 측정되는 진동수 범위는 15~60Hz의 범위에 있음을 앞 절에서 밝힌바 있다. 본 절에서는 이러한 진동수 범위의 최저 값인 15Hz가 궤도지반에 적용되었을 경우 도상두께가 지반의 침하량에 미치는 영향을 살펴보았다. Fig. 5.5와 Fig. 5.6은 각각 15Hz의 수직진동하중 하에서 지반의 깊이별 침하량과 표면침하량을 나타내고 있다. 도상이 없는 궤도지반의 경우가 가장 큰 침하를 보였고 도상두께가 증가함에 따라 침하량은 감소하였다. 특히 수직진동하중이 재하되는 침목부에서 그 침하량의 차이를 확인할 수 있었다.

Fig. 5.7은 가장 큰 차이를 보인 침목부에 대한 도상두께 변화에 따른 침하량 변화를 나타내고 있다. 15Hz의 수직진동하중 하에서는 거의 비례적으로 도상두께의 증가에 따라 침하량이 감소함을 알 수 있다.

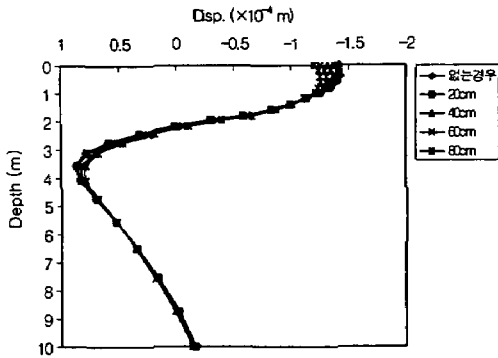


Fig. 5.5 깊이별 침하량(15Hz)

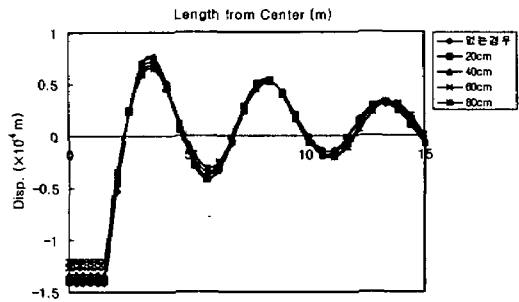


Fig. 5.6 표면 침하량(15Hz)

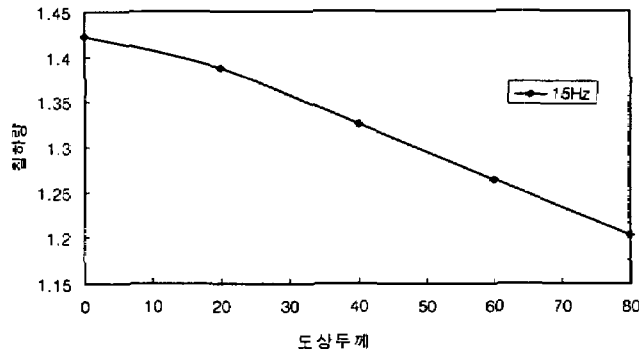


Fig. 5.7 침목부 침하량(15Hz)

4.3 60Hz에서 도상변화

본 절에서는 실제 궤도지반에서 측정되는 진동수 범위의 최고 값인 60Hz의 수직진동 하에서 도상두께변화가 궤도의 침하량에 미치는 영향을 알아보았다. 앞에서와 같이 도상이 없는 경우를 포함한 6가지 다른 도상두께에 대하여 해석하였다. Fig. 5.8과 Fig. 5.9는 해석 결과로써 깊이별 침하량과 표면침하량을 각각 나타내고 있고, Fig. 5.10은 침목부에서의 도상두께 변화에 대한 침하량 변화를 나타내고 있다.

앞의 해석과는 달리 고진동수인 60Hz의 수직진동하중의 경우는 도상두께에 따라서 매우 큰 연직 침하량 차이를 확인할 수 있고, 도상이 없는 경우에 가장 큰 침하를 나타내었다. 도상두께가 증가함에 따라 깊이별 침하곡선에서 볼 수 있는 정현파의 진폭이 줄어들었고, 이는 진동파가 전달되면서 지반의 교란정도가 양호함을 나타낸다. 즉 대상지반 임의의 지점에서의 침하 혹은 rebound가 상대적으로 적다는 것이다. 도상두께의 증가에 따라 비례적인 침하량의 감소로는 볼 수 없으며 오히려 과도한 도상두께의 경우는 반대로 연직침하량이 증가함을 Fig. 5.10으로 확인할 수 있다. 이것은 과도한 도상두께의 증가는 오히려 궤도지반의 지지력 체계에서 볼 때 비효율적임을 의미한다. 또한 다른 부분과 비교하여 특히

침목부에서 과도한 침하와 용기가 발생함도 저진동수에서의 해석과 다른 점이라 할 수 있다.

앞장에서 해석된 정적하중 하에서의 다른 도상두께에 대한 해석과 비교해 보면 정적하중 하에서의 도상두께가 전체 지지체계에 미치는 영향은 그리 크지 않음을 확인하였다. 즉 도상두께의 변화가 전체 지지력 체계에 미치는 일시적인 영향은 그리 크지 않다. 하지만 특히 고진동의 수직 진동하중 하에서의 영구변형에 대한 저항력에 미치는 도상두께의 영향은 크다고 할 수 있다.

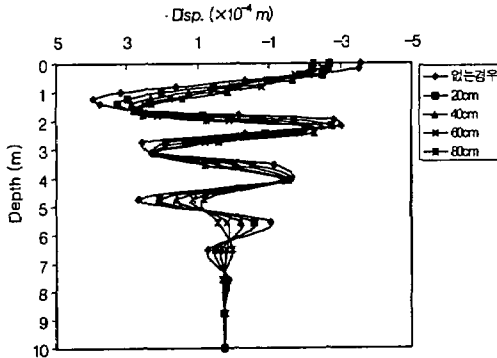


Fig. 5.8 깊이별 침하량(60Hz)

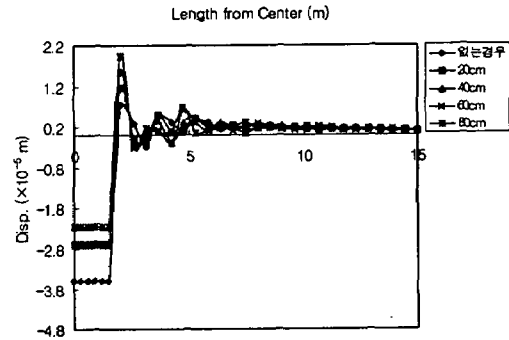


Fig. 5.9 표면 침하량(60Hz)

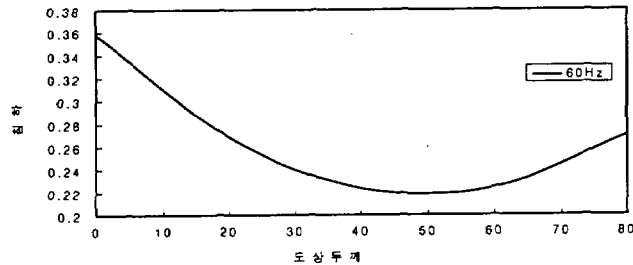


Fig. 5.10 침목부 침하량(60Hz)

6. 결론

철도궤도시스템은 레일, 침목, 도상, 보조도상과 노반 등과 같이 다양한 재료로 구성되어져 있다. 본 논문에서는 이러한 철도궤도시스템을 궤도와 지반으로 단순화시킨 궤도형 구조물에 대한 동역학적 거동을 알아 보기 위하여 다양한 정적해석 및 동적해석을 수행하였다.

정적해석으로는 지반을 탄성 혹은 비선형 탄소성 지반으로 가정하여 3차원입체해석, 2차원 Plane Strain해석, 실측치 등의 결과를 비교하여 보았고, 동적해석에 앞서 예비해석으로 대상지반에 대한 극한 지지력을 산정하였다.

또한 궤도지반의 공진주파수와 실제 측정되는 주파수범위에서 수직진동하중하의 동적응답해석을 위하여 FLAC을 이용한 수치해석이 수행되었으며, 다층의 궤도지반에 대한 변위

합수와 진동수와의 관계를 밝혔다. 또한 도상두께의 정적해석, 동적해석 시 침하량 변화에 미치는 영향을 알아보았다.

이상의 해석결과를 정리해보면 다음과 같다.

- (1) 동일한 물성의 지반에 대한 3차원 유한요소 모델과 2차원 Plane Strain 해석 결과의 비교시 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 3차원 해석의 비효율성을 2차원 Plane Strain 해석으로 대체할 수 있음을 확인하였다.
- (2) 대상 궤도지반을 탄성으로 본 경우와 탄소성으로 본 경우의 수치해석 결과의 비교에서 하중 작용점 이하의 깊이에 따른 수직 처짐량이 탄소성 해석의 경우에 소성처짐으로 인해 크게 나타남을 확인하였고, Kansas Test Track 실측치와의 비교로 이 결과를 검증하였다.
- (3) 정적하중 하에서는 도상두께 변화가 전체 지지체계에 미치는 일시적인 영향은 그리 크지 않았지만 수직진동하중 하에서의 궤도형 구조물의 영구변형에 대한 저항력에 미치는 영향은 큼을 알 수 있었다. 또한 동적해석의 결과로 도상두께가 증가함에 따라 궤도지반의 교란정도가 양호하게 나타났다, 반면에 과도한 도상두께의 증가는 궤도지반의 지지력 체계에서 볼 때 비효율적임을 확인할 수 있었다.
- (4) 단층지반의 수직진동하중 하에서 동적응답해석시 사용되는 변위함수(Compliance Function)를 더욱 발전시켜 본 연구의 궤도형 구조물의 다층지반에 이용할 수 있는 변위함수와 무차원 진동수와의 관계를 구하였다.
- (5) 침목하부의 궤도지반에서 고유진동수 범위에 근접할수록, 진동수가 감소할수록 깊이별 침하량 및 표면 침하량이 증가하였다. 반면에 고진동수로 갈수록 깊이별 침하량은 감소하고 큰 수평변위를 나타냈으며 표면 침하량과 표면의 용기가 상대적으로 적게 나타났다. 깊이별 거동과 표면의 거동 양상은 적용된 진동수 각각의 정현파 모양과 매우 유사하게 나타났다.

참고문헌

1. 이형주, 이병수, 박정일(1998), 흙의 탄소성 해석, 구미서관
2. 이종득(1989), 철도공학, 노해출판사
3. 서서범(2000), 철도공학의 이해, 일과알
4. 송정낙역(1995), 지반진동학, 엔지니어즈
5. 천병식, 오재웅(1987), 지반진동이론과 실제, 건설연구사
6. 황정규(1994), 지반공학의 기초이론, 구미서관
7. 강양원(1988), "탄성지반상의 보 이론에 따른 rail의 동적특성에 관한 연구", 석사학위논문, 연세대학교
8. 김성득, 장승필(1987), "탄소성 지반위에 놓인 원형평판의 유한요소 해석", 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, Vol.10, No.4
9. 유승도의 5명(1997), "경부선 철도진동의 특성과 영향범위", 한국소음진동공학회지, 한국소음진동공학회, Vol.7, No.4
10. 박영효(1996), "지반-궤도차량의 상호작용에 관한 연구", 박사학위논문, 서울대학교

11. 박홍규(1991), “반복하중을 받는 흙의 역학적 특성에 관한 실험적 연구”, 박사학위논문, 한양대학교
12. C. S. Desai(1979), *Elementary Finite Element Method*, Prentice Hall
13. E. Hinton and D.R.J. Owen(1977), *Finite Element Programming*, Academic Press
14. Fritzfasten Rath(1981), *Railway track(Theory and Practice)*, Frederick Unger Publishing Co/NewYork
15. Hay, W. W.(1982), *Railroad Engineering*, John Wiley & Sons
16. S. P. Timoshenko and J.M. GERE(1961), *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill
17. Simons Boardman(1991), *Railway Track and Structures*, NewYork Corp
18. Schofield, A.N., Worth,C.P.(1968), *Critical State Soil Mechanics*, McGrawill Book Co., London
19. Scott, R.F.(1963), *Principle of soil mechanics*, Addison-Wesley, Reading Mass.
20. William W. Hay(1982), *Railroad Engineering*
21. William Weaver, Jr.(1984), *Finite Elements for Structure Analysis*
22. Anderson, R.H.(1962), “The strength and deformation of coarse grained soils under the action of repeated loading”, *M. Eng. Sc. Thesis*, Michigan tech. Univ.
23. Dehlen, G. L.(1969), “The effect of non-linear material response on the behaviour of pavement subjected to traffic load”, *Ph D. Thesis*, Univ. California
24. Finn, W.D.L.(1971), Pickering, D.J. and Bransby, P.L.(1971), “Sand Liquefaction in Triaxial and Simple Shear Tests”, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 97(SM4)
25. Harry, E.S.(1986), “Permanent strains from cyclic variable-amplitude loadings”, *J. of Geot. Eng., ASCE*, Vol.112, No.6
26. Lee, K.L., and Albaisa, A.(1974), “Earthquake Induced Settlements in Saturated Sands”, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE* 100(GT4)
27. Peacock, W.L., and Seed, H.B.(1968), “Sand Liquefaction Under Cyclic Loading Simple Shear Conditions”, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE* 94(SM3)
28. Raymond, G. P.(1988), “Analysis of Rail Track Structure(ARTS) User’s Manual”, *Canadian Institute of Guided Ground Transport*, No 88-3, Queen’s University
29. Raymond, G. P. & Lake, R. W. & Boon, C. J.(1976), “Stresses and Deformation in Railway Track”, *CIGGT* No.76-11, Queen’s University
30. Seed, H.B., and Lee, K.L.(1966), “Liquefaction of Saturated Sands During Cyclic Loading”, *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE* 92(SM6)