

## 連續보의 最適設計에 관한 研究

鄭 永 植

土 木 工 學 科

(1981. 4. 10 접수)

### 〈要 約〉

本 論文은 斷面이 연속적으로 變하는 要素들로 된 連續보의 最適設計을 爲한 한 Optimality Criteria 方法을 提示한다. 이 方法은 처음 Taig가 提案하였으며 以後 著者에 依하여 많은 部分이 修正되었다. 처짐 勾配를 求할때 흔히 하는 것처럼 假想일의 方法을 利用하여 應力勾配를 近似的으로 表現하였고 이 近似的 表現이 効率的일 뿐 아니라 最適設計을 求하는데 充分히 正確함을 알 수 있었다. 各 要素의 斷面이 연속적으로 變하므로 要素의 어떤 斷面의 높이 대신 節點에서의 斷面의 높이를 設計變數로 擇하여 正確性을 期하였으며 例題를 풀어 이 方法의 効率性과 正確性을 立證하였다.

## Optimum Design of Continuous Beams

Chung, Young Shik

Dept of Civil Engineering

(Received April 10, 1981)

### 〈Abstract〉

This paper presents an Optimality Criteria method, which is first proposed by Taig and then modified by the author, to obtain the optimum design of continuous beams with tapered elements. An approximation to stress gradients is made using the method of virtual work, as is often the case with deflection gradients, and proves not only efficient but also accurate enough to find the optimum design. The depth of sections at nodal points is preferably chosen for the design variable since the depth of the tapered elements is continuously varying. Worked examples demonstrate the efficiency and accuracy of the method.

### I. 序 論

構造物 最適設計의 한 方法으로서 Optimality Criteria 方法은 지금까지 各 要素의 剛도가 設計變數에 直接 比例하는 構造시스템 즉 트러스에서 처짐 制約을 甚하게 받는 境遇에 主로 使用되어 왔고, 實際로 航空機 構造物의 設計에 쓰여지고 있다. 이 Optimality Criteria 方法의 Bending Element 에의 適用은 筆者<sup>1)</sup>와 Armand 및 Lodier<sup>2)</sup>等에 依하여 試圖되었고 이들 研究에서는 처짐 制約을 主된

制約條件으로 하고 應力制約을 副次的 制約條件으로 取扱하였었다.

本 研究에서는 斷面이 變하는 連續보가 應力制約만을 받는 境遇의 最適設計問題를 다루었는데, 幅이 定해져 있고 높이가 變하는 矩形斷面이나 Flange의 面積이 定해져 있고 Web의 높이가 變하는 I형 또는 Box형 斷面을 가진 連續보의 任意間隔으로 定한 各 節點에서의 높이를 設計變數로 하고 節點과 節點사이에서의 높이의 變化를 直線的인 것으로 하였다.

이와같은 連續보의 最適設計問題를

$$\left. \begin{aligned} \text{minimize } W &= \sum_{i=1}^n h_i D_i \\ \text{Subject to } \sigma_i &\leq \bar{\sigma}_i \\ \text{and } D_i &\geq D_{im} \text{ for } i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

으로 表現하고, 여기서  $W$ 는 보의 全體 重量 또는 Web部分의 重量을,  $\sigma_i$  및  $\bar{\sigma}_i$ 는 節點  $i$ 에서의 最大 彎應力 및 許容 彎應力을,  $D_i$  및  $D_{im}$ 은 節點  $i$ 에서의 높이( $i$ 번째 設計變數) 및 이 設計變數에 對應하는 最小 尺寸制約을 各各 나타낸다. 또한  $h_i$ 는 式(2)와 같이 表示되는데,

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \frac{1}{2}(w_{i-1} + w_i) \\ w_i &= \rho_i B_i L_i \\ w_0 &= w_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기서  $\rho_i$ ,  $B_i$ ,  $L_i$ 는 節點  $i$ 와 節點  $i+1$ 사이에 오는 要素의 比重量, 幅(또는 Web의 두께), 길이를 각각 나타낸다.

## II. Optimality Criteria의 誘導

(1)式으로 表示된 問題에서 어떤 設計  $\{D_i\}$ 가 最適 設計이기 爲한 Kuhn-Tucker의 必要條件은 (3) 式과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial D_i} + \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j \frac{\partial \sigma_j}{\partial D_i} - \gamma_i &= 0 \\ s_j \lambda_j (\sigma_j - \bar{\sigma}_j) &= 0 \\ \gamma_i (D_i - D_{im}) &= 0 \\ \lambda_j, \gamma_i &\geq 0 \text{ for all } j \text{ and } i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

그러면 여기서 Stress Gradient,  $\partial \sigma_j / \partial D_i$ 를 어떻게 表示하느냐 하는 問題와 이로부터 어떻게 Optimality Criteria를 誘導하느냐를 以下에서 다루기로 한다.

### 1. Stress Gradient

不靜定 構造物인 連續보의 어떤 斷面(節點  $j$ )에서의 最大 彎應力,  $\sigma_j$ 는 分明히 모든 設計變數  $D_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )의 函數이나 이 函數關係를 明白한 陽函數로 表示하는 것은 거의 不可能하고, 따라서 任意 斷面에서의 最大 彎應力の 任意 設計變數에 對한 偏微分,  $\partial \sigma_j / \partial D_i$ , 역시 明白한 式으로 表示할 수가 없다. 이 境遇 우리는 彎應力-設計變數 關係를 일단 近似的으로 세우고 이 近似的인 關係와 이로부터 얻어지는 結果를 되풀이 하여 使用함으로써 우리가 얻고자 하는 解에 到達하는 方法을 쓰게 된다.

彎應力-設計變數 關係를 가장 簡略하게 近似化하는 것은 彎모우멘트의 分布가 設計變數에 전혀 無關하다고 假定하는 것이다. 이러한 假定은 靜定 構造物에서는 勿論 眞實이나 不靜定 構造物에서는 相當히 無理한 假定이 된다. 즉 어느 한 斷面(節點  $j$ )에서의 最大 彎應力,  $\sigma_j$ ,는 純全히 그 斷面の 尺寸  $D_j$ 에만 關係된다는 假定이므로 設計空間에서 이 斷面에서의 應力制約에 相應하는 可能領域 境界面은  $D_j$ 軸에 直角인 Hyperplane이 되며, 이 Hyperplane은 原來的 可能領域 境界面에 接하는 것도 아니어서 現在의 設計 부근에서도 좋은 假定이 되지 못한다. 이와같은 假定에 根據한 Stress Ratio Algorithm은 가장 손쉽게 쓰이는 方法이기는 하나 收斂速度가 대단히 느리거나 不利한 設計로 收斂시키는 境遇가 있다.<sup>8)</sup>

한편 彎應力-設計變數 關係를 近似的으로 表現하되 이 近似的인 關係에 依하여 나타내어지는 Hypersurface가 現在의 設計에서 原來的 可能領域 境界面에 接하도록 하는 方法을 생각할 수 있다. 筆者는<sup>1)</sup> 보의 어떤 點에서의 처짐량을 그 點에 假想 荷重 1이 作用할 때 各 要素의 内部假想일의 總으로 表現하고 이로부터 近似的인 Deflection Gradient를 求한 바 있는데 本 研究에서는 같은 原理를 利用하여 보의 任意 斷面에서의 近似的인 Stress Gradient를 求하였다. 먼저 矩形 斷面の 境遇를 생각하면 그림 1에서 보는 바와 같이 點  $p$ 와  $p'$ 에 假想 彎  $ED/2b$  및  $-ED/2b$ 를 부과하고 이로 因한 各 要素의 内部假想일을 모두 합치면 斷面  $Q$ 에서의 最大 彎應力이 된다. 여기서  $E$ 는 그 要素의 彈性係數,  $D$ 는  $Q$  斷面の 높이이다. 萬一  $p'$  點은  $p$  點에 接近시키면  $Q$  斷面과  $P$  斷面이 一致되므로 斷面の 尺寸가 連續적으로 變하는 보에 있어서도 任意 斷面에서의 最大 彎應力을 (4)式에서와 같이 各 要素의 内部假想일의 總으로 表現할 수가 있다.

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^n \frac{12}{E_i B_i} \int_0^{L_i} \frac{M_0 M_j}{D^3} dx \quad (4)$$

여기서  $\sigma_j$ : 節點  $j$ 에서의 最大 彎應力,

$E_i$ : 要素  $i$ 의 彈性係數,

$B_i$ : 要素  $i$ 의 幅,

$L_i$ : 要素  $i$ 의 길이,

$M_0$ : 實際荷重에 依한 彎모우멘트,

$M_j$ : 節點  $j$ 에 假想彎이 作用할 때의 彎모우멘트,

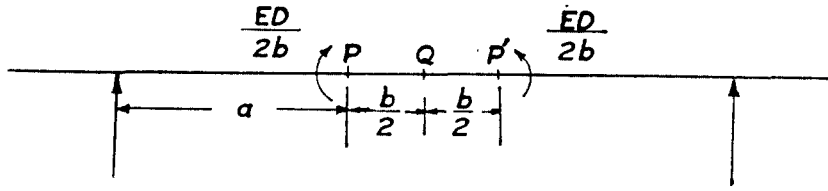


그림 1. 최대 침용력을 구하기 위한 가상하중

$D$ : 斷面の 높이,  
 $m$ : 要素의 數.

(4)式에서의 積分을 Simpson's Rule 에 의하여 數值積分하면 (4)式은 (5)式과 같이 되는데 여기서  $c_{ij}$ 의 값이 設計變數  $D_i$ 에 無關하다고 假定하면  $\sigma_j$ 의  $D_i$ 에 對한 偏微分은 (6)式과 같이 表示된다(그림 2 參照).

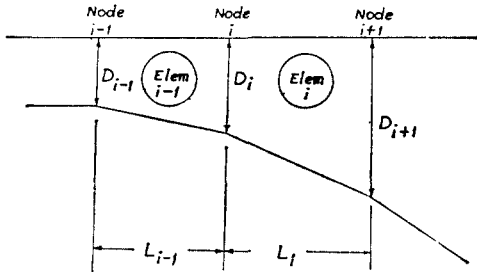


그림 2. 節點, 要素 및 設計變數

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^n \frac{c_{ij}}{D_i^3} \quad (5)$$

여기서,

$$c_{ij} = \frac{2L_{i-1}}{E_{i-1}B_{i-1}} \left[ \frac{16f_{m,i-1}^{(j)}}{\left(1 + \frac{1}{r_{i-1}}\right)^3} + f_i^{(j)} \right] + \frac{2L_i}{E_i B_i} \left[ f_i^{(j)} + \frac{16f_{m,i}^{(j)}}{(1+r_i)^3} \right]$$

$f_i^{(j)}$ : 節點  $i$ 에서의  $M_0 * M_j$ ,  
 $f_{m,i}^{(j)}$ : 要素  $i$ 의 中央點에서의  $M_0 * M_j$ ,  
 $r_i = D_{i+1}/D_i$ ,  
 $n$ : 節點의 數 =  $m+1$ ,  
 $L_0 = L_m = 0$ .

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial D_i} = -3 \frac{d_{ij}}{D_i^4} + \delta_{ij} \frac{\sigma_j}{D_j} \quad (6)$$

여기서,

$$d_{ij} = \frac{2L_{i-1}}{E_{i-1}B_{i-1}} \left[ \frac{32f_{m,i-1}^{(j)}}{\left(1 + \frac{1}{r_{i-1}}\right)^4} + f_i^{(j)} \right] + \frac{2L_i}{E_i B_i} \left[ f_i^{(j)} + \frac{32f_{m,i}^{(j)}}{(1+r_i)^4} \right]$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

한편 I형 또는 Box형 斷面을 가진 連續보인 境遇,  $B_i$ 를 要素  $i$ 의 Flange의 斷面積이라 하면 Stress 및 Stress Gradient는 (7)式 및 (8)式과 같이 나타내어 진다.

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^n \frac{c_{ij}}{D_i^2} \quad (7)$$

여기서,

$$c_{ij} = \frac{L_{i-1}}{3E_{i-1}B_{i-1}} \left[ \frac{8f_{m,i-1}^{(j)}}{\left(1 + \frac{1}{r_{i-1}}\right)^2} + f_i^{(j)} \right] + \frac{L_i}{3E_i B_i} \left[ f_i^{(j)} + \frac{8f_{m,i}^{(j)}}{(1+r_i)^2} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial D_i} = -2 \frac{d_{ij}}{D_i^3} + \delta_{ij} \frac{\sigma_j}{D_j} \quad (8)$$

여기서,

$$d_{ij} = \frac{L_{i-1}}{3E_{i-1}B_{i-1}} \left[ \frac{16f_{m,i-1}^{(j)}}{\left(1 + \frac{1}{r_{i-1}}\right)^3} + f_i^{(j)} \right] + \frac{L_i}{3E_i B_i} \left[ f_i^{(j)} + \frac{16f_{m,i}^{(j)}}{(1+r_i)^3} \right]$$

## 2. Optimality Criteria

Kuhn-Tucker의 必要條件, (3)式에 (6)式 또는 (8)式을 代入하여 矩形斷面 또는 I형(또는 Box형) 斷面을 가진 連續보의 最適設計을 爲한 Optimality Criteria를 誘導한다. (3)式에서  $s_j$ 는 節點  $j$ 에서의 實際荷重에 依한 彎모우멘트가 正이면 +1, 負이면 -1의 값을 갖는다. 이는  $\sigma_j$ 의 값이 (9)式에 依하여 計算될 때에 그 값이 正이건 負이건 問에 Lagrange 승수,  $\lambda_j$ 가 恒常 非負의 값을 갖도록 하기 爲한 配慮이다.

$$\sigma_j = \frac{6M_{j0}}{B_j D_j^2} \quad (\text{矩形斷面의 경우})$$

$$\sigma_j = \frac{M_{j0}}{B_j D_j} \quad (\text{I形斷面의 경우}) \quad (9)$$

여기서,

$M_{j0}$ : 節點  $j$ 에서의 彎모우멘트.

(3)식에 (6)식 또는 (8)식을代入하고 다시 (9)식을代入하여 矩形斷面 및 I형斷面을 가진 連續보에 對한 Optimality Criteria를 各各 (10)식 및 (11)식과 같이 求하였다.

$$\frac{3}{D_i^4 h_i} \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j d_{ij} - \frac{6s_i \lambda_i M_{i0}}{D_i^3 B_i h_i} = 1 - \frac{\gamma_i}{h_i} \quad (10)$$

$$\frac{2}{D_i^3 h_i} \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j d_{ij} - \frac{s_i \lambda_i M_{i0}}{D_i^2 B_i h_i} = 1 - \frac{\gamma_i}{h_i} \quad (11)$$

여기서  $\gamma_i$ 는 設計變數  $i$ 에 부과된 最小치수制約에 對應하는 Lagrange 승수로서  $D_i > D_{im}$ 이면(이때 이 設計變數  $i$ 를 Group 1에 屬한다고 한다) 零이고,  $D_i = D_{im}$ 이면(이때 이 設計變數  $i$ 를 Group 2에 屬한다고 한다) 正의 값을 가진다. 따라서 (10)식 및 (11)식 대신 (12)식 및 (13)식으로 代置할 수 있고  $\gamma_i$ 를 計算하지 않고도 設計의 最適性을 判斷할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{D_i^4 h_i} \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j d_{ij} - \frac{6s_i \lambda_i M_{i0}}{D_i^3 B_i h_i} \\ = 1 \text{ for } i \in \{\text{Group 1}\} \\ < 1 \text{ for } i \in \{\text{Group 2}\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{D_i^3 h_i} \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j d_{ij} - \frac{s_i \lambda_i M_{i0}}{D_i^2 B_i h_i} \\ = 1 \text{ for } i \in \{\text{Group 1}\} \\ < 1 \text{ for } i \in \{\text{Group 2}\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Optimality Criteria 方法이란 Berke<sup>4)</sup>가 表現했듯이 “어떤 演繹의 條件이 指定되어 이 條件을 만족하는 設計가 바로 最適設計가 되는 方法”을 말한다. 이 方法에서는 直接 目的函數(여기서는 材料의 重量)를 最小化 하는 것이 아니고 設計가 (12)식 또는 (13)식을 만족도록 함으로써 最適設計가 되도록 하는 것이다.

### III. 再設計 알고리즘

筆者<sup>3)</sup>는 Taig<sup>5)</sup>의 方法을 일부 修正하여 단든 再設計 알고리즘을 制約을 받는 連續보와 應力制約을 받는 트러스에 適用하여 修正된 方法이 信賴性과 效率性 兩面에서 Taig의 方法보다 優秀함을 밝힌 바 있다. 여기서는 應力制約을 받는 連續보의 一回의 再設計를 아래 順序에 따라 遂行하였다.

1) 現在의 設計를 解析하여 各 節點에서의 最大 應力을 求한다.

2) 解析結果로부터 Active Constraint의 List를 작성하고 이들에 대한  $c_{ij}$  및  $d_{ij}$ 를 計算한다.

3) Lagrange 승수  $\lambda_j$ 를 推定한다.

4) (12)식 또는 (13)식으로부터 새로운 設計를 求한다.

5) 새로운 設計가 Active Constraint들을 等號로써 만족하는지를 檢討하고 萬一 滿足하면 第8段階로, 滿足하지 않으면 第6段階로 간다.

6)  $\lambda_j$ 의 값을 改善한다.

7) 改善된  $\lambda_j$ 의 값이 모두 陽數이면 第4段階로 간다. 萬一 改善된  $\lambda_j$ 中 負의 값을 가지는 것이 있으면 이들을 일단 零으로 놓고 第4段階로 간다. 그러나 이 現象이 2回 繼續되면 負의  $\lambda_j$ 에 該當하는 制約條件을 Active Constraint의 List에서 除去하고 第3段階로 간다.

8) 現在의 設計에서 最小치수制約보다 작은 값을 가진 設計變數가 存在하면 이들을 設計空間에서 除去하고 第4段階로 간다. 萬一 이와같은 設計變數가 發見되지 않으면 今回의 再設計를 모두 끝낸다.

第4段階에서 얻은 設計는 Optimality Criteria는 滿足하나 制約條件은 滿足할 수도 하지않을 수도 있다. 萬一 이 設計가 制約條件을 滿足하지 않으면 第6段階에서  $\lambda_j$ 의 값을 改善하고 다시 第4段階로 가는 反復法을 쓰게 되는데, 모든 active한 制約條件이 等號로써 滿足될때까지 反復하여 施行한다. 이는 結局 Active Constraint의 數와 같은 數의 非線型聯立方程式을 풀어  $\lambda_j$ 의 값을 求하는 課程인데 Taig와 筆者는 Newton-Raphson 方法을 使用 하였다. 第3段階에서는 Newton-Raphson 方法에서 必要한  $\lambda_j$ 의 初期值를 定하게 되는데 個個의 制約條件이 唯一하게 active한 것으로 假定할 때의 各 制約條件에 對應하는  $\lambda_j$ 의 값을 算定하였다. 第4段階에서는 주어진  $\lambda_j$ 로부터  $D_i$ 를 求하게 되는데, 方程式 (12) 또는 (13)이 實正根을 갖지 않으면  $D_i$ 를  $D_{im}$ 으로 놓거나 Stress Ratio로부터 얻어지는 값으로 하였다. (12)식을 變形하여 4次方程式 (14)를 얻고,

$$D_i^4 - a_i D_i - b_i = 0 \quad (14)$$

여기서,

$$a_i = 6s_i \lambda_i M_{i0} / B_i h_i$$

$$b_i = \frac{3}{h_i} \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j d_{ij}$$

$a_i \geq 0$ 이므로 Descartes의 符號法則에 따라  $b_i > 0$ 이면 實正根이 唯一하게 存在하고  $b_i \leq 0$ 이면 實正根이 存在하지 않음을 안다.

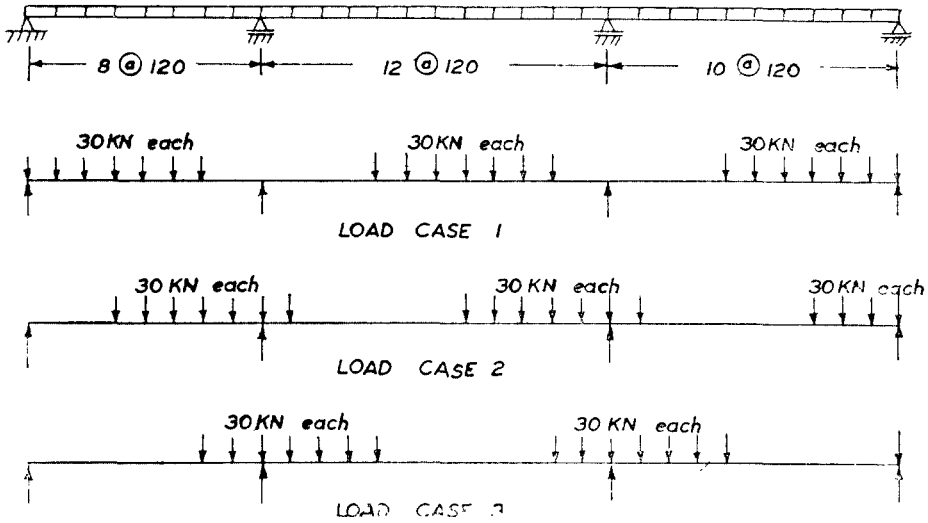


그림 3. 例題 4.1

IV. 適用例

지금까지 說明한 方法의 實用性을 立證키 爲하여 應力制約만을 받는 連續보의 두가지 境遇를 例로 들었으며, Program의 遂行은 PRIME 400과 PRIME 550에 依하였다.

1. 3徑間 非對稱 連續보

矩形斷面 連續보로서 幅은 미리 定해져 있고(이 問題에서는 모두 40cm) 各 節點에서의 높이가 設計變數이며 節點과 節點사이에서의 斷面의 높이는 直

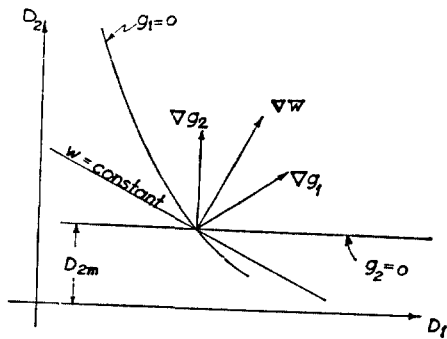


그림 4. Gradient Vectors

線的으로 變한다. 그림 3에서 보는 바와 같이 要素의 數는 30, 節點의 數는 31이며 따라서 設計變數의 數도 31이고, 3가지의 荷重條件下에 놓여 있다. 또한 어느 節點에서도 最大 彎應力이 1kN/cm<sup>2</sup>를 超過할 수 없으며 斷面의 높이는 40cm 以下가 되어서는 아니 되도록 制約되어 있다. 材料의 比重量은 2.4TON/M<sup>3</sup>이다.

第12回 再設計의 結果가 表-1에 실려 있다. Group 1에 屬하는 設計變數에 對한 (12)式의 값들은 모두 1에 매우 接近해 있으며, Group 2에 屬하는 設計變數에 對한 (12)式의 값들은 모두 1보다 작다. 이 設計는 Optimality Criteria (12)式을 거의 正確히 滿足하고 있으며 따라서 最適設計임을 알 수 있다.

또한 이 最終設計로부터  $\lambda_i$ 와  $\gamma_i$ 의 값들을 計算하였는데 表-1에서 보는 바와 같이 모두 非負이다. 이 問題에서는 31個의 應力制約條件과 31個의 最小치수制約條件이 있는데 이들중 31個의 active한 制約條件(19個의 應力制約과 12個의 最小치수制約)에 對應하는  $\lambda_i$  또는  $\gamma_i$ 의 값은 모두 陽數이고 나머지 31個의 inactive한 制約條件에 對應하는  $\lambda_i$  또는  $\gamma_i$ 의 값은 모두 零이다. 表-1에서 나타낸  $\lambda_i$  및  $\gamma_i$ 의 陽數인 값들은 目的函數의 Gradient Vector,  $\nabla W$ 를 active한 制約條件들의 Gradient Vector,  $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots$ 의 一次結合으로 表示할 때의 係數들인 바, 이들이 모두 陽數라 함은 表-1에 나타난

表-1 例題 1.4의 最終設計

Node No. (i)	$D_i$ (cm)	Max. Stress (KN/cm <sup>2</sup> )	Load case	(12)式의 값	$\lambda_i$ (X 10 <sup>2</sup> )	$\gamma_i$ (X 10)
1	40.00	.000	1	0.011	0	570
2	40.00	.765	1	0.062	0	1,081
3	43.72	.999	1	0.999	2,184	0
4	45.35	.999	1	0.999	2,137	0
5	42.30	.999	2	0.999	1,916	0
6	40.00	.806	2	0.087	0	1,055
7	40.00	.469	1	-0.243	0	1,429
8	52.60	1.000	1	1.002	4,013	0
9	69.16	1.000	1	1.001	4,941	0
10	57.67	1.000	1	1.002	4,214	0
11	43.23	1.000	1	1.002	3,180	0
12	40.00	.770	3	-0.005	0	1,155
13	40.00	.850	3	0.241	0	879
14	44.31	.999	1	0.998	2,062	0
15	48.37	.999	1	0.998	2,603	0
16	46.65	.999	1	0.998	2,842	0
17	40.04	.999	2	0.999	2,753	0
18	40.00	.721	2	-0.131	0	1,304
19	40.00	.973	1	0.132	0	997
20	62.30	1.000	1	1.001	2,952	0
21	78.78	1.000	1	1.000	3,848	0
22	66.72	1.000	1	1.000	3,141	0
23	51.92	1.000	1	1.001	2,221	0
24	40.00	.659	2	0.212	0	906
25	40.00	.691	3	-0.060	0	1,221
26	45.05	.999	1	0.999	3,015	0
27	52.01	.999	1	0.999	3,365	0
28	53.28	.999	1	0.999	3,357	0
29	49.33	.999	1	1.000	3,056	0
30	40.00	.928	1	-0.044	0	1,203
31	40.00	.000	1	-0.009	0	581

設計가 (3)式을 모두 滿足함을 뜻하며 幾何學的으로는 Farkas' lemma 에 따라 그림 4에서 보는 바와 같이  $\nabla W$  가 恒常  $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots$ 로 生成되는 Convex Cone 의 内部에 있음을 보인다. 이들 陽의  $\lambda_i$  및  $\gamma_i$ 의 값들은 上述한 바와 같이 設計의 Optimality 를 立證할 뿐만 아니라 (15) 및 (16)式에서 보는 바와 같이 目的函數의 制約條件에 對한 Sensitivity 를 나타내므로 設計者에게 대단히 重要한 情報가 된다.

$$-\frac{\partial W}{\partial \bar{\sigma}_i} = \lambda_i \tag{15}$$

$$\frac{\partial W}{\partial D_{im}} = \gamma_i \tag{16}$$

2. 3徑間 對稱 連續보

本 例題는 그림 5에서 보는 바와 같이 構造와 荷重이 對稱인 矩形斷面의 連續보이며, 斷面의 幅은 모두 40cm, 節點의 數는 29, 要素의 數는 28, 許容 彎應力 0.5KN/cm<sup>2</sup>, 比重量 2.4 TON/M<sup>3</sup>, 그리고 最小寸數制約이 20cm 이다. 表-2는 第15回 再設計의 結果를 보이는데 이 設計 또한 對稱이며 Optimality Criteria (12)式이 매우 잘 滿足되고 있다.

表-2 例題 4.2의 最終設計

Node No. (i)	$D_i$ (cm)	Max. Stress (KN/cm <sup>2</sup> )	Load Case	(12)式의 값
1	20.00	0.188	2	0.004
2	20.00	0.150	2	0.026
3	20.00	0.140	1	0.092
4	20.00	0.210	1	0.218
5	20.00	0.304	1	0.419
6	20.00	0.398	1	0.317
7	44.80	0.500	1	1.000
8	56.31	0.500	1	1.000
9	65.83	0.500	1	1.000
10	58.59	0.500	1	1.000
11	50.33	0.500	1	1.000
12	34.39	0.500	1	1.000
13	20.00	0.478	4	0.215
14	38.97	0.500	1	0.999
15	53.56	0.500	1	1.000
16	38.97	0.500	1	0.999
17	20.00	0.478	4	0.215
18	34.39	0.500	1	1.000
19	50.33	0.500	1	1.000
20	58.59	0.500	1	1.000
21	65.83	0.500	1	1.000
22	56.31	0.500	1	1.000
23	44.80	0.500	1	1.000
24	20.00	0.398	1	0.317
25	20.00	0.304	1	0.419
26	20.00	0.210	1	0.218
27	20.00	0.140	1	0.092
28	20.00	0.150	3	0.026
29	20.00	0.188	3	0.004

例題 4.1과 4.2에 對한 Iteration History 가 表-3에 실려 있다. 이 表에 나타난 總重量은 每回의

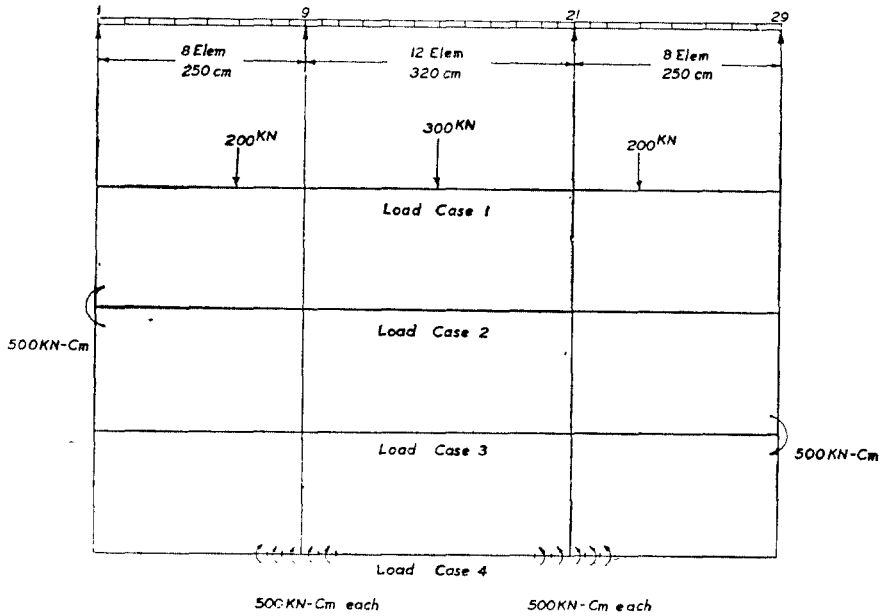


그림 5. 例題 4.2

表-3. Iteration History

Iteration	總 重 量 (kg)	
	例題 4.1	例題 4.2
0	24544	4912
1	18094	2843
2	16947	3165
3	17008	2852
4	16727	2778
5	16625	2752
6	16571	2734
7	16544	2709
8	16528	2678
9	16519	2644
10	16513	2632
11	16509	2622
12	16507	2618
13	—	2616
14		2616
15		2615

再設計마다 設計가 可能領域의 境界面에 오도록 scale 된 筭의 보의 總重量이다. 例題 4.1의 第3回

再設計 結果와 例題 4.2의 第2回 再設計 結果가 各 各 以前의 設計보다 더 무거운 것은 active 한 制約 條件의 識別에서 蹉跌이 생긴 때문이다. 그러나 그 후 곧 Active Constraint의 List가 安定되고 빠른 速度로 最適設計에 收斂하였음을 볼 수 있으며, 實際 設計를 爲하여는 대개 5-10회 程度의 再設計로써 滿足스러운 結果를 얻을 수 있다. 여기서는 다만 Optimality Criteria를 正確히 滿足하는 設計가 얻어지는 時를 알기 爲하여 各各 12回 및 15回的 再設計를 實施한 것이다.

### V. 結 論

本 研究에서는 Taig의 方法을 修正한 Optimality Criteria 方法을 應力制約 만을 받는 變斷面 連續보의 最適設計問題에 適用하였으며 아래와 같은 結論을 얻었다.

1) 假想일의 方法을 利用한 Stress Gradient의 近似的인 表現은 Bar Element<sup>3)</sup>에서와 마찬가지로 Bending Element에서도 最適設計를 求하는데 매우 有用하였다.

2) 서로 이웃한 節點에서의 力의 相對的 比가

1회의 再設計동안 變하지 않는다고 假定하여 얻은 (5)式 및 (6)式的 使用은 最適設計를 求하는 동안 아무런 問題를 誘發하지 않았다. 따라서 要素의 尺寸이 아닌 節點에서의 斷面의 尺寸을 設計變數로 取扱하는 것이 可能하였고 이로써 한 要素에서도 斷面의 尺寸이 連續적으로 變하는 問題를 풀 수 있었다.

3) 보통 應力制約만을 받는 問題가 처짐制約까지 받는 問題보다 훨씬 느리게 收斂하는 것으로 알려져 있으나<sup>6)</sup>, 本 研究에서 使用된 方法은 應力制約만을 받는 問題에서도 빨리 收斂하였을 뿐 아니라 Optimality Criteria 의 滿足度가 매우 높은 設計를 求하였다.

4) 構造物의 形狀이 점점 細長해 지고 高强度材料의 使用이 많아지는 추세이므로 앞으로의 設計에서는 처짐制約이 상당히 嚴格해 질 것으로 豫想되는 바 처짐制約과 應力制約을 同時に 받는 境遇에 對한 研究가 今後 必要할 것이며 여기서 使用된 方法은 이 境遇에 더욱 效率的일 것이다.

#### 謝 辭

本 研究는 文教部의 研究費 支援으로 이루어진 것임을 밝히며, 文教部 當局에 다시 한 번 感謝의 뜻을 表한다.

#### 參 考 文 獻

1. Chung, Y.S. *A Trial of Optimality Criteria Methods on Structural Optimization of Buildings*, M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Loughborough University of Technology, England, 1977.
2. Armand, J.L. and Lodier, B., "Optimal Design of Bending Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.13, 1978, pp.373-384.
3. 鄭永植, "Optimality Criteria 方法에 의한 보 및 트러스 構造物의 最適設計에 관한 研究", *大韓土木學會論文集*, 第28卷 第2號, 1980, pp.97~106.
4. Berke, L. and Khot, N.S., "Use of Optimality Criteria Methods for Large Scale Systems," *AGARD Lecture Series*, No. 70, 1975.
5. Taig, I.C. and Kerr, R.I., "Optimisation of Aircraft Structures with Multiple Stiffness Requirements", *AGARD Conference Proceedings* No.123, 1973, pp.16. 1-16. 14.
6. Gallagher, R.H. and Zienkiewicz, O.C., *Optimum Structural Design Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1973, p.45.