울산대학교 연구논문집 제17권(인문·사회과학편) 제2호 pp. 67--75. 1986.
UOU Report Vol. 17. (Humanities and Social Science) No. 2. pp. 67—75. 1986.
University of Ulsan.

資本資産價格決定模型과 裁定價格決定理論에 관한 比較研究*

——非體系的 危險을 中心으로——

俞 凡 濬
經 營 學 科
(1986. 3. 21. 접수)

〈要 約〉

資本資産價格模型과 裁定價格決定理論은 資産價格決定의 條件인 收益生成過程을 비교하므로서 가장 잘 이해될 수 있다. 이 두 資産價格決定模型의 類似性은 危險資産에 대한 期待收益率과 實現收益率과의 偏差를 발생시키는 危險의 源泉을 均衡價格에 반영되는 위험과 반영되지 않는 위험으로 구분하는 데에서 찾을 수 있다. 또한 相異性은 두 模型이 均衡價格에 반영되지 않는 收益의 變動性(非體系的 危險)을 확인하는 方式의 差異에서 찾을 수 있다. 資本資産價格決定模型에서는 非體系的 危險을 나타내는 關係式의 殘差項을 期待收益率의 多變量正規性과 選好에 대한 假定으로 均衡價格에 반영되지 않는다고 보고 있는 반면, 裁定價格決定理論과 관련된 要因模型은 裁定포트폴리오의 條件에서 分散可能한 危險으로 간주하고 있다.

A Note on the Similiarities and the Differences between the Capital Asset Pricing Model and the Arbitrage Pricing Theory

Yu, Beom-Joon
Dept. of Management
(Received March 21, 1986)

〈Abstract〉

The Capital Asset Pricing Model and the Arbitrage Pricing Theory are two distinct pricing models. Neither one is a special case of the other. The similiarities and the differences between the CAPM and the APT are underestood best by looking at the return generating processes they identify as informative. The CAPM and the APT are similiar because they classify the sources which produce the deviation of the actual return on an asset from its expected return into two categories—those which are priced in the market and those which are not. In our discussion of these two models we shall focus on how each identifies the variations in assets returns which are not priced. It is the manner in which these two models identify the sources of variability which are unpriced that distinguishes the two distinct pricing models.

The CAPM is usually developed under the assumption that the distribution of asset returns is multivariate normal or that investor preferences can be represented by quadratic utility functions. These assumptions guarantee that the covariance between the so-called nonsystematic risk term, $\tilde{\varepsilon}_i$, and the marginal utility of wealth is equal to zero. The APT and utility-based factor models, by contrast, call for us to use the informative representations as those which produce $\tilde{\varepsilon}$'s that

*이 논문은 1985년도 문교부 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

contribute little to the variability of a well-diversifiable portfolio and are treated as diversifiable risk. To find such representations we need to identify the risks in the economy which are pervasive. The two asset pricing models thus lead us to ask very different questions.

Ⅰ. 序 論

資本資産價格決定模型(Capital Asset Pricing Model; CAPM)과 裁定價格決定理論(Arbitrage Pricing Theory; APT)은 現代資本市場理論에서 가장 대표적인 證券資産의 價格決定模型으로서 중심적인 역할을 해 왔다. CAPM(Sharpe[1964], Lintner[1965], Mossin[1962], Black[1972])은 制限的 假定下에서 模型構造의 單純性과 實證可能性이라는 두 特性때문에 오랫동안 學界에서 큰 주목을 받았으나, Roll[1977]의 CAPM에 대한 전면적 批判과 Ross[1976, 1977]의 代案的인 價格決定模型인 APT의 제시된 이후, APT는 Heberman[1982], Ingersoll[1981]등에 의해 계속 발전되어 왔다.

本稿에서는 CAPM와 APT의 類似性과 相異性에 대해 比較考察할 것이다. 우선 두 理論의 類似性은 危險資産에 대한 期待收益率 E_i과 實現收益率 $\tilde{R}_i$과의 偏差를 발생시키는 危險의 源泉에 대해 유사한 견해를 가지고 있다는 데에서 찾을 수 있다. 즉 두 模型 모두 危險源泉을 市場均衡價格에 반영되는 危險과 반영되지 않는 危險으로 구분하여 파악하고 있다. 이 對立되는 두 위험은 體系的 危險과 非體系的 危險, 分散可能危險과 分散不可能危險, 또는 市場危險과 固有危險으로 일컬어진다. 또한 本稿에서는 두 價格決定模型이 均衡價格에 반영되지 않는 收益의 變動性(非體系的 危險)을 확인하는 方式의 差異에서 相異性을 찾고자 한다.

Ⅱ. 定 義

CAPM과 APT의 構造的 論議에 앞서 主要概念에 대해 定義를 확인코자 한다. 個別證券 i의 收益率 $\tilde{R}_i$는 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_k$가 確率變數일 경우 항상 다음과 같은 關係式 (1)으로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{R}_i = E_i + \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(\tilde{x}_j - \bar{x}_j) + \tilde{\epsilon}_i \tag{1}$$

여기서 $\tilde{x}_j - \bar{x}_j$는 고려중인 모든 증권이 共通的으로 갖게 되는 要因으로 平均이 영임.

E_i = i 증권의 期待收益率

b_{ij} i 증권의 k要因에 대한 敏感度

$\tilde{\epsilon}_i$ 殘差

이때 市場은 完全競爭的 資本市場을 假定하며, 모든 投資家들은 k要因에 의해 說明되는 收益率에 대해 同質的 期待(homogeneous expectation)를 한다. 또한 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$는 確率變數 $\tilde{x}_j$와 獨立的임을 가정한다. 式 (1)은 收益生成過程을 나타내 주는 統計學的 關係式(statistical representation)이다.

이때 $b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{ik}$는 i증권의 각 요인에 대한 體系的 危險을 나타내 주는 母數로 볼 수 있으며, $\tilde{\epsilon}_i$는 k要因들과 무관하게 실현되는 非體系的 危險으로 볼 수 있다. 投資家가 資産의 價格決定에서 가장 有用한 情報는 미래 市場에서 형성되는 實現收益率과 동일한 i증권의 期待收益率 E_i를 결정할 수 있게 하는 情報일 것이다. 期待收益率은 競爭市場에서 去來를 통해서 實現되는 것이다. CAPM에서는 個別證券의 收益率과 單一母數(體系的危險)와의 線型的 關係를 式 (1)과 같이 表現하고 있고, APT에서는 個別證券의 收益率과 複數母數와 線型的 關係를 CAPM과 다른 關係式으로 나타내고 있다. 다시말하면, 모든 資産價格決定模型은 市場이 均衡狀態를 형성할때, 投資家가 특정한 證券에 대한 期待收益率을 결정하는 데에 필요한 證券의 特性에 관한 모든 情報를 母數를 통해 제공해 주고 있다고 할 수 있다.

어떤 포트폴리오를 n個의 證券資産으로 구성한다면, 각 資産에 대한 構成加重値 α_i를 알아야 할 것이다. 式 (1)에서 個別證券의 收益率을 몇몇 確率變數로서 표현한 것과 마찬가지로 i포트폴리오의 收益率도 아래式 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{R}_i = E_i + b_i(\tilde{R}_p - \bar{R}_p) + \tilde{\epsilon}_i \tag{2}$$

여기서 $\tilde{R}_p$는 포트폴리오의 收益率이고, $\bar{R}_p$는 포트폴리오의 期待收益率의 平均値이다. 이때 i 證券의 期待收益率과 實現收益率과의 偏差$(\tilde{R}_i - E_i)$는 포트폴리오의 實現收益率과 期待收益率의 偏差에서 기인되는 $b_i(\tilde{R}_p - \bar{R}_p)$의 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$로 나누어진다. 이때 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$에서 유래되는 非體系的 危險은 殘差項과 殘差項이 서로 相關關係를 가지고 있기 때문에 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{\epsilon}_i = 0$의 條件이 성립되어 제거되기 마련이다.

Ⅲ. 資本資産價格決定模型

본래 CAPM은 證券資産의 收益率을 式 (1)과 같은 關係式으로 表現하여 模型을 전개하지 않았다. CAPM은 投資家가 平均・分散基準에 의해 포트폴리오를 구성한다는 假定에서 출발하였다. 個別投資家는 危險回避型이기 때문에 위험이 높은 포트폴리오가 그 위험에 상응하는 수익을 報償치 않을 때는 위험이 낮은 포트폴리오를 위험이 높은 포트폴리오의 代用하지 않을 것이다.

CAPM은 투자가의 選好에 대한 특정한 假定과 그 選好體系가 지니는 基準에 理論的 根據를 두고 있다. 選好에만 의한다면, 어떤 투자가도 소유할 수 있는 無限한 數의 포트폴리오의 結合이 가능할 것이다. 그러나 실제로 理性的 投資家가 소유하려는 위험자산에 대한 포트폴리오는 모든 가능한 포트폴리오集合의 일부 下部集合에 지나지 않는 平均・分散基準에 의한 效率的 포트폴리오(mean-variance efficient porfolio)일 것이다. 이때 효율적 포트폴리오는 가능한한 最少의 分散에서 最大의 期待收益을 보상하는 포트폴리오를 의미한다.

效率的 포트폴리오의 收益率 $\tilde{R}_A$은 式(2)에서 지닌 確率變數 $\tilde{R}_a - \bar{R}_a$로 표현하여 보면,

$$\tilde{R}_i = E_i + b_i(\tilde{R}_a - \bar{R}_a) + \tilde{\epsilon}_i \tag{3}$$

위 式(3)은 式(2)와 별다른 의미가 없이 어떤 포트폴리오의 收益率에도 적용되는 關係式이다. 그러나 아래 式(4)는 어떤 포트폴리오가 평균・분산기준에 의거 효율적 포트폴리오일 때만 적용되는 關係式이다.

$$E_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_i \tag{4}$$

여기서 b_i는 式(3)에서 나온 母數이다. 式(4)는 λ_0, λ_1의 선택된 포트폴리오集合의 證券資産에만 타당성 있게 적용된다. 裁定去來機會(arbitrage opportunities)가 존재되지 않는한[(1)], 效率的 포트폴리오 a로 이루어진 수많은 포트폴리오集合은 존재하고, 式 (3)과 式 (4)를 도출한 것이다. 市場포트폴리오(market portfolio)는 이러한 수많은 效率的 포트폴리오 集合의 한 下部集合으로서 式 (3)과 式 (4)를 유도하는데 이용된다. CAPM에서는 모든 個別投資家는 平均・分散基準에 의거하여 效率的 포트폴리오를 소유하며, 市場포트폴리오는 個別포트폴리오의 加重集合이기 때문에 市場포트폴리오는 效率的 포트폴리오이라고 주장하고 있다. 또한 CAPM의 實證에 있어 일반적으로 期待收益率과 體系的 危險간의 線型的 關係는 입증되었으나 無危險利子率은 實際値와 一致하지 않았고, 더우기 短期的인 線型的 關係는 만족스럽게 설명되지 못하였다. 이러한 實證結果는 期待收益率과 實際收益率의 關聯性[return generating process]뿐만 아니라 期待收益率과 危險에 대한 理論自體에도 의문을 제기했다.

無危險資産의 無制限 借入과 貸出이 가능할 경우[(2)], CAPM의 關係式은 $\lambda_0 = R_f$와 $\lambda_1 = \bar{R}_m - R_f$을 式 (4)에 代入한 후, 다시 式 (4)를 式 (3)에 代入시켜 單純化하면 아래같이 式 (5)를 구할 수 있다.

$$\tilde{R}_i = R_f + (\bar{R}_m - R_f)b_i + b_i(\tilde{R}_m - \bar{R}_m) + \tilde{\epsilon}_i \tag{5}$$

$$\tilde{R}_i = R_f + b_i(\tilde{R}_m - R_f) + \tilde{\epsilon}_i \tag{5'}$$

여기서 $\tilde{R}_m$ = 市場포트폴리오의 實際收益率

$\bar{R}_m$ = 市場포트폴리오의 期待收益率

(1) 裁定去來機會가 존재하는 경우라면, 效率的포트폴리오는 존재할 수 없다. 왜냐하면 투자가는 동일한 分散의 수준에서 보다 높은 期待收益率을 얻을 수 있도록 구성자산을 변경할 수 있기 때문이다. 다시말하면, 한 포트폴리오가 다른 포트폴리오에 의해 支配된다면 效率的 포트폴리오는 존재할 수 없다.

(2) 無危險資産이 존재하지 않는다면, 市場變動과 전혀 관련성이 없는 포트폴리오의 收益率은 無危險利子率 R_f와 代置된다.

R_f — 無危險資産의 利子率

이때 b_i는 $\beta_i(=\mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)/\mathrm{Var}(\tilde{R}_m))$와 동일하기에 아래式 (5″)로 신뢰할 수 있다.

$$\tilde{R}_i = R_f + \beta_i(\tilde{R}_m - R_f) + \tilde{\varepsilon}_i \tag{5″}$$

여기서도 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$의 期待値는 역시 零이다. CAPM의 關係式 (5″)도 式 (2), (3)과 동일한 經濟的 意味를 지니고 있다. CAPM 模型自體가 妥當性이 있다면 條件式 (5″)도 成立되지 않고, 條件式 (5″)가 成立되지 않는다면 CAPM 模型自體도 妥當性이 없게 된다. CAPM은 制限的 諸假定下에서 市場이 均衡狀態를 이룰 때 오직 關係式 (5″)의 母數 β_i를 통해서만 i 증권의 體系的 危險과 期待收益率과의 線型的 關係로서 i 증권의 收益生成過程을 說明해 주고 있다. 따라서 非體系的 危險을 나타내 주는 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$의 特性은 重要視되지 않고, 非體系的 危險은 均衡價格에 반영되지 않는다.[3]

CAPM은 證券資産의 價格決定을 效用理論에 입각하여 설명하고 있다. CAPM의 關係式 (5″)에서 體系的 危險과 期待收益率과의 關係는 統計的 意味에서 보다는 經濟的 意味로 解釋해야 될 것이다. 또한 CAPM의 理論體系에 의한다면 동일한 母數$(b_{ik}=b_{jk}\forall k)$를 가지는 서로 다른 두 證券 i, j는 均衡狀態에서 동일한 期待收益率을 生成시킨다는 논리를 충분히 설명하여야만 된다.

이 논리가 성립되어야만, 確率變數인 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$와 $\tilde{\varepsilon}_j$는 어떠한 특성을 가지고 있다 하더라도 價格決定에는 獨立的이라고 말할 수 있다. 다시 말하면 效用理論에 근거를 둔 CAPM은 비체계적 위험을 나타내주는 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$는 투자가의 富에 대한 限界效用과 相關關係가 없다는 前提條件을 假定하고 있다. 이러한 기본가정때문에 理論的으로 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$는 資産價格決定에 영향을 못 미치고 있다고 하였다. CAPM은 證券資産의 收益率分布가 多變量正規分布(multivariate normality)이라는 假定과 投資家의 選好(preference)는 2次效用函數(quadratic utility function)로서 表現될 수 있다는 假定에서 개발되어 왔다. 이러한 假定들은 非體系的 危險 $\tilde{\varepsilon}_i$와 富의 限界效用과의 共分散은 零이라는 命題를 支持해 주고 있다.

Ⅳ. 裁定價格決定理論

危險의 分散은 大數의 法則(law of large numbers)[3]과 밀접하게 관련되어 있다. APT에서는 收益生成過程에서 價格에 반영되지 않는 變動性(unpriced variability)을 이 大數의 法則의 입장에서 分散可能한 變動性으로 파악하고 있다. 이러한 결과로 해서 APT는 市場危險과 企業危險의 源泉을 구별할 수 있게 한다. 다시 CAPM의 關係式에 나타난 非體系的 危險의 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$을 살펴보면, 非體系的 危險은 大數의 法則

$$\tilde{R}_i = E_i + b_i(\tilde{R}_m - \bar{R}_m) + \tilde{\varepsilon}_i,$$

에 의해 반드시 分散可能한 것은 아니다. 왜냐하면 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$가 서로 높은 相關關係를 가질 수도 있기 때문이다.[4]

APT는 理論體系를 式 (1)와 같은 關係式으로 전개하지만, CAPM에서의 市場포트폴리오처럼 이론전개에 있어 核心的인 역할을 하는 포트폴리오는 필요로 하지 않는다. 裁定포트폴리오(arbitrage portfolio)는 포트폴리오形成時 純投資分의 變動이 전혀 없고, 均衡狀態에서 零의 收益率을 평균적으로 얻게 하는 포트폴리오를 말한다. 그러므로 APT에 의하면 裁定포트폴리오는 陽의 收益率을 발생시킬 수 없다. APT의 關係式은 아래式 (6)과 같다.

$$E_i - \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{ij} \tag{6}$$

이 式 (6)은 式 (4)와 유사하게 보인다. APT는 理論構造에서 關係式을 제시해 주고 있고 어떤 證券의 期

(3) CAPM에서는 일반적으로 포트폴리오에 구성할때 非體系的 危險이 분산되어질 수 있기 때문에, 그 위험의 代價가 가격결정에 반영되는 것이 아니라, 오직 市場포트폴리오에 구성할 때만 비체계적 위험이 분산되어져 비체계적위험의 代價가 가격결정에 반영되지 않는 것이라고 주장하고 있다. 體系的 危險이 均衡價格에 반영되는 것도 동일한 논리이다. 이러한 논리는 CAPM이 전제하고 있는 平均·分散基準에 의거한 假定의 결과이다.

(4) 이 大數의 法則은 制限的 意味를 가지고 있다. 즉 이 법칙은 무한한 連續的 確率變數에 전제하지 않으면 効果가 없다. 그러나 그 收斂率(rate of convergence)이 충분히 빠르다고 한다면, 이 법칙의 制限的 意味는 多數이기만 限定된 確率變數의 集合에 적용할 수 있고, 基本意味와 유사하게 해석할 수 있다.

待收益率은 이 關係式의 因數에 의해 설명하는 體制를 갖추고 있다. 또한 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$는 分散可能危險으로 關係式에 제시되었고, 殘差項 $\tilde{\epsilon}$에 기인한 收益의 變動性이 分散效果가 큰 포트폴리오(well-diversified portfolio)에서 제거된다면 分散可能한 危險이라 할 수 있다.

일반적으로 分散效果가 큰 포트폴리오란 어떤 個別證券에 加重値가 편중되어 구성되지 않은 포트폴리오를 말한다. 여기서 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$이 獨立的이고 조그마한 分散 σ_i^2만을 갖는다면, 式 (7)이 α_i가 분산 효과가 큰 포트폴리오의 構成加重値일 경우,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{\epsilon}_i \approx 0 \tag{7}$$

n이 커지게 따라 大數의 法則에 따라 零에 接近한다. 이때에도 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$은 分散可能危險이라고 간주할 수 있다.

APT에 의하면 證券資産의 價格은 式 (6)을 關係式으로 하여 결정되어야 한다고 주장하고 있는데, 이는 式 (6)이 성립되지 않는다면 결국 裁定去來機會가 誘發되기 때문이다. 裁定포트폴리오의 條件이 성립되지 않을 경우의 關係式은 아래 式 (6′)으로 표현될 수 있다.

$$E_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j b_{ij} + v_i \tag{6′}$$

여기서 $|v_i| \geq \delta > 0$을 가정한다. 이때에 裁定포트폴리오의 條件을 要約해 보면,

a. 포트폴리오의 構成加重値의 合은 零이다.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$$

b. 포트폴리오는 危險分散效果가 크도록 형성되어 있다. 加重値 α_i가 특정증권에 偏重되어 있지 않다.

c. 포트폴리오 收益率은 關係式에서 사용된 確率變數 $\tilde{x}$와 獨立的이다. 포트폴리오의 加重値들을 각 벡터에 直角的(orthogonal)으로 곱하면 獨立的이라는 것을 알 수 있다.(5) 여기서 α_i의 결정에 있어서 각 要因에 대한 敏感度(b_{ij})와 加重値(α_i)를 곱한 合이 零이 ($\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_{ij}=0$) 되도록 α_i를 결정하여야 한다. 이때 資産의 數 n이 要因의 數 k보다 커야 한다는 조건이 수반된다.

이렇게 되면 체계적, 비체계적 모든 위험이 거의 없는 포트폴리오가 (a)(b)(c) 條件에 의해 형성된다. 포트폴리오收益率의 不確實性은 殘差項 $\tilde{\epsilon}$에 의해 발생되지만 비체계적 위험은 假定에 의해 분산가능위험이고, 형성된 포트폴리오는 분산효과가 큰 포트폴리오이므로, 非體系的 危險은 포트폴리오 收益에 영향을 미치지 않는다. 이때 포트폴리오의 期待收益率은 아래式 (8)로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E_i = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i \tag{8}$$

式 (8)에서 $\lambda_0(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)$은 (a)條件에 의해, $\lambda_j(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_{ij})$은 (b)條件에 의해 제거된다. v_i가 有意的이라면, 裁定포트폴리오의 收益率은 (a)(b)(c)條件에 背馳됨이 없이 零보다 아주 큰 것이다. 그렇다면 投資家는 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i > 0$이 되도록 裁定포트폴리오의 加重値를 결정할 것이다. 그러나 이러한 논리는 裁定去來가 허용되지 않기 때문에 v_i은 有意的이 될 수 없으며 결국 式 (6)이 成立된다.

序論에서도 언급한 대로 資産價格決定模型을 이해하려면 반드시 각 關係式의 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$의 特性을 파악하여야 한다. CAPM에서는 關係式 $\tilde{R}_i = E_i + b_i(\tilde{R}_m - \bar{R}_m) + \tilde{\epsilon}_i$에서 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$가 富의 限界效用과 相關關係가 없으므로 重要變數로 보지 않았다. 未來收益의 발생에 대해 2次效用函數와 正規分布를 가정하고 있기 때문에 殘差項 $\tilde{\epsilon}_i$가 相關關係가 없다고 주장하고 있다. 非體系的 危險은 大數의 法則에 의해 반드시 分散이 可能한 危險은 아니다. 殘差項에 영향을 미치거나, 分散效果가 큰 포트폴리오에서도 非體系的 危險의 分散效果를 발휘하지 못하게 하는 産業波及效果와 같은 시비적인 市場變動性이 존재할 수도 있다. 반면에, APT

(5) $\alpha_1 b_{11} + \alpha_2 b_{21} + \alpha_3 b_{31} + \cdots + \alpha_n b_{n1} = 0$
$\alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{22} + \alpha_3 b_{32} + \cdots + \alpha_n b_{n2} = 0$
$\alpha_1 b_{13} + \alpha_2 b_{23} + \alpha_3 b_{33} + \cdots + \alpha_n b_{n3} = 0$
$\vdots$
$\alpha_1 b_{1k} + \alpha_2 b_{2k} + \alpha_3 b_{3k} + \cdots + \alpha_n b_{nk} = 0$

에서는 위험의 분산효과에 의해 非體系的 危險인 $\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{\varepsilon}_i$ 이 零에 접근한다고 前提했기 때문에 收益率의 變動性의 原因으로서 市場全體에 영향을 미치고 분산효과가 큰 포트폴리오에서도 분산이 되지 않는 危險은 확인할 필요가 있겠다. 따라서 이 두 資産價格決定模型은 서로 다른 問題點을 提示해 주고 있다.

V. 效用理論에 의한 要因模型

APT에 관한 條件式들은 制約條件下에서 成立되고 있음을 앞 章에서 살펴보았다. 이러한 制約條件은 式 (6), (7)과 같은 接近式(approximization)에서 原因을 찾을 수 있고, 이 接近式에 의해 裁定의 基本論理를 쉽게 이해할 수 있게 된다. 市場에 수많은 證券資産이 존재한다면 투자가는 쉽게 (a)(b)(c) 條件을 충족하는 포트폴리오를 형성할 수 있다. 이때의 포트폴리오는 分散效果가 큰 資産으로 구성되었고, 포트폴리오의 收益率에 영향을 미치는 確率變數 $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tilde{\varepsilon}_j$ 는 零에 가까울 정도로 非有意的이기에 무시될 수 있다. 만일 市場에 關係式 $\lambda_0+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j b_{ij}$ 와 有意的으로 差益이 큰 期待收益率을 갖는 少數의 證券資産이 존재한다고 가정해 보아도, 이때에 投資家가 差益을 추구하기 위해서는 少數資産에 높은 構成加重値를 두어야 되고 相對的으로 分散效果가 낮고 危險이 높은 포트폴리오를 보유해야 되기 때문에 差益을 발생하는 裁定去來는 존재할 수가 없다.

또한 少數資産의 殘差項들이 陽의 分散 또는 共分散을 갖는한 少數資産에 대한 期待收益率은 변경시켜 去來差益을 얻을 수 있는 裁定去來는 존재하기 않기 때문에 裁定去來는 少數가 아닌 大多數資産의 價格決定에 관계한다. 式 (7)에서도 多數라고 하지만 限定된 數의 資産들과 각 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$ 간의 分散과 共分散의 벡터에 대한 特性을 接近式으로 표현해 주고 있다. 실제로는 分散效果가 큰 포트폴리오의 收益率은 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$ 에 서의 영향을 받지 않는다. 그러나 이런 포트폴리오가 限定된 數의 個別證券으로 형성되었다면, (a)(b)(c) 條件을 충족시킨다 하더라도 그 포트폴리오에 전혀 위험이 없다고는 할 수 없다. 포트폴리오에 아주 조그마한 危險이 남아있다면, 投資家는 그 위험을 기꺼이 甘受하고 準裁定포트폴리오(quasi-arbitrage portfolio)가 危險에 代價로 報償하는 期待收益을 추구하려 하지 않는다. 만일 投資家가 심한 危險回避型이라 할지라도 追加的인 投資하지 않고 危險이 아주 적고, 그리고 陽의 收益을 보상하는 포트폴리오가 형성만 될 수 있다면 市場은 均衡狀態를 형성할 것이다. 요컨대 準裁定機會는 투자가가 추구코자 하는 投資機會가 될 수 없다. 극단적으로 市場에 無限한 數의 個別證券이 존재하므로 接近式 (7)이 等式 (7)로 성립될 때에는 資産價格決定模型에 관한 明確한 論理가 제시될 수 있다.

裁定의 基本理論은 資産의 數가 아주 多數일때만 적용되는 資産價格決定模型이기에 資産의 數가 적을 때는 暗示的인 理論이 되기 마련이다.

대부분의 많은 理論이 理想的인 狀況與件에서 유도되어 前提條件인 假定과 일치하지 않는 現實에 적용되듯이 裁定價格決定理論의 展開에도 마찬가지이다. 이와같은 見地에서, APT는 無限한 資産의 數를 근거로 전개된 論理는 多數라고 하지만 限定된 資産의 數를 지닌 現實에 적용하여 推論하고 있다. 여기서 현실 經濟與件이 接近式으로 成立될 정도로 有效하다고 暗示的 假定을 해보자.

APT는 基本理論을 전개하는데 기본적으로 거의 假定을 前提로 하지 않고 있다. APT는 關係式 (1)에 나타난 바와 같이 少數의 確率變數 $\tilde{x}$ 을 이용하여 殘差項 $\tilde{\epsilon}$ 을 분산시킨다[6]는 假定이외에 投資家는 적은 富요보다 많은 富를 選好한다는 假定을 지니고 있다. 이러한 단순한 假定에 덧붙여 證券市場에 無限한 數의 證券이 존재한다면, APT는 收益生成過程을 설명하는데에 暗示的이지만 덜 制限的인 論理를 제시할 수 있다. 그러나 현실적으로 모든 資産의 價格決定을 다 설명할 수 없으며 接近式 (6)이 어떤 資産의 價格決定을 얼마나 타당성있게 설명할 수 있을지는 확실치 않다. 이러한 현실의 결과로서 보다 强한 制限的 論理로서 資産價格決定을 설명하려는 接近方法이 요망되어 效用理論에 의한 要因模型이 유도되었다.

式 (1)은 收益生成模型이고, 殘差項 $\tilde{\epsilon}$ 는 相互獨立的인 變數라고 가정하고, APT의 條件式은 $E_i \sim \lambda_0 +$

(6) APT가 殘差項 $\tilde{\epsilon}$ 을 분산시키기 위해 수많은 要因과 說明要因을 필요로 한다면 有用性은 거의 없고, 반면에 資産收益率들의 結合分布가 $k<n$ 의 條件을 가지는 關係式에서 殘差項 $\tilde{\epsilon}$ 를 분산시킬 때에 有用性이 있다.

$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j b_{ij}$ 라고 하자. 이때 i 證券의 期待收益率과 實現收益率과의 偏差 u_i 는 아래式으로 표시할 수 있는데 과연 偏差 u_i 의 크기가 얼마나 되는가 하는 것이 문제가 된다.

$$u_i=\left|E_i-\lambda_0-(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j b_{ij})\right|$$

이러한 문제를 해결하기 위해 裁定去來理論의 本質的 意味를 되새겨 볼 필요가 있다.

첫째, APT 에서는 投資家는 명백한 危險回避型임을 前提로 하고 있다. 市場에 限定된 危險資産만 존재한다면, 정말 위험이 없는 裁定포트폴리오를 형성하기란 불가능하다. 그러나 수많은 資産이 존재하고 殘差項 $\tilde{\varepsilon}$ 의 結合分布에 대한 假定下에서는 정말 위험이 없는 裁定포트폴리오를 형성하기란 가능할 것이다. 투자가가 심한 위험회피형이라면, 裁定去來行爲마저 회피할 것이다. 그러한 경우가 계속 발생한다면, 裁定去來에서 발생하는 差益을 추구하려는 意思는 감소되어 가고 투자가는 점점 더 위험을 회피하게 될 것이다. 요컨대, 危險回避의 水準이 높아지면 질수록, 偏差 u_i 는 市場均衡에 動搖를 일으키지 않으면서 점점 더 작아질 것이다.

둘째, 偏差의 上限値는 殘差項 $\tilde{\varepsilon}_i$ 의 分散 $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ 와 陽의 相關關係를 가지고 있다. 투자가가 큰 去來差益을 얻으려면 i 증권에 높은 구성가중치를 두어야 되는데, 이 경우 포트폴리오收益率은 確率變數인 i 증권의 非體系的 危險에 더욱 더 의존하게 된다. 差項 $\tilde{\varepsilon}_i$ 의 變動性 $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ 가 零에 가깝다면, 위와 같은 현상은 발생하지 않을 것이나.

셋째, 時價總額式에 의한 加重値(value-weight)가 큰 資産은 加重値가 적은 資産보다 差益의 上限値가 커야만 된다는 것이다. 어떤 資産의 時價總額式에 의한 加重値가 크다면 투자가는 그 資産에 상당부분을 투자해야만 된다는 것이다. 어떤 證券資産의 非體系的 危險이 收益率의 變動性에 미치는 영향력은 그 資産의 個別的인 危險에서 基因하지만, 이는 個別投資家가 형성하고 포트폴리오의 收益變動에 有意的인 原因이 될 수 있다. 이때 準裁定포트폴리오 收益의 變動性이 投資家의 富에 대한 限界效用과 높은 陽의 相關關係를 가질 경우, 투자가는(準裁定포트폴리오를 형성하지 않더라도) 상당한 差益을 누릴 수 있다. 다시말하면 큰 差益을 生成하는 資産은 투자가가 형성하는 포트폴리오에서 높은 構成比率을 나타내므로 결국 투자가의 富의 限界效用과 높은 陽의 相關關係를 가지게 마련이다. 더군다나 競爭市場에서는 모든 個人은 限界效用에 동일한 代替比率을 나타내고 있다. 만일 한 個人이 準裁定포트폴리오를 통해 더 이상 差益去來를 하지 않으려는 限界點에 도달했다면, 다른 個人들도 마찬가지로 裁定去來를 중단할 것이다.

이상과 같은 i 證券의 期待收益率과 實現收益率과의 偏差에 관한 命題는 Connor[1981], Dybvig[1982], 그리고 Grinblatt 와 Titman[1983]에 의해 보다 구체적으로 硏究되어 왔는데 기본적으로 富의 限界效用과 非體系的 危險을 接近시키므로서 差益의 範圍를 유도하고 있다. 差益의 範圍를 보다 정확하게 유도하기 위해서는 APT 의 假定보다는 더 制限的이고, CAPM 의 假定보다는 덜 制限的인 假定이 요구되고 있다. 收益率에 대한 結合分布나 選好에 대한 假定은 지나치게 制限的이라고 할 수 없다. 差益範圍의 上限値는 어떤 資産의 市場總價値에 의한 加重値(market-value weight)를 市場總價値의 下部集合에 의한 加重値로 代置하므로서 파악될 수 있다.

이 代用된 加重値는 최소한 市場總價値에 의한 加重値만큼은 커야 한다. 資産價格決定模型의 假定의 制限的 範圍에 따라 模型의 說明力이 달라진다고 할 수 있다. 즉 CAPM 은 APT 보다 더 制限的인 假定下에서 單純하면서도 明確한 關係式을 제시해 주고 있고, 母數 λ 의 값을 어떻게 구해야 되는가를 說明해 주고 있다. 반면에 APT 와 效用理論에 의한 要因模型에서는 어떤 특정한 假定을 前提로 하지 않지만 演繹的方法으로 模型을 說明해 주고 있지는 않다.

Ⅵ. 結 論

資本資産價格決定模型과 裁定價格決定理論과의 類似性과 相異性은 資産價格決定의 條件式인 收益生成過程을 비교하므로서 가장 잘 이해될 수 있다. 이 두 模型의 關係式에서는 어떤 證券資産(포트폴리오)의 期待

收益率과 收益生成過程을 설명해 주는 母數와의 關係를 나타내 주고 있다. 關係式이 그 母數에 의해 收益率을 충분히 설명하려면, 殘差項 $\tilde{\varepsilon}$는 어느 模型에서든지 有意的 役割을 해서는 안된다.

CAPM에서는 市場變動性에 基因하지 않는 非體系的 危險은 어떤 資産의 均衡價格에 반영되지 않는다는 命題가 성립될 수 있도록 期待收益率의 結合分佈, 投資家의 選好, 그리고 이 두가지의 組合을 前提條件으로 假定하고 있다. 그러므로 CAPM은 市場을 유일한 근거로 하기에 殘差項 $\tilde{\varepsilon}$는 重要한 說明要因이 되지 못하고 母數 β가 期待收益率을 충분히 설명할 수 있는 主要要因이 된다.

APT와 要因模型에서는 收益生成過程을 설명하는 關係式에서 非體系的 危險을 나타내 주는 殘差項 $\tilde{\varepsilon}$를 分散可能한 危險으로 간주하고 있다. 이러한 關係式을 이해하려면 市場에서 무엇이 收益의 變動性에 영향을 미치는 主要源泉인가를 확인해야 한다.(7)

參 考 文 獻

1. 李弼商 著, 財務論, 博英社, (1984).
2. 李弼商 外, "裁定價格決定模型의 理論的 考察과 實證的 分析", 證券學會誌, 第6輯, (1984), pp. 1—30.
3. Fisher Black, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", *Journal of Business*, Vol. 45, (1972), pp. 444—454.
4. Gary Chamberlain and Michael Rothchild "Arbitrage, Factor Structure, and Mean Variance Analysis on Large Asset Markets," Unpublished, University of Wisconsin-Madson, (June 1981).
5. Nai-Fu Chen, "Some Empirical Tests of the Theory of Arbitrage Pricing, *Journal of Finance*, Vol. 31, (Dec. 1983), pp. 1393—1414.
6. D. Chinhyung Cho, Edwin J. Elton, and Martin J. Gruber, "On the Robustness of the Roll and Ross Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (March 1984), pp. 1—10.
7. Greg Connor, "A Factor Pricing Theory for Capital Assets," Unpublished, Northwesten University, (1981).
8. Thomas E. Copeland and J. Fred Weston, *Financial Theory and Corporate Policy*, 2nd Ed., Addison-Wesley Co., (1983).
9. Phoebus J. Dhrymes, Irwin Friend, Mustafa N. Gultekin, and N. Bulent Gultekin, "New Tests of the APT and Their Implications," *Journal of Finance*, Vol. 40, (July 1985), pp. 659—675.
10. Philip Dybvig and Stephen Ross, "Yes, The APT Is Testable," Unpublished, Yale University, (Jan. 1983).
11. Edwin J. Elton and Martin J. Gruber, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, (1984).
12. Maik Grinblatt and Sheridan Titman, "The Arbitrage Pricing Theory," Unpublished, UCLA, (Jan. 1983).
13. Gur Huberman, "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Economic Theory*, Vol. 28, (Dec. 1982), pp. 183—191.
14. Jonathon Ingersoll, "Some Results in the Theory of Arbitrage Pricing," Unpublished, University of Chicago, (May 1981).
15. John Lintner, "The Valuation of Risk, Assets and the Selection of Risky Investments in

(7) 要因分析과 같은 統計的 技法으로 특정한 假定下에서 이러한 分析이 행하여져 왔다. 이때에도 殘差項 $\tilde{\varepsilon}$는 (서의) 分散可能한 危險임을 前提하여야 한다.

Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics,* Vol. 47, (Feb. 1965), pp. 13—37.

16. Jan Mossin, "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica,* Vol. 34, (Oct. 1966), pp. 768—783.
17. Marc R. Reignaum, "The Arbitrage Pricing Theory: Some Empirical Results," *Journal of Finance,* Vol. 36, (May 1981), pp. 313—321.
18. Richard Roll, "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests, Part 1: On Past and Potential Testability of the Theory, *Journal of Financial Economics,* Vol. 4, (May 1977), pp. 129—176.
19. Richard Roll and Stephen A. Ross, "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Finance,* Vol. 35, (Dec. 1980), pp. 1073—1103.
20. Stephen A. Ross, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing Model," *Journal of Economic Theory,* Vol. 13, (Dec. 1976), pp. 341—360.
21. William Sharpe, *Investments,* 3rd Ed., Prentice-Hall Inc., (1985).
22. ________, Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk," *Journal of Finance,* Vol. 19, (Sept. 1964), pp. 425—442.