

## 境界要素法에 의한 微小振幅波의 數値解析(1)

金 聲 得

土木工學科

(1984. 9. 30 접수)

### 〈요 약〉

Potential 문제에 관한 境界要素法の 理論的 背景을 紹介하고 이를 微小振幅波 理論에 根據한 境界條件을 준 波浪問題를 解析하는데 적용하였다.

計算의 信賴度를 檢證하기 위하여 一定한 水深에서의 進行波 및 垂直 壁에 의해서 完全 反射되는 重複波에 대한 結果와 比較 考察하였고 이러한 방법으로 보다 完全한 波浪 理論의 적용에 관한 可能性을 提案하였다.

## Numerical Analysis of the Small Amplitude Wave by the Boundary Element Method

Kim, Seong-deuk

Dept. of Civil Engineering

(Received September 30, 1984)

### 〈Abstract〉

The analytical procedure of the boundary element method on potential problems is introduced and the method is used to analyze the wave problem which has the boundary condition based on the small amplitude wave theory.

The accuracy of the computational scheme is investigated by comparing the results of progressive wave and standing wave on two dimensional ( $x-z$  plane) constant depth and the possibility about analyzing more complicated water wave theories using this method is discussed.

### I. 서 론

波浪이 진행함에 있어서 그 파장은 水深의 변화, 海底 地形의 急變 혹은 어떠한 障礙物들을 통과할 때 일부 反射를 하거나 傳達됨에 따라 그 波浪의 諸元이 변화하게 되는데 微小振幅波의 理論的 觀點에서도 이를 解析한다는 것은 매우 어려운 문제로 남아 있다. 특히 波에 의한 물粒子가 海底 부근이나 어떤 構造物 부근에서 어떤 速度 分布를 가지게 되며 또 그들의 加速度 成分이 어떤 값을 가지게 될 것인가를 안다는 것은 一定한 水深이라는 假定 下에서

유도된 速度 potential에 관한 公式 만으로는 波浪의 反射 등으로 인한 영향을 포함시킬 수가 없다.

이러한 문제를 해결하는 數値解析 방법은 그 領域 内部의 物質의 均質성에 의해서 有限要素法 보다는 境界要素法(혹은 境界積分法이라고도 불림)이 더욱 效果的인 것으로 알려져 있다.

부분적으로 區劃지워진 일정한 水深下에서 trench 등이 수직하게 놓여질 때 進行波浪의 諸元의 변화에 관한 연구는 각 領域의 一定水深에서 얻어진 速度 potential의 固有函數를 구하고 그 解가 trench가 놓여지는 垂直 境界에서 서로 같아야 한다는 방법에 따라 Takano(1960), Mei와 Black(1969),

Lassiter(1972), Kirby와 Dalrymple(1983)등에 의하여 解析的 또는 數值的 방법에 의하여 얻어 졌지만 이진, 이런 typical 한 trench 에 관한 表面波의 形狀에 관한 연구들이다.

본 연구는 境界要素法은 사용되어 波浪의 기본 방정식이 Laplace 방정식에 微小振幅波 假定에 따른 境界條件을 바로 적용함으로써 그 境界形狀의 制約을 받지 않고 波浪의 속도 potential 과 물 粒子의 流速 등을 구하도록 하였다. 이러한 방법은 Raichlen과 Lee(1978)에 의하여 二次元 場(x-z 平面)에서 처음 시도된 것으로 알려져 있고 x 方向에 대해 경사진 入射波(y 方向 고려)에 대한 擴張 適用을 위한 연구가 Kirby와 Dalrymple(1983)에 의해 수행되었는데 이들은 모두 境界要素上의 속도 potential 을 일정하게(constant element) 취한 가장 간단한 방법을 사용하였으나 본 연구에서는 그 境界要素의 속도 potential 을 線型으로 취함(linear element)으로 그 精度를 높이고 要素의 數를 줄일 수 있게 하였다.

境界要素法의 理論展開 및 기초 program 은 Brebbia의 'The Boundary Element Method for Engineers'(1980)을 참조하였고 가장 간단한 경우의 계산 例(一定水深에서의 進行波 및 완전 反射重復波)를 보임으로 program 의 信賴度를 확인하였다.

## II. 境界要素法의 理論的 背景

### 1. 基本方程式

일반적으로 境界值 問題에 관한 近似解法은 그 要素内部의 平衡方程式은 近似的으로 만족시키면서 境界條件을 만족시키는 函數를 취해왔다. 그러나 境界要素法은 이와 반대로 境界内部에서는 엄밀히 만족하면서 境界條件은 近似的으로 만족하도록 하는 방법이라 할수 있다.

다음과 같은 境界條件을 가지는 Laplace 방정식을 생각한다.

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in domain } \Omega \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{on boundary } \Gamma_2 \\ u = \bar{u} \quad \text{on boundary } \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上記 (1), (2) 조건을 만족하는 weighted residual form 은

$$\iint_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\bar{q} - q) w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3)$$

이때 여기서  $w$  는 weighting function 이다.

이 식이 필요, 内部에서 만족하기 위해서는 (3) 식의 첫 항이 0이 되어야 한다. 즉 이것을 부분적분 하면

$$\iint_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \iint_{\Omega} u (\nabla^2 w) d\Omega + \int_{\Gamma} q w d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (4)$$

이때 이때 weighting function  $w$  는 Green function 에 해당된다.  $w$  의 값을 알기 위하여

$$\nabla^2 w + \Delta' = 0 \quad (5)$$

이라고 하자. 여기서  $\Delta' = \delta(r-i)$  는 内部 點  $i$  에서 단 값을 가지는 Dirac 함수이다.

(5) 식을 고려하여

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} u (\nabla^2 w + \Delta') d\Omega &= \iint_{\Omega} \nabla^2 w d\Omega + \iint_{\Omega} u \Delta' d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} u \nabla^2 w d\Omega + u' = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\int_{\Omega} u \Delta' d\Omega = u'$  는 Dirac-delta 함수의 정의로부터 얻어지며  $u'$  의 의미는 요소 내부 점  $i$  에서의 미지수  $u$  이다.

(6) 식으로부터 다음 (7) 식을 얻을 수 있고 이것을 (4) 식에 고려하면

$$u' = - \iint_{\Omega} u \nabla^2 w d\Omega \quad (7)$$

다음 (8) 식을 얻을 수 있다.

$$-u' + \int_{\Gamma} q w d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (8)$$

(8) 식을 각각의 경계에 대해서 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u' + \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_1} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q w d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

weighting function  $w$  는 (5) 식을 만족하는 fundamental solution 으로 二次元 等方인 경우에 다음과 같은 Green 함수이다.

$$w = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (10)$$

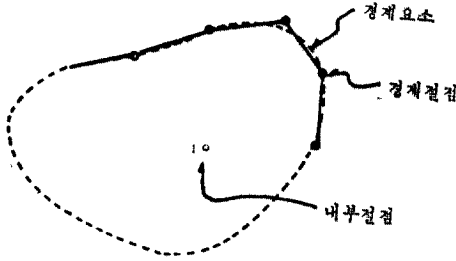
여기서  $r$  은 요소 내부의 점  $i$  에서 경계면에 이르는 거리이다.

단약 점  $i$  를 경계면(선)위에 두고 생각한다면 요소 내부의 점  $i$  에서 만족되는 (9) 식은 경계면 위에

서 다음과 같이 된다.

$$c'u' + \int_{r_i} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{r_i} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int_{r_i} \bar{q} w d\Gamma + \int_{r_i} q w d\Gamma \quad (11)$$

2. 線型要素를 사용한 境界要素方程式



여기서  $c'$  값은 경계 요소의 모양에 따라 결정되는 값으로 그 경계요소들이 직선일 때에는  $c' = \frac{1}{2}$  이 되며 그렇지 않을 경우는 경계요소방정식에서 주어지는 어떤 조건에서부터 구할수가 있다.

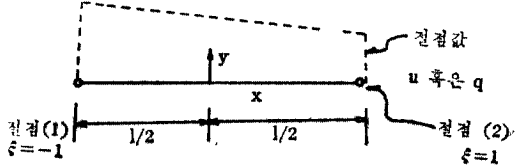


그림 1. 線型境界要素

(11)식을  $n$  개의 요소에서 선형 요소를 사용한 경계 요소 방정식을 만들면

$$c'u' + \sum_{j=1}^n \int_{r_j} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^n \int_{r_j} q w d\Gamma \quad (12)$$

線型補間函數  $\phi$ , 를 쓰서 각 요소에 대한  $u$  및  $q$  를 나타내면

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = [\phi_1, \phi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ q(\xi) &= \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = [\phi_1, \phi_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$\xi = \frac{2x}{l}, \quad \phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (14)$$

이며 이것을 (12)식에 대입하면

$$\begin{aligned} c'u' + \sum_{j=1}^n \int_{r_j} [\phi_1, \phi_2] \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ = \sum_{j=1}^n \int_{r_j} [\phi_1, \phi_2] w d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

즉,  $c'u' + \sum_{j=1}^n [h_{1j}, h_{2j}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n [q_{1j}, q_{2j}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} h_{1j} &= \int_{r_j} \phi_1 \frac{\partial w_j}{\partial n} d\Gamma, \quad h_{2j} = \int_{r_j} \phi_2 \frac{\partial w_j}{\partial n} d\Gamma \\ q_{1j} &= \int_{r_j} \phi_1 w_j d\Gamma, \quad q_{2j} = \int_{r_j} \phi_2 w_j d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

(16)식을 전체 경계  $j=n$  요소에 대하여 行列로 나타내면

$$c'u' + [\hat{H}_{11}, \hat{H}_{12}, \dots, \hat{H}_{1n}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = [G_{11}, G_{12}, \dots, G_{1n}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서  $\hat{H}_{ij}$  등은 요소  $j$  의  $h_{ij}$ 項과 요소  $j-1$ 의

$h_{ij}$ 項의 합으로 되고  $j$ 절점은  $j-1$  요소와  $j$  요소 사이의 절점을 의미한다.

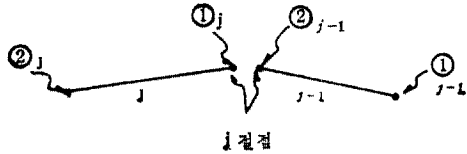


그림 2.  $\hat{H}_{ij}$  및  $G_{ij}$  의 설명

(18)식에서

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \hat{H}_{ij} \quad \text{when } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} &= \hat{H}_{ij} + c' \quad \text{when } i = j \end{aligned} \quad (19)$$

이라면 (18)식은 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (20)$$

이때  $c'$  값을 구하기 위하여 전체 경계에서 uniform potential 이 주어 진다고 가정하면 ( $u = \text{const}$ ) 그때 그 normal derivative 는 0이어야 한다. ( $q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ). 즉,

$$\sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = 0 \quad (21)$$

이 되고 임의의 行에서  $H$  의 모든 요소 元들의 합계는 0이 되어야 하니까 對角元들의 값은  $h_{ii} = -\sum_{j \neq i} h_{ij}$  로 부터 계산 될 수 있다.

일단 모든 경계절점에서  $u$  와  $q$  값이 얻어지면 요소 내부의 임의의 점  $i$  에서의  $u'$  값은 (8)式으로부터 다음과 같이 구할수 있고 이들의 flux  $q_s$  ( $q_s = \frac{\partial u}{\partial x}$ ) 및  $q_y$  ( $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ) 는 (23)式으로 나타낼 수 있다.

$$w = \int_r q w d\Gamma - \int_r u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} (q_x)' &= \int_r q \frac{\partial w}{\partial x} d\Gamma - \int_r u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \\ (q_y)' &= \int_r q \frac{\partial w}{\partial y} d\Gamma - \int_r u \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Ⅲ. 微小振幅波 理論의 假定에 따른 境界條件의 適用

미소진폭과 이론에 따른 속도 potential  $\phi$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi(x, z, t) = \Phi(x, z) e^{-i\sigma t} \quad (24)$$

이때

$$\Phi(x, z) = -\frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{ikx} \quad (25)$$

로 주어지며 여기서  $\sigma$  = 振動數,  $k$  = 波數,  $h$  = 水深,

$H$  = 波高를 나타낸다.

上記와 같이 주어지는 波의 속도 potential의 時間項에 관한 係數  $\Phi$ 는 역시 Laplace 방정식 ( $\nabla^2 \Phi = 0$ )을 만족하고 있으며 이  $\Phi$ 가 가지는 각 領域에서의 境界條件은 다음과 같다. (그림 3 참조)

① 進行波의 上端境界(A 領域)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = ik_A \Phi - 2ik_A \Phi,$$

② 海底 혹은 固體境界

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

③ 進行波의 下端境界(C 領域)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = ik_c \Phi$$

④ 自由水面上의 境界

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \Phi$$

(26)

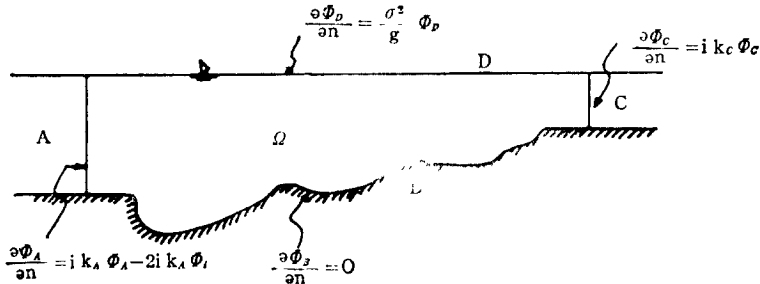


그림 3. 境界 조건

여기서 入射波에 관한  $\Phi_i$ 는 反射의 影響을 받지 않은 深海波로 주어지는 값이고 나머지  $\Phi$  값들은 계산 영역  $\Omega$  내에서 反射 및 傳達의 影響이 고려된 계산 되어져야 할 값들이다.

이러한 (26)式과 같은 境界 조건을 가지는 Laplace 방정식  $\nabla^2 \Phi = 0$ 은 (20)式에 의해서 풀수가 있다. 즉

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \Phi_j = \sum_{j=1}^n G_{i,j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \cdot H_i \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \\ \Phi_C \\ \Phi_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \cdot G_i \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik_A \Phi_A - 2ik_A \Phi_i \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ ik_C \Phi_C \\ \dots \\ \frac{\sigma^2}{g} \Phi_D \end{bmatrix} \quad (28)$$

이며 이것을 정리하면

$$[(H_{i,j} - K_{i,j}), G_{i,j}] \{\Phi_j\} = [G_{i,j}] \{C_j\} \quad (29)$$

여기서  $K_{i,j}$  및  $C_j$ 는 각 境界 A~D에 해당하는  $\Phi$  및  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 에 관한 계수들이다.

(29)式에서부터  $\Phi$ 를 계산하면 (25)式을 이용하여 自由水面境界의 波高  $H$  및 水面形狀  $\eta(\eta = -i \frac{\sigma}{g} \Phi e^{-i\sigma t})$ 를 구할수가 있고 (23)式으로부터 영역 내부의 유속 성분을 구할수가 있다. 수면 境界에서 수면 傾斜  $\eta$ 가 얻어지면 다음과 같은 관계식으로부터 波의 反사율 및 전달율을 계산할 수 있다.

$$a_i = \frac{1}{2} (|\eta|_{max} + |\eta|_{min}); \text{ 入사파의 진폭}$$

$$a_r = \frac{1}{2} (|\eta|_{max} - |\eta|_{min}); \text{ 反사파의 진폭}$$

$$R = \frac{a_r}{a_i} = \frac{H_r}{H_i}; \text{ 反사율}$$

Ⅶ. 프로그래밍과 계산에

본 계산을 수행하기 위한 프로그램의 간단한 흐름을 그리면 다음과 같다.

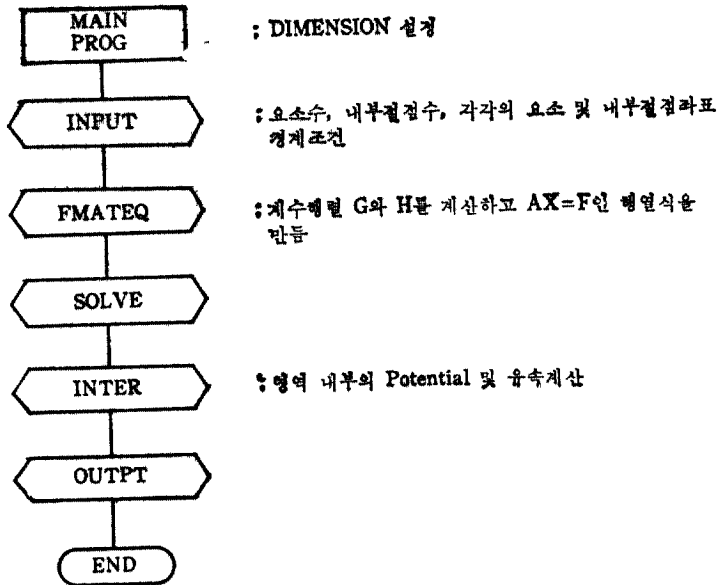


그림 4. Macro Flow

(29)식의  $H$  및  $G$  행렬의 원들을 얻기 위한 (17)식의 계산은 4점 Gauss 적분공식을 사용하였다. 각 수심에서의 波數  $k$ 는 바닥 경사가 일정하다는 가정 ( $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ )하에서 얻어진 진동수  $\sigma$ 와 파수  $k$ 와의 관계식 ( $\sigma^2 = gk \tanh kh$ )으로부터 구하였으나  $\frac{dh}{dx} \neq 0$ 인 경우에 대한 파동방정식을 유도한다면 더욱 좋은 결과를 얻을 것으로 생각한다.

계산에는 다음과 같은 가장 간단한 경우에 대한 검사를 함으로써 프로그램의 신뢰도를 확인하였다.

1. 일정한 수심에서의 진행파

계산 조건은 水深  $h=10.0$ , 파고  $H=2.0$ 으로 하였을 때 波의 週期를 表 1과 같이 변화시켜가면서 계

산하였다.

표 1. 각 주기에 대한 계산결과표

(수심  $h=10.0$ , 파고  $H=2.0$ )

계산종류	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6
주기 (T)	1.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
파장 (L)	1.6	14.1	24.6	36.5	48.3	59.8
파수 (k)	4.03	0.447	0.255	0.172	0.130	0.105
파장당경계요소수	0.32	2.81	4.92	7.30	9.66	11.96
계산결과 의 평가	×	×	△	○	○	○
파의분류	전해파			장파		

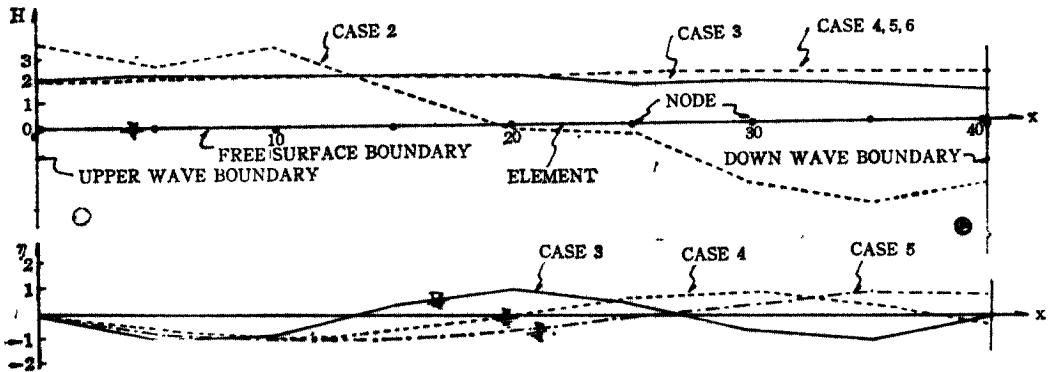


그림 5. 진행파의 파고 H 및 파형  $\eta$  (수면경계 격자간격=5.0)

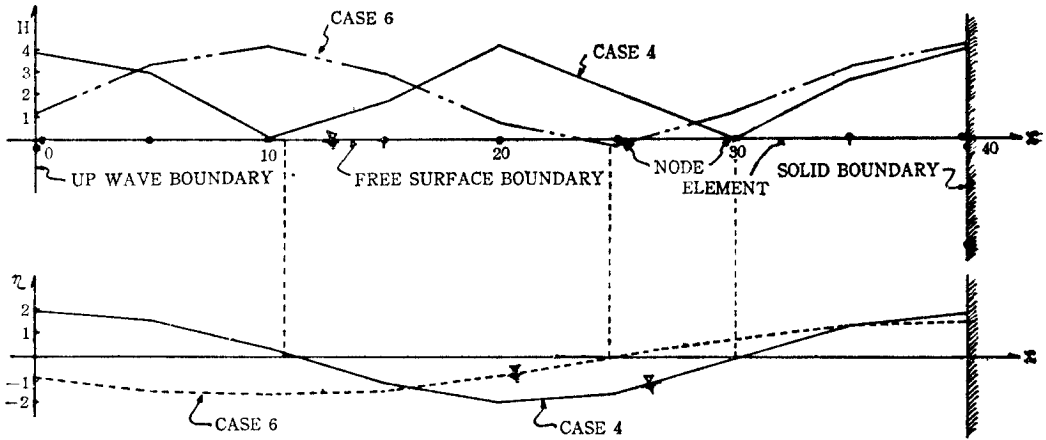


그림 6. 중복파의 파고  $H$  및 파형  $\eta(1)$  (수면경계 격자간격=5.0)

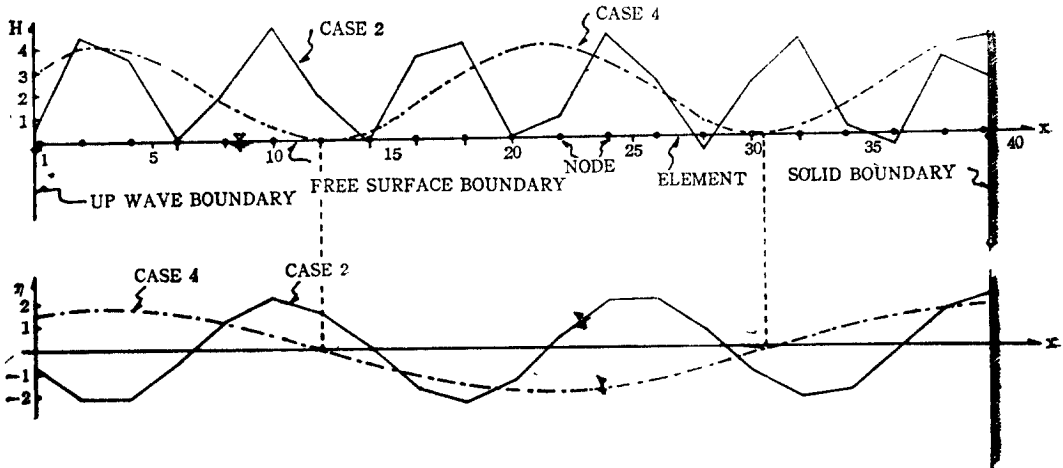


그림 7. 중복파의 파고  $H$  및 파형  $\eta(2)$  (수면경계 격자간격=2.0)

V. 結論 및 考察

계산 例 1의 결과는 自由水面境界의 節點數를 1波長當 7개 정도 이상 취하여야만 그 결과가 이론적으로 주어지는 波高  $H=2.0$ 과 잘 일치함을 알 수 있다. 즉 境界要素法을 사용하여 波浪을 解析할 때에는 먼저 그 波浪의 波長을 예측하고 그에 따라 要素數를 결정해 주어야 할 것이다.

계산 例 2는 完全 重複波의 이론적 결과와 잘 일치됨을 보여주고 있으며 그 要素數를 늘려 줌에 따라 柔軟한 결과가 얻어짐을 보였다.

본 연구에서는 波의 上端 境界 A에서 入射波와

反射波의 영향을 근사적으로 고려하였는데 실제로는  $x \rightarrow -\infty$ 로 취한 上端 境界를 취하도록 하여야 할 것이다. 그리고 사용한 波數  $k$ 는 水深이 一定하다는 假定 下에서  $(-\frac{\partial h}{\partial x} = 0)$  유도된 波動方程式에서 얻어진 결과를 사용하였으나 실제 문제에서는  $\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$ 이다.

그 한 특이한 경우가  $\frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow \pm\infty$ 인데 이것은 그 바닥 境界面이 鉛直한 경우인데 이러한 面上에 境界 節點을 취할 경우는 그 波數  $k \rightarrow 0$ 으로 된다. 즉 波高  $H$ 는 항상 최대가 된다. 고로 만약 海底 경사가 급한 경우에는  $-\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$ 인 假定 下에서 波動方程式을 유도하고 波數  $k$ 를 구하여야 할 것이다.

근래에 二次 혹은 그 이상 次數의 非線型波에 관한 해석은 그 이론 자체가 매우 복잡한 어려움이 있어 이를 數值解析 방법에 의해 바로 풀어 볼려는 연구가 계속되고 있다. (6,7,8)

본 연구는 有限振幅波라는 가정하에서 線型化시킨 自由水面 경계조건을 사용하였으나 여기서 계산된 自由水面의 결과를 다시 水面 境界條件으로 사용하는 방법을 강구한다면 二次 혹은 그 이상 次數의 非線型 波浪의 解析에도 확대 적용될 수 있을 것으로 생각한다.

### 謝 辭

본 연구는 정부 자금 지원에 의하여 미국 Delaware 대학에 파견되어 연구한 결과임을 밝히며 전산기 사용 등 여러가지 편의를 제공해 준 Delaware 대학 토목공학과 교수들과 대학원생 서 경덕 씨에게 감사함을 전한다.

### 참 고 문 헌

1. Mei, C.C. & Black, J.L.: Scattering of Surface Waves by Rectangular Obstacles in Water of Finite Depth, J. Fluid Mech, 38, 499~511, 1969.
2. Lassiter, J.B.: The Propagation of Water Waves over Sediment Pockets, Ph. D. thesis, M. I. T., 1972.
3. Kirby, J.T. & Dalrymple, R.A.: Propagation of Obliquely Incident Water Waves over a Trench, J. Fluid Mech. 133 47~63, 1983.
4. Kirby, J.T.: Propagation of Weakly Non-linear Surface Water Waves in Regions with Varying Depth and Current, Ph. D. thesis, U. of Delaware, 1983.
5. Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1980.
6. Dean, R.G. & Dalrymple, R.A.: Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists, Prentice Hall, 1984.
7. Dean, R.G.: Evaluation and Development of Water Wave Theories for Engineering Application, Vol. 1 and 2, Spec. Rep. 1, U.S. Army, Coastal Engineering Research Center, Fort Belvoir, Va., 1974.
8. Chappellear, J.E.: Direct Numerical Calculation of Nonlinear Ocean Waves, J. of Geophys. Res., Vol.66, No.2, 501~508, 1961.