

有限要素法을 사용한 海水흐름의 數值解析

김성득 · 이용재 · 심명필

토목 공 학 과

(1980. 6. 10 접수)

〈요 약〉

潮汐이나 洪水 流入 등에 의한 海水의 水位 변동 및 흐름 등을 풀기 위해서는 보통 淺水方程式(shallow water equation)을 사용한다. 1次の 삼각형 요소를 사용하여 Galerkin 방법에 의해 上記 方程式을 有限要素方程式化 하고 시간에 대해서는 有限差分區劃 방법을 사용하여 積分하였다.

非線形의 傳達項(non-linear advective terms)들을 準線形化 하기 위해서는 time-extrapolated Crank-Nicolson 技法을 사용하였다. 세계의 淺水方程式은 각각의 時間位에서 쌍으로 결부되어 있다.

Global matrix의 sparsity를 최소로 하기 위해서 Compact storage 技法을 사용하였다. 각 時間位(time step)에서 線形代數連立方程式은 Gauss-Seidel iterative 방법을 사용하였다.

Numerical Experience from the Computation of Tidal Waves by the Finite Element Methods

S. D. Kim · Y. J. Lee · M. P. Shim

Dept. of Civil Eng.

(Received June 10, 1980)

〈Abstract〉

Shallow water equation is used to solve the problems of tidal effects, storm surges and currents in the sea. Galerkin's weighted residual methods was used to formulate the finite elements equation using the first order triangular element. The resulting ordinary differential equation are integrated using a finite difference discretization method in time. A time extrapolated Crank-Nicolson numerical integration scheme is employed to quasi-linearize the non-linear advective terms. The three equations constituting the shallow water equation are coupled at each time step.

A compact storage scheme is provided in which advantage has been taken of the sparsity of the global matrix. A Gauss-Seidel iterative procedure is employed to solve the linear systems of algebraic equations at each time step.

I. 서 론

淺水 方程式(shallow water equation)은 tide 나 表面水의 run-off 등의 연구에 이용된다. 이는 또 지구 회전력 효과(coriolis effect)를 고려한다면 대기

와 해양에서의 large-scale wave를 푸는데도 적용될 수 있다.

본 논문에서 다룬 shallow water equation의 유한 요소법에 의한 수치해석은 Baker^(1,2), Smith and Brebbia⁽⁹⁾, Cullen⁽⁵⁻⁸⁾, Brebbia and Partridge⁽³⁾, Connor and Brebbia⁽⁴⁾, Wang et al⁽¹⁰⁾에 의해 얻

구되어 왔으나 이를 실제로 풀기 위한 F.E. Program을 작성한 例는 극히 드물다. 본 논문은 I. M. Navon과 U. Muller⁽¹¹⁾에 의해 개발된 program을 이용하여 이를 확대 적용할수있는 방안을 제시하였다.

II. 기본 방정식의 유한요소화

1. 淺水方程式(shallow-water equation)

淺水方程式 model은 보통 깊이에 대해서는 평균적으로 고려된 2차원 場에서의 Navier-Stokes의 운동방정식과 한 제약조건으로 작용하는 연속방정식으로 되어 있다. 이것들은 초기조건과 경계조건들을 만족시켜주도록 함으로써 풀수가 있다. 두개의 운동방정식과 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - f v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_a}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \tau_x \Big|_b - \frac{1}{\rho} \tau_x \Big|_s = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f u + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_a}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \tau_y \Big|_b - \frac{1}{\rho} \tau_y \Big|_s = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi u) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi v) = 0 \quad (3)$$

여기서 $p = \frac{1}{h} \int_{-h}^{\eta} p_a dz$, $p = u, v$

$$H = h + \eta$$

$\varphi = gH$; geopotential

g : 중력가속도, h : 수심, η : 波高

u, v : x, y 방향의 평균속도 성분

f : coriolis parameter

ρ : 海水의 밀도

p_a : 대기압

$\tau_x \Big|_s = \frac{\gamma}{\rho} \frac{W_x}{H^2} (W_x^2 + W_y^2)^{1/2}$; 表面마찰력

$\tau_x \Big|_b = - \left(\frac{g}{C^2} \right) \rho \frac{p_x}{H} (u^2 + v^2)^{1/2}$, $p_x = u, v$,

바닥마찰력

W_x : 풍속

γ : 공기 밀도 ρ_a 와 관련된 parameter

C ; Chezy계수

상기 (1)(2)(3)식들의 경계조건 들은 어떤 A 라는 폐 영역의 육지 경계(land boundary or closed boundary) S_1 과 수면 경계(sea boundary or open

boundary) S_2 에서 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} (p_x)_n &= 0 \text{ on } S_1 \\ \varphi &= \varphi \text{ on } S_2 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $(p_x)_n$ 는 S_1 경계에 직각 방향의 속도 성분 u_n 혹은 v_n 이다.

2. 유한 요소법의 적용

폐 구역 A 를 삼각형 요소로 분할하고 1차의 보간함수(linear piecewise polynomial interpolation function)를 사용하면 전 삼각요소에서 각 변수 들은 다음과 같이 보간함수의 linear sum으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$u_{ei} = \sum_{j=1}^3 u_j(t) \phi_j \quad (5)$$

여기서

$u_j(t)$; 삼각요소의 결점 j 에서의 scalar nodal value이고

ϕ_j ; basis function(혹은 interpolation function)

으로 결점 좌표에 의해 결정된다.

Galerkin의 유한 요소법은 한 특수한 가중잔차법(weighted residual method)으로써 그 trial function 가체가 그 변수들을 나타내기 위해 사용되는 basis function과 같다는 것이다. 즉 한 system eq.을 다음과 같이 하면

$$L(u) - f = 0 \quad x \in A \quad (6)$$

경계조건

$$s(u) = p \quad x \in S \quad (7)$$

한 보간함수를 (8)식으로 놓고 이것이 경계조건 (7)식을 만족하게 한다.

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \quad (8)$$

그때 잔차(residual)는

$$\varepsilon = L(\sum \alpha_k \phi_k) - f = 0 \quad (9)$$

이 되고 이것은 그 보간함수 ϕ_i 에 관해서 직교(orthogonal)한다. 즉,

$$\iint_A [L(\sum \alpha_k \phi_k) - f] \phi_i dA = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (10)$$

이러한 관계를 內積으로 간단히 표시하면

$$\langle \varepsilon, \phi_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

운동방정식과 연속방정식에 대해서도 전체 영역의 각각의 요소에 대해서 (11)식과 같은 것을 만들어서 잘 알려진 assembly rule에 따라 전체 영역에 대해 assemble한다. 다음 이렇게 assemble된 완전한系の 방정식을 보간함수의 시간에 따른 계수(time

dependent coefficient)에 대해서 쓴다.

한 시간 位(time step)중에서 가장 먼저 풀어야 할 연속 방정식에 대해서 생각하면 이식은 Galerkin form으로 쓰면

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \phi_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(\varphi u), \phi_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial y}(\varphi v), \phi_i \right\rangle = 0 \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), \phi_i \rangle &= \sum_{\text{global}} \iint f(x, y) \phi_i dx dy \\ &= \iint f(x, y) \phi_i dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

M 는 적분 영역내의 요소수이다.

연속 방정식에서 그 advective 項들은 Green定理를 사용하면 변수들의 derivative에서 basis function의 derivative로 옮기도록 일반적으로 부근 적분 되어지는데 이것은 보통 경계의 어느 부분에서 만족되어야 할 natural boundary condition을 만족하게 한다. 즉 이것은 (14)식과 같다.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \phi_i \right\rangle - \left\langle \varphi u, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \varphi v, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\rangle \\ = - \int_{s_2} \varphi(p_i) n \phi_i ds \end{aligned} \quad (14)$$

운동방정식 (1)과 (2)도 Galerkin form으로 고쳐 보면,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \phi_i \right\rangle + \left\langle u \frac{\partial u}{\partial x}, \phi_i \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial u}{\partial y}, \phi_i \right\rangle - \left\langle f v, \phi_i \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \phi_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_a}{\rho} \right), \phi_i \right\rangle \\ - \left\langle \frac{1}{\rho} \tau_x \Big|_s, \phi_i \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \tau_x \Big|_s, \phi_i \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, \phi_i \right\rangle + \left\langle u \frac{\partial v}{\partial x}, \phi_i \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial v}{\partial y}, \phi_i \right\rangle + \left\langle f u, \phi_i \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \phi_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_a}{\rho} \right), \phi_i \right\rangle \\ + \left\langle \frac{1}{\rho} \tau_y \Big|_s, \phi_i \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \tau_y \Big|_s, \phi_i \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

전체 요소에 대해 같은 basis function ϕ 를 미지수 u, v, φ 에 대해 적용한다. 즉,

$$\varphi \approx \sum_{j=1}^3 \varphi_j(t) \phi_j, \quad u \approx \sum_{j=1}^3 u_j(t) \phi_j, \quad v \approx \sum_{j=1}^3 v_j(t) \phi_j \quad (17)$$

여기서 $\varphi_j(t), u_j(t), v_j(t)$ 는 각각 변수 φ, u, v 의 time dependent nodal value이다.

식 (17)을 식 (14)(15)(16)에 각각 대입하면,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \phi_i \right\rangle - \left\langle \varphi_j u_j \phi_j \phi_k, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \varphi_j v_j \phi_j \phi_k, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\rangle \\ + \int_{s_2} \varphi_j \phi_j p_{in} \phi_i ds = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial t}, \phi_i \right\rangle + \left\langle u_k \phi_k u_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v_k \phi_k u_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\rangle \\ - \left\langle f v_k \phi_k, \phi_i \right\rangle + \left\langle \varphi_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x}, \phi_i \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial v_j}{\partial t}, \phi_i \right\rangle + \left\langle u_k \phi_k v_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v_k \phi_k v_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\rangle \\ + \left\langle f u_k \phi_k, \phi_i \right\rangle + \left\langle \varphi_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y}, \phi_i \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

상기식 (18)(19)(20)에서는 기압변동항 $\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_a}{\rho} \right) \right)$, 바닥마찰항 $\left(\frac{1}{\rho} \tau_x \Big|_s \right)$ 및 표면 마찰항 $\left(\frac{1}{\rho} \tau_x \Big|_s \right)$ 는 무시했다. 일반적으로 바닥 마찰항은 무시할 수 없으나 이는 低 時間位에서 계산된 값을 대입함으로써 얻는다고 하면 常數로 취급할 수도 있다.

3. 時間 積分

time-extrapolated Crank-Nicolson 방법을 상기식 (18)(19)(20)식에 적용하였다. 이 방법은 (22)식과 같이 空間導函數(space derivative)를 포함하도록 나타낸 시간位 N 과 $N+1$ 에서 한 평균치를 잡는다. 반면 非線形 advective項은 다음식 (21)과 같이 놓음으로써 準線形化 한다.

$$\begin{aligned} u^{N+\frac{1}{2}} = u^* = \frac{3}{2} u^N - \frac{1}{2} u^{N-1} + O(\Delta t^2) \\ v^{N+\frac{1}{2}} = v^* = \frac{3}{2} v^N - \frac{1}{2} v^{N-1} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n) \\ \varphi_i = \frac{1}{2} (\varphi_i^{n+1} + \varphi_i^n) \end{aligned} \quad (22)$$

각각의 時間位에서 淺水方程式 係는 雙으로 되었다. 즉 한 주어진 시간位에서 한번 iteration을 하고 난 다음의 각각의 방정식 들의 解는 같은 시간位에서 똑같은 iteration에 대한 다른 두개의 방정식을 풀기위해 사용되었다.

연속방정식에 대한 time discretization을 적용하면 다음과 같다. (이것이 주어진 시간位에서 가장 먼저 풀어야 할 것이다.)

$$\begin{aligned} \left\langle (\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n) \phi_j, \phi_i \right\rangle - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \left\langle \varphi_j^{n+1} u_k^* \phi_j \phi_k, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\rangle \right. \\ \left. + \left\langle \varphi_j^{n+1} v_k^* \phi_j \phi_k, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\rangle \right\} - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \left\langle \varphi_j^n u_k^* \phi_j \phi_k, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\rangle \right. \end{aligned}$$

$$\left\langle \varphi_j^n v_k^* \phi_j \phi_k, \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad (23)$$

여기서

$$M = \iint \phi_j \phi_i dA, \quad K_1 = \iint \phi_j \phi_k u_k^* \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dA \\ + \iint \phi_j \phi_k v_k^* \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dA \quad (24)$$

이라 놓으면 연속방정식은

$$M(\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n) - \frac{Jt}{2} K_1(\varphi_j^{n+1} + \varphi_j^n) = 0 \quad (25)$$

같은 방법으로 운동방정식 (19), (20)에도 time discretization을 적용하면,

$$\left\langle (u_j^{n+1} - u_j^n) \phi_j, \phi_i \right\rangle + \frac{Jt}{2} \left[\left\langle u_j^{n+1} u_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right\rangle \right. \\ \left. + \left\langle u_j^{n+1} v_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right\rangle + \left\langle \varphi_k^{n+1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x}, \phi_i \right\rangle \right] \\ - \frac{Jt}{2} \left[\left\langle u_j^n u_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right\rangle + \left\langle u_j^n v_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right\rangle \right. \\ \left. + \left\langle \varphi_k^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x}, \phi_i \right\rangle \right] - Jt \left\langle f v_k^* \phi_k, \phi_i \right\rangle = 0 \quad (26)$$

$$\left\langle (v_j^{n+1} - v_j^n) \phi_j, \phi_i \right\rangle + \frac{Jt}{2} \left[\left\langle v_j^{n+1} u_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right\rangle \right. \\ \left. + \left\langle v_j^{n+1} v_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right\rangle + \left\langle \varphi_k^{n+1} \frac{\partial \phi_k}{\partial y}, \phi_i \right\rangle \right] \\ + \frac{Jt}{2} \left[\left\langle v_j^n u_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right\rangle + \left\langle v_j^n v_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right\rangle \right. \\ \left. + \left\langle \varphi_k^n \frac{\partial \phi_k}{\partial y}, \phi_i \right\rangle \right] + Jt \left\langle f u_k^* \phi_k, \phi_i \right\rangle = 0 \quad (27)$$

이 된다. 여기에 다음과 같은 matrix definition을 사용하면

$$M = \iint \phi_j \phi_i dA \\ K_2 = \iint u_k^* \phi_k \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dA + \iint v_k^* \phi_k \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dA \\ K_{21} = \iint \varphi_k^* \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \phi_i dA \quad (28)$$

$$P_2 = -f v_k^* \phi_k \phi_i dA$$

u -운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$M(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{Jt}{2} K_2(u_j^{n+1} + u_j^n) \\ + \frac{Jt}{2} (K_{21}^{n+1} + K_{21}^n) + Jt P_2 = 0 \quad (29)$$

또

$$K_3 = \iint u_k^{n+1} \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i dA + \iint v_k^* \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i dA \\ K_{31} = \iint \phi_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \phi_i dA \quad (30) \\ P_3 = \iint f u_k^{n+1} \phi_k \phi_i dA$$

으로 놓으면 v -운동방정식은 다음과 같다.

$$M(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{Jt}{2} K_3(v_j^{n+1} + v_j^n) \\ + \frac{Jt}{2} (K_{31}^{n+1} + K_{31}^n) + Jt P_3 = 0 \quad (31)$$

4. 요소 matrix

삼각 요소에 대해서 linear basis function을 사용하고 잘 알려진 natural 혹은 area 좌표계를 적용하면 면적 적분을 위한 다음 공식을 사용해서 삼각한 적분을 할수가 있다.

$$\iint_A \phi_i^a \phi_j^b \phi_k^c dx dy = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} \cdot 2A \quad (32)$$

여기서 a, b, c 는 integer이고

ϕ_i 들은 면적 좌표계이다. A 는 삼각형 ijk 의 면기므로 다음 식과 같이 주어진다.

$$2A = \begin{vmatrix} 1, & x_i, & y_i \\ 1, & x_j, & y_j \\ 1, & x_k, & y_k \end{vmatrix} \quad (23)$$

한 주어진 면적 좌표를 Cartesian 좌표로 나타내면 (34)식과 같이 된다.

$$\phi_i = \frac{1}{2A}(a_i y - b_i x + c_i), \quad i = i, j, k \quad (34)$$

여기서

$$a_i = y_j - y_k, \quad b_i = x_k - x_j, \quad c_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (35)$$

고로 basis function ϕ_i 의 미분은

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{a_i}{2A}, \quad i = i, j, k \quad (36)$$

(25), (29), (31)식은 다음과 같은 기본적인 1차식의 (3×3) 요소 matrix를 가진다.

즉,

$$(a) \quad M = \iint \phi_j \phi_i dA, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (32)$$

적분 방정식 (32)를 이용하면

$$\iint \phi_j \phi_i dA = \frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$(b) \quad \iint \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dA \quad \text{혹은} \quad \iint \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dA, \quad i, k = 1, 2, 3$$

적분 방정식 (32)식에 (36)식을 고려해서 생각하면

$$\iint \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dA = \iint \phi_k \frac{b_i}{2A} dA = \frac{1}{2A} \iint \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3)$$

$$b_3) dA = \frac{1}{2A} \cdot \frac{2A}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3)$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} b_1, b_2, b_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{pmatrix} \quad (38)$$

(c) $\iint \phi_k p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i dA$ 혹은 $\iint \phi_k p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i dA$

여기서 p_j 는 u_j, v_j, φ_j 를 나타낸다.

예를 들어

$$\begin{aligned} \iint \phi_k p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i dA &= \iint \phi_k p_j \frac{b_j}{2A} \phi_i dA \\ &= \frac{1}{2A} p_j b_j \iint \phi_i \phi_k dA = \frac{1}{2A} \Sigma p_j b_j \cdot \frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2, 1, 1 \\ 1, 2, 1 \\ 1, 1, 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{24} \Sigma p_j b_j \begin{pmatrix} 2, 1, 1 \\ 1, 2, 1 \\ 1, 1, 2 \end{pmatrix} \quad (39) \end{aligned}$$

(d) $\iint \phi_j p_i \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dA$ 혹은 $\iint \phi_j p_i \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dA$

에 관한

$$\begin{aligned} \iint \phi_j p_i \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dA &= \iint \phi_j p_i \phi_k \frac{b_i}{2A} dA \\ &= \frac{1}{2A} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{A}{12} p_j + \frac{A}{6} p_k \right) \\ &= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} (2p_1+p_2+p_3)b_1, (2p_1+p_2+p_3)b_2, \\ (p_1+2p_2+p_3)b_1, (p_1+2p_2+p_3)b_2, \\ (p_1+p_2+2p_3)b_1, (p_1+p_2+2p_3)b_2, \\ (2p_1+p_2+p_3)b_3 \\ (p_1+2p_2+p_3)b_3 \\ (p_1+p_2+2p_3)b_3 \end{pmatrix} \quad (40) \end{aligned}$$

III. 유한요소 방정식의 풀이

앞에서 주어진 식 (25), (29), (31)은 각각 N 시간위의 값을 줄이므로써 $N+1$ 시간위에서의 값이 구해지도록 되어있다. 계산 순서는 (25)식에서 구한 φ^{v+1} 의 값을 (29)·(30)에 대입하고 (29)식에서 구한 u^{v+1} 의 값을 (31)에서 이용되도록 된다.

각 요소에서 얻어진 (3×3) matrix를 $(n \times n)$ matrix로 assembly하면 (25), (29), (31)식은 각각 다음과 같은 선형연립방정식을 갖게 된다.

$$K \begin{matrix} X \\ \vdots \\ X \end{matrix} = R \quad (41)$$

상기 식 (41)에 경계 조건은 적용하는 방법은 경계 조건이 주어지는 선점값에 대응하는 K matrix의 대각원 및 R vector에 아주 큰 값(10^6)을 곱해주는

방법을 사용하였다.

상기 선형 방정식을 풀기 위하여 본 program에서 사용한 방법은 Gauss-Seidel iterative 방법으로 이는 아주 간단하다.

만약 direct solution을 구할려면 Irons¹²의 frontal technique program을 쓰면 된다. 만약 계산시간을 줄일려면 User-supplied S. O. R., A. D. I. 혹은 Conjugate-gradient method를 사용할수도 있다.

V. 전산 programming

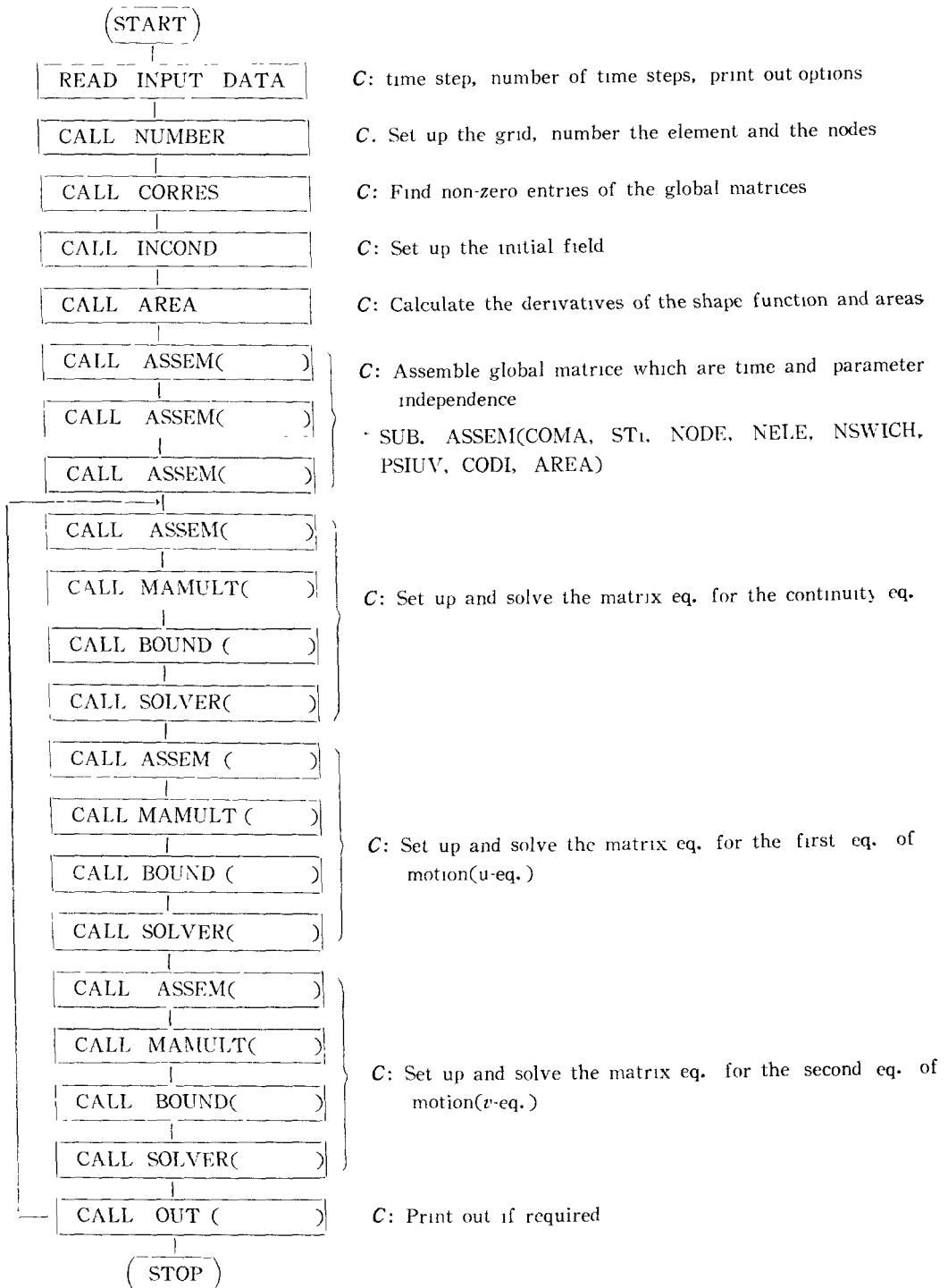
1. Compact storage scheme

일반적으로 요소 matrix를 assembly하여 얻어진 $(n \times n)$ 계수 matrix는 매우 영성하다. 즉 한 선점에 대해서 생각한다면 그 이웃한 선점(neighbouring node)수 만큼의 행(entry)은 행(row) 혹은 열(column)에 가지게 된다. 이는 한 선점과 이웃 선점들 간의 선점 번호의 최대 차이인 band폭 보다는 훨씬 적다.

고로 최대 이웃 선점수를 m 이라 할 때 $(n \times n)$ matrix를 $(n \times m)$ matrix로 만들어 주면 전산기의 core-storage를 크게 절약시켜 줄 수가 있다. 이렇게 하기 위하여 각 선점에 대한 이웃한 선점들의 번호를 차례로 기억시키고 이러한 이웃 선점번호와 $(n \times m)$ matrix의 m 만큼 대응시키는 global correspondence table을 만들면 된다. 이러한 유사한 Compact storage scheme이 George¹³와 Duff and Reid¹⁴에 의해 제안되었다.

2. Flow chart of main program

main program에는 단지 data card만 읽어드리고 다음에 약간의 예비계산들을 하고나서는 (그림 1)와 같이 Subroutine을 불러 계산한다. Simulation을 하고 있는 동안에도 시간이나 계수들에 무관제한 요소 matrix들은 미리 ASSEM을 불러서 계산한다. 경계 선점을 찾고나면 program은 main DO-loop로 들어 가는데 거기서는 모든 새로운 시간위에서 한번 계산한다. 이 DO-loop속에서 Simulation 시간이 설정되고 ASSEM과 MAMULT가 다른 global matrix를 만든다. global matrix들은 (25), (29), (31)식에 따라 모여진다. 각각의 방정식 들은 solve를 불러 解를 구하게 되고 미리 설정된 시간위의 번호에 따라 out를 불러 水位의 수도를 print한다.



(그림 1) Flow Chart of Main Program

V. 계산 예

다음과 같은 초기 수위 방정식을 가지는 문제를 고려한다.¹⁵

$$h(x, y) = H_0 + H_1 \tanh\left(\frac{9(D/2 - y)}{2D}\right) + H_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{9(D/2 - y)}{2D}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

초기 속도場은 지구 자전 영향을 고려해서 초기 수위 場으로부터 유도된다.

$$u = -(g/f) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v = (g/f) \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$f = \hat{f} + \beta(y - D/2)$$

여기 사용된 常數들은

$$L = 6000\text{km}, \quad D = 4000\text{km}, \quad \hat{f} = 10^{-4}\text{s}^{-1},$$

$$\beta = 1.5 \times 10^{-11}\text{s}^{-1}\text{m}^{-1} \quad g = 10\text{m/s}, \quad H_0 = 2000\text{m},$$

$$H_1 = 220\text{m}, \quad H_2 = 133\text{m}$$

시간과 격자간격은

$$\Delta x = \Delta y = 400\text{km}, \quad \Delta t = 1800\text{s}$$

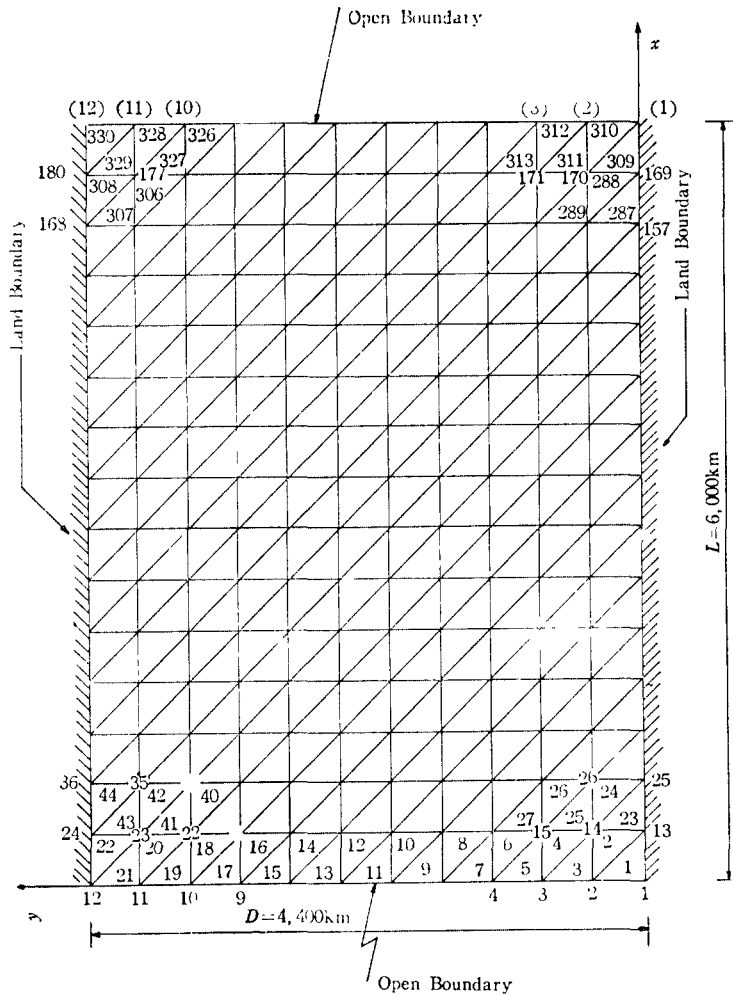
경계 조건은

x 방향으로는 periodic boundary condition이 주어진다고 가정하고,

y 방향으로는 다음과 같은 경계 조건이 주어진다고 가정한다.

$$v(x, 0, t) = v(x, D, t) = 0$$

10일간 즉 480시간위에 대해서 계산하는 동안 매



(그림 2) 계산예의 요소 및 절점번호

1일간 Simulation한 후 (48 time step후)에 print하도록 하였다. 요소와 절점 번호는 program 내부에서 만들어 지게 하였는바 그 모양은 다음 그림과 같다.

본 계산은 현대중공업의 IBM 370-148 전산기를 사용하였다.

Ⅶ. 결 론

淺水方程式(shallow water eqation)을 Galerkin의 방법에 따라 유한 요소법으로 해석하였으며 이것이 조석이나 홍수과의 流入 등으로 인한 海水의 흐름을 수치적으로 계산할 수 있음을 보여주었다.

이것은 종래의 유한 차분법¹⁶보다 그 경계 조건의 적용이 훨씬 간편함을 알수 있었고 isoparametric 요소 등을 사용하면 그 경계의 적합성을 더욱 높여 줄 수 있다.³

본 연구에서 작성한 compute program은 해석 혹은 수면 마찰 효과는 무시한 결과인바 곧 이것까지 고려한 program을 완성할 계획이며 그 계산 결과의 신뢰도 및 경제성을 높이기 위해서는 다음과 같은 연구가 이루어 지야 할 것이다.

- 1) 高次の 要素函數(higher order element function)에 대한 연구
- 2) 時間 積分(time integration) 技法 및 오차 발생의 예측
- 3) 非線形 문제를 풀기위한 최적 algorithm의 개발
- 4) 非線形 문제를 準 線形化하는 技法의 연구 및 이로인한 오차 발생 예측
- 5) 초기 조건이 simulation에 미치는 영향
- 6) 고정되지 않은 경계조건(movable boundary condition)을 고려한 방법의 연구
- 7) 능률적인 soft-ware의 개발

謝 辭

본 연구는 1979년도 재단법인 산학협동재단 학술연구비의 지원에 의한 것임을 밝히고 깊은 감사를 드린다.

참 고 문 헌

1. Baker, A.J.; Finite Element Solution Algo-

- rithm for Viscous Incompressible Fluid Dynamics, Int. J. Num. Meth. Eng., 1973.6, 89.
2. Baker, A. J.; A Finite Element Solution Algorithm for the Navier-Stokes Equation, NASA Report CR-2391, 1974.
3. Brebbia, C. A. and Partridge, P. W.; Simulation of Water Circulation in the North Sea, Appl. Math. Modelling, 1976, 1.
4. Connor, J. J. and Brebbia, C. A.; Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes-Butterworths, London, 1976.
5. Cullen, M. J. P.; A Simple Finite Element Method for Meteorological Problems, J. Inst. Math. Appl. 1973, 11.
6. Cullen, M. J. P.; A Finite Element Method for Nonlinear Initial Value Problem, J. Inst. Math. Appl. 1974, 13.
7. Cullen, M. J. P.; Application of the Finite Element Method to Numerical Weather Prediction, Ph.D. Thesis (U. of Reading), 1975.
8. Cullen, M. J. P.; On the Use of Artificial Smoothing in Galerkin and Finite Difference Solution of the Primitive Equation, J. R. Meteorol. Soc. 1976, 103.
9. Smith, S. L. and Brebbia, C. A.; Finite Element Solution of Navier Stokes Equations for Transient Two Dimensional Incompressible Flow, J. Comp. Phys. 1975, 17.
10. Wang, H. H., Halpern, P., Douglas, J. Jr. and Dupont, T.; Numerical Solutions of the One Dimensional Primitive Equations using Galerkin Approximations with Localized Basis Functions, Mon. Weather Rev. 1972, 100, 738.
11. Navon, I. M. and Muller, U.; A Finite Element Fortran IV Program for Solving the Shallow Water Equations, Advances in Engineering Software, 1979, Vol.1, No.2, 77.
12. Irons, B. M.; A Frontal Solution Program, Int. J. Num. Meth. Eng. 1970, 2.5.
13. George, J. A.; Computer Implementation of the Finite Element Method, ph.D. Thesis (Stanford U.), 1971, 222pp.
14. Duff, I. S. and Reid, J. K.; Some Design

- Features of a Sparse Matrix Code, Computer Science and System Design, CSS 48, Harwell 1977, 31pp.
15. Grammeltvedt, A. : A Survey of Finite Difference Schemes for the Primitive Equations for a Barotropic Fluid, Mon. Weather, Rev. 1969, 97. 384.
16. Leendertse, J. J. ; Aspects of a Computational Model in Long-Period Water Wave Propagation, Rand Co., Santa Monica, Calif. U.S. A. Memorendam R.M. 5294-PR. 1967.
17. Bathe, K. J., Wilson. E. L. ; Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1976.