

## 鋼箱桁 曲線橋의 解析

陳 致 燮  
土 木 工 學 科

### 〈要 約〉

1960年 以來 美國, 유럽, 日本 等地에서는 鋼箱桁 曲線橋의 架設이 急増하고 있는데, 이는 箱形 自體의 斷面이 비틀림과 warping에 有效하게 저항하는 구조로 되어 있기 때문이다.

本 研究에서는 半經方向端에서 단순 지지된 橋梁을 上·下 슬랩은 水平 圓形의 扇形板으로, 벽은 수직 원통 쉘요소로 이상화하여 扇形板의 内部의 面內應力, 固定端力, 휨 모멘트 등을 變位法으로 解析했다.

## Analysis of Curved Steel Box-Girder Bridge

Jin, Chi-Sub  
Department of Civil Engineering

### 〈Abstract〉

The number of curved steel box-girder bridges constructed has been increasing in recent years. Interest has been generated in the use of curved steel box-girders because the entire section is effective in resisting torsion and warping. In this study, the bridges are assumed to be simply supported along the radial edges, and the top and bottom slabs are idealized as horizontal circular sector plates, and the walls of the box-girder represented as vertical cylindrical shell elements.

The analysis is given for determining membrane stress, fixed edge forces, and bending moments at interior point of sector plate elements by the stiffness method.

### I. 序 論

道路交通에서 線形의 圓滑함과 美觀을 고려하여 많은 曲線橋가 옛날부터 架設되어 왔다. 그 中에서도 鋼箱桁의 使用은 箱形 斷面 自體가 비틀림과 warping에 有效하게 저항하기 때문에 일반화되고 있다. 箱桁 曲線橋에서 맨 처음 使用한 構造로는 4面이 모두 鋼으로 된 直四角形 鋼箱이었는데, 오늘날은 台形으로 되어 上部에 브레이싱을 배치하고 콘크리트 床板을 두는 것이 보통이다. 1978年 ASCE-AASHTO 합동 조사 위원회의 앙케이트에 의하면 美國, 유럽, 일본 등지 82個의 鋼箱桁 曲線橋 中에서 콘

크리트 床板 교량이 대부분이고 鋼床板 교량은 10個 뿐이었다.<sup>(10)</sup>

箱桁 曲線橋 設計法은 1975年 AASHTO에서 채택한 임시 설계 시방서가 있을 뿐 완전한 設計法은 아직도 규정되어 있지 않고<sup>(11)</sup> 근사적인 방법으로 예비 설계를 하거나 直線橋에 대한 설계 규정을 약간 수정하여 사용되어 왔다.<sup>(6)(11)</sup> 解析方法에는 平面格子法, 立體骨組法, 有限要素法, 有限帶板法, 差分法에 의한 Vlasov 方程式의 解 등이 있으며<sup>(4)(6)(11)</sup> 國內에서의 연구는 거의 없을 정도이고 해외에서는 미국 Maryland 대학에서 영향선 및 하중계수의 연구와 프로그램 개발이 진행되고, Lehigh 대학의 폭선요소의 피로 연구, Osaka 대학의 모델

연구, Turkey의 Middle East 대학의 브레이싱 연구, Scotland의 Dundee 대학의 플랜지 안정 연구 등이 계속되고 있다. (11)

여기서는 半徑方向端이 단순 지지되어 있고 중간 간막이가 없으며 수평 원형의 扇形板과 수직 원통 쉘 요소로 구성된 鋼箱桁 曲線橋를 變位法으로 解析했다. 板과 쉘 要素의 面內外 應力を 고려하고 각각의 剛度行列을 구하여 節點에서의 適合條件과

平衡條件으로 未知變位와 固定端力을 구하여 扇形板 內部的 面內應力, 固定端力, 휨 모멘트를 구하였다.

### II. 扇形板

그림 (1)과 같은 扇形板이 端荷重만 받을 때 임의의 점  $(r, \phi)$ 에서의 처짐  $w$ 에 대한 미분방정식은

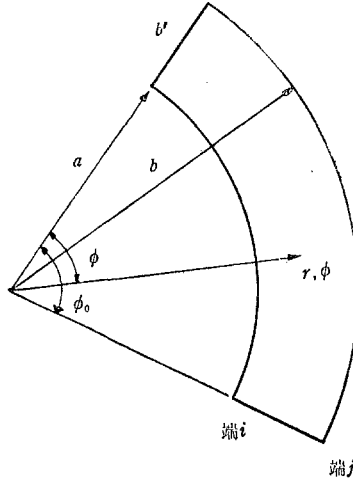


그림 1. 扇形板

$$\nabla^4 w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) = 0 \quad (1)$$

이다. 半徑方向端에서 단순 지지되었다면  $w=0$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}=0$ 가 되어 다음과 같은 일반해를 얻을 수 있다.

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r) \sin m\phi \quad (2)$$

여기서

$$w_n = c_{1n} r^m + c_{2n} r^{-m} + c_{3n} r^{m+2} + c_{4n} r^{-m+2} \quad (3)$$

$$m = \frac{n\pi}{\phi_0} \quad (n=1, 2, \dots, m \neq 0, \text{ and } m \neq 1) \quad (4)$$

단위길이당 半徑方向 휨 모멘트는

$$M_{rr} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (M_{rr})_n \sin m\phi \quad (5)$$

단위길이당 接線方向 휨 모멘트는

$$M_{r\phi} = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (M_{r\phi})_n \sin m\phi \quad (6)$$

그리고 端에 沿한 反力은 剪斷力에 비틀림 모멘트의 영향을 합한 것과 같으므로

$$S_{rr} = \left( Q_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\phi}}{\partial \phi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (S_{rr})_n \sin m\phi \quad (7)$$

여기서  $Q_{rr}$ 은 단위길이당 剪斷力으로

$$Q_{rr} = -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \quad (8)$$

$M_{r\phi}$ 는 단위길이당의 비틀림 모멘트로

$$M_{r\phi} = (1-\nu) D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \quad (9)$$

이다.

$r=a$ ,  $r=b$ 에서의 變形에 관한 경계조건을 고려하고 처짐, 모멘트, 反力과의 관계로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[F_{n\omega}] = [k_{n\omega}] [\delta_{n\omega}] \quad (10)$$

여기서

$$[F_{n\omega}] = [M_{ni}, M_{nj}, S_{ni}, S_{nj}]^T \text{이고}$$

$$[\delta_{n\omega}] = [\theta_{ni}, \theta_{nj}, \omega_{ni}, \omega_{nj}]^T \text{이다.}$$

面内の 힘과 變位の 관계는  $v$ 와  $u$ 를 각각 半徑方向과 接線方向의 變位라 할 때

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial v}{\partial r} \\ \epsilon_\phi &= \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \gamma_{r\phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

이요 應力-變形率 관계는

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\phi) \\ \sigma_\phi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\phi + \nu \epsilon_r) \\ \tau_{r\phi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\phi} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

이다.

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) \cos m\phi \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r) \sin m\phi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

이러 놓으면 應力은 다음 式으로 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{rn} \sin m\phi \\ \sigma_\phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\phi n} \sin m\phi \\ \tau_{r\phi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\phi n} \cos m\phi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

平衡方程式은

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

이다.

面内の 힘은 半徑方向의 힘을  $N$ , 接線方向의 힘을  $T$ 라 하면

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin m\phi = \sigma_r \cdot t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{rn} t \sin m\phi \\ T &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos m\phi = \tau_{r\phi} \cdot t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\phi n} t \cos m\phi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

로 表示된다.

應力成分들을 平衡方程式에 代入하고  $r=a$ ,  $r=b$ 에서의 境界 조건들을 고려하여 조합하면

$$[F_{np}] = [k_{np}] [\delta_{np}] \quad (17)$$

여기서

$$[F_{np}] = [T_{ni}, T_{nj}, N_{ni}, N_{nj}]^T$$

$$[\delta_{np}] = [u_{ni}, u_{nj}, v_{ni}, v_{nj}]^T$$

이다.

扇形板의 面内外의 힘과 變位關係를 극소좌표로 나타내면 式 (10)과 式 (17)에서

$$\begin{aligned} [F_n] &= \begin{bmatrix} F_{n\omega} \\ \dots \\ F_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{n\omega} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & k_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{n\omega} \\ \dots \\ \delta_{np} \end{bmatrix} \\ &= [k_n] [\delta_n] \end{aligned} \quad (18)$$

이 된다.

### III. 圓筒 殼

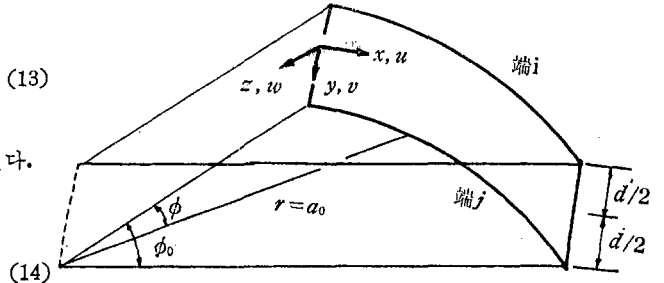


그림 2. 圓筒 殼

그림 (2)는 半徑이  $a_0$ , 轄角이  $\phi_0$ , 軸방향 폭이  $d$ 인 圓筒 殼의 일부분으로 좌표는 원주방향으로  $x=a_0\phi$  軸방향으로  $y$ , 중심을 향한 반경방향으로  $z$  이고, 變위는 각각  $u, v, w$ 이다.  $\phi=0, \phi=\phi_0$ 에서 단순 지지되어 있고 曲線端에 따라 하중을 받고 있으며 半徑方向 變位는 Donnell의 근사식을 사용하였다. (12)

$$\begin{aligned} w &= [(c_1 e^{-\alpha_1 k} + c_2 e^{\alpha_1 k}) \cos \beta_1 k \\ &\quad + (c_3 e^{-\alpha_1 k} - c_4 e^{\alpha_1 k}) \sin \beta_1 k \\ &\quad + (c_5 e^{-\alpha_2 k} + c_6 e^{\alpha_2 k}) \cos \beta_2 k \\ &\quad + (c_7 e^{-\alpha_2 k} - c_8 e^{\alpha_2 k})] a_0 \sin m\phi \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$k = y/a_0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (p+q+m^2/p)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (p-q+m^2/p)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} (p-q-m^2/p)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}(p+q-m^2/p)$$

$$p = \sqrt{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{\frac{q^4}{4} + m^4}}$$

$$q^4 = 3(1-\nu^2)(a_0/t)^2$$

$c_1, c_2, \dots$  등은 경계조건으로부터 구해지는 상수이다.

扇形板에서와 마찬가지로 쉘의 힘과 變位의 관계는

$$[F_n] = [k_n] [\delta_n] \tag{20}$$

으로 된다.

여기서

$$[F_n] = [M_{ni}, M_{nj}, S_{ni}, S_{nj}, T_{ni}, T_{nj}, N_{ni}, N_{nj}]^T$$

$$[\delta_n] = [\theta_{ni}, \theta_{nj}, w_{ni}, w_{nj}, u_{ni}, u_{nj}, v_{ni}, v_{nj}]^T$$

이고  $[k_n]$ 은 쉘 요소의 剛度行列이다.

#### Ⅳ. 板과 쉘의 組合

그림 (3)에서 水平인 扇形板에 대한 국소좌표는

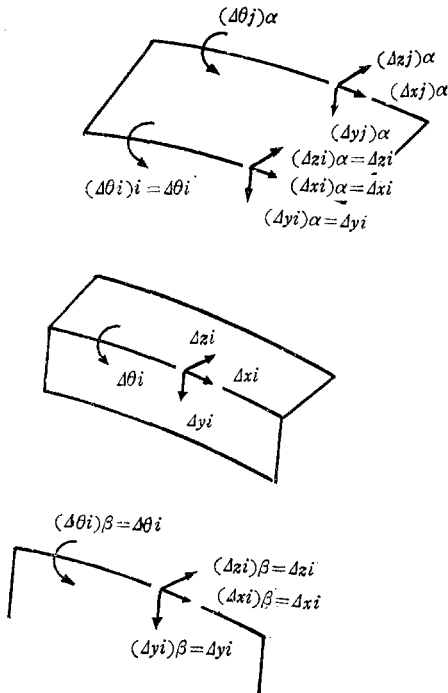


그림 4. 전체좌표의 변위와 힘

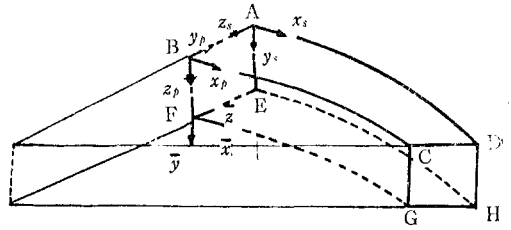
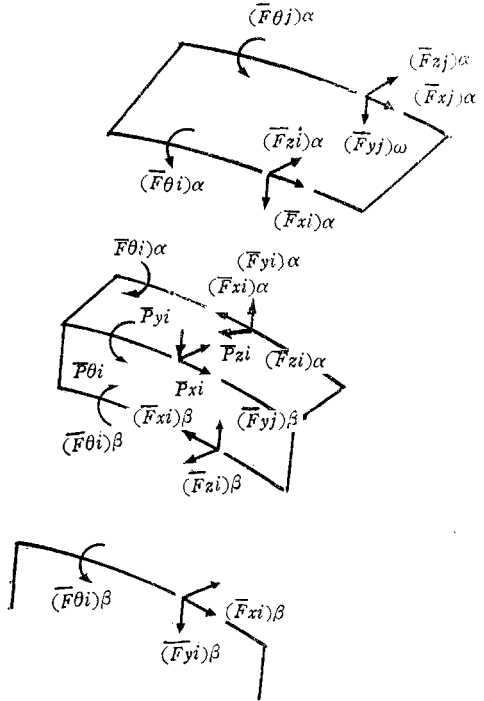


그림 3. 국소·전체좌표

점 B에서 보는 바와 같이 원주 방향으로  $x$ 이고 중심에서 밖으로 향하는 반경방향이  $y$ 이며 아래로 향하는 방향이  $z$ 이다. 또 쉘에서는 점 A에서와 같이 좌측에서 우측으로의 원주방향이  $x$ 이고 하향이  $y$ , 중심을 향하는 반경방향이  $z$ 이다. 板과 쉘의 전체좌표는 원주방향을  $\alpha$ , 연직방향을  $\beta$ , 반경방향을  $\omega$ 로 나타내기로 한다.

한 점에서 만나는 板요소와 쉘요소의 각각의 변위는 그 점에서의 전체 변위와 같아야 하고 端에 沿한 전체 힘은 그 점에서 크기는 같고 방향은 반대이어야 한다.

그림 (4)에서 첨자  $i, j$ 는 扇形板에서는 內側端,



外側端을 나타내고 쉘에서는 上端과 下端을 각각 나타내기로서 하고 板이나 쉘 모두  $i$ 端만 생각하면 變位는  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  축 방향에서 각각  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ ,  $\Delta z_i$ 이고  $\Delta\theta_i$ 는  $\bar{x}$  方向에 관하여 반시계 방향이며 端에 沿한 힘은 각각  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$ ,  $F_{zi}$ 이고  $\bar{x}$  方向에 관한 반시계 방향인  $F_{\theta i}$ 로 된다.

임의의 요소  $\alpha$ 에 대하여 전체 좌표에서의 변위  $(\Delta_n)_\alpha$ 는 변환행렬  $T$ 에 의하여 국소좌표에서의 변위  $(\delta_n)_\alpha$ 로 변환 가능하다.

$$[\delta_n]_\alpha = [T]_\alpha [\Delta_n]_\alpha \quad (21)$$

또 국소좌표에서의 힘  $[F_n]_\alpha$ 는 전체좌표에서의 힘  $[\bar{F}_n]_\alpha$ 로 변환할 수 있다.

$$[\bar{F}_n]_\alpha = [T]_\alpha^T [F_n]_\alpha \quad (22)$$

식 (18), 식 (21), 식 (22)로부터

$$[\bar{F}_n]_\alpha = [T]_\alpha^T [\bar{k}_n]_\alpha [T]_\alpha [\Delta_n]_\alpha = [\bar{k}_n]_\alpha [\Delta_n]_\alpha \quad (23)$$

즉

$$[\bar{F}_n]_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{F}_{ni} \\ \dots \\ \bar{F}_{nj} \end{bmatrix}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{k}_{nii} & \bar{k}_{nij} \\ \dots & \dots \\ \bar{k}_{nji} & \bar{k}_{njj} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} \Delta_{ni} \\ \dots \\ \Delta_{nj} \end{bmatrix}_\alpha \quad (24)$$

여기서 첨자  $n$ 은 Fourier항의 수를 나타내고  $[\bar{k}_n]_\alpha$ 는 전체좌표계에서 요소  $\alpha$ 의 剛度行列이다.

한 共通端에서 만나는 서로 다른 요소의 변위는 모두 同一함을 고려하고 각 요소의 평형방정식을 모두 합하면

$$[K_n] [\Delta_n] = [\bar{P}_n] - [F_{fn}] \quad (25)$$

또는

$$[\Delta_n] = [K_n]^{-1} \{ [\bar{P}_n] - [F_{fn}] \} \quad (26)$$

이 된다. 여기서  $[\Delta_n]$ ,  $[\bar{P}_n]$ ,  $[F_{fn}]$ 은 각각 모든 端에서의 變位, 作用力, 固定端力이고  $[K_n]$ 은  $[\bar{k}_n]$ 의 組合行列이다.

### V. 固定端力과 휨모멘트

扇形板이 단위면적당 수직력  $P(\gamma, \phi)$ 를 받을 경우의 일반 미분방정식은

$$\nabla^4 w = \frac{P(\gamma, \phi)}{D} \quad (27)$$

만일 扇形板이 半徑端에 沿하여 단순 지지되었다면 하중  $P$ 는 다음과 같이 Fourier 급수로 나타낼 수 있다.

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin m\phi \quad (28)$$

그리고 일관해는 다음으로 주어진다.

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin m\phi \quad (29)$$

여기서

$$w_n = C_{1n} \gamma^m + C_{2n} \gamma^{-m} + C_{3n} \gamma^{m+2} + C_{4n} \gamma^{-m+2} + W_n \gamma^4$$

$$W_n = \frac{P_n}{(16-m^2)(4-m^2)D}$$

이며  $P_n$ 은 각각의 하중에 따라 정의된다.

板이  $i, j$  端에서 固定되었다면 경계조건

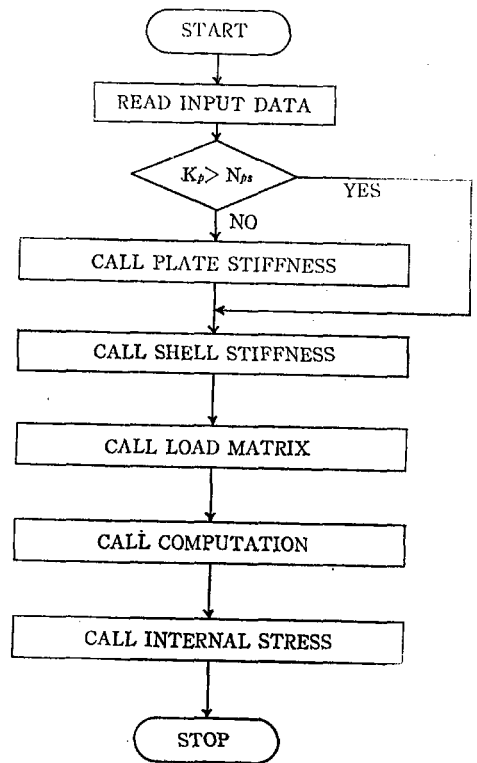
$$\left. \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=b} = 0, \quad w \Big|_{\gamma=a} = 0, \quad w \Big|_{\gamma=b} = 0$$

로부터 고정단력을 구할 수 있는데 수직하중만 받을 때에는  $T_{fni} = T_{fnj} = N_{fni} = N_{fnj} = 0$ 이 된다.

모든 端을 따라 단순 지지된 경우의 단위길이당의 휨 모멘트는 경계조건  $(M_{\gamma\gamma})_n|_{\gamma=a} = 0$ ,  $(M_{\gamma\gamma})_n|_{\gamma=b} = 0$ ,  $w_n|_{\gamma=a} = 0$ ,  $w_n|_{\gamma=b} = 0$ 을 적용하여 구해지며 端 모멘트와 變位에 대한 板의 內點에 생기는 휨 모멘트도 경계조건을 고려, 쉽게 얻어진다.

이리하여 최종 휨 모멘트는 端 모멘트와 변위에 의한 내부 모멘트와 단순 지지 모멘트를 중첩함으로써 얻어지고 面內應力은 식 (14)로 구해진다.

### VI. 프로그램



## Ⅶ. 結 論

中間 간막이가 없고 半徑方向端이 단순 지지된 單曲線 형태의 鋼箱桁 曲線橋를 解析했다. 기본 미분 방정식으로부터 Fourier 급수로 전개하여 해석했으므로 正確한 解를 얻을 수 있으나 앞으로 다음과 같은 연구들이 수행되어야 할 것이다.

- 1) 어떤 단면 형상에도 적용 가능한 것
- 2) 각종 道路 線形(水平曲線 및 縱曲線)에 부합되고 지지조건에 구애받지 않을 것.
- 3) 극한 하중 설계법의 개발
- 4) 腹部, 플랜지 등의 要素의 補剛
- 5) 브레이싱의 국소응력의 규명
- 6) 시공 편의를 위한 프리캐스트 슬랩의 개발
- 7) warping 효과 규명에 대한 단순한 기법.
- 8) 진동 및 활하중 효과에 대한 動的인 해석
- 9) 해석 프로그램의 설계 프로그램으로의 변환

## 謝 辭

본 연구는 문교부 학술연구조성비에 의한 것임을 밝히고 감사드린다.

## 參 考 文 獻

1. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.; "Theory of Elasticity" 3rd ed. pp.65-149, McGraw-Hill (1970)
2. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.; "Theory of Plates and Shells" 2nd ed. pp.51

- ~78, 282~324, 466~532, McGraw-Hill (1959)
3. Flügge, W.; "Stresses in Shells" 2nd ed. pp.204~316, Springer-Verlag New York(1973)
4. Heins, C.P.; "Bending and Torsional Design in Structural Members" pp.1~262, Lexington Books(1975)
5. Donnell, L.H.; Beams, Plates, and Shells" pp.303~444 McGraw-Hill(1976)
6. 小西一郎, : "鋼橋, 設計編 II", pp.1335~1485. 丸善株式會社(1976)
7. Cheung, M. S. and Cheung, Y. K.; "Analysis of curved box-girder bridges by finite strip method" pp.1~19, Publ. IABSE vol.31-I (1971)
8. Chu, K.H. and Pinjarkar, S.G.; "Analysis of Horizontally Curved Box-Girder Bridges", pp.2481~2501, ASCE vol.97. ST 10 (1971)
9. Bazant, Z.P. and Niemeiri, M.E.; "Stiffness Method for curved Box Girders at Initial Stress" pp.2071~2090, ASCE vol.100, ST 10 (1974)
10. Task Committee on Curved Box Girders of the ASCE-AASHTO Committee, "Curved Steel Box-Girder Bridges: A Survey" pp.1697~1718, ASCE vol.104. ST 11 (1978)
11. Task Committee on Curved Box Girders of the ASCE-AASHTO Committee, "Curved Steel Box-Girder Bridges: State-of-The-Art" pp.1719~1739, ASCE vol.104. ST 11(1978)
12. Hoff, N.J.; "Boundary-Value Problems of the Thin-Walled Circular Cylinder" pp.343~350, ASME, No.54, APM-4(1954)