연구논문집 제8권(제1호) p.19~24 1977 7

二次元 流路의 入口部分에서의 層流流動

高 亮 文
機 械 工 學 科

〈要 約〉

半無限 水槽의 壁에 直角으로 붙어 있는 二次元 流路에서의 流動問題를 等角寫像을 利用하여 座標變換을 한 다음 差分法을 適用하여 數値解析 하였다.

實際 計算은 Reynolds數가 5및 10인 경우에 對하여 하였으며, 流動函數와 渦度, 그리고 管路에서의 速度展開 및 壓力降下를 구하였다.

Laminar Entrance Flow in a Two Dimensional Straight Channel

Koh, Yang Moon
Dept. of Mechanical Engineering

〈**Abstract**〉

Laminar flow in the inlet region of a two dimensional straight channel which is connected rightly to the wall of a cistern was studied numerically.

Stream functions and vorticities were obtained for the Reynolds numbers of 5 and 10. Velocity developments and pressure losses along the channel were also calculated.

Ⅰ. 序 論

管의 入口部分에서의 流動에 關하여서는 이제까지 解析的으로나 數値的으로 많은 硏究가 되어왔다.[1~12] 그러나 筆者가 아는한 이제까지의 대부분의 硏究는 管의 入口斷面에서는 流速이 均一할 것이라고 假定되었었다.

이에 對하여 半無限水槽의 壁에 直角으로 붙어있는 二次元 流路에서의 流動을 解析함으로써 管이 入口에서의 流動이 어떻게 되는가를 검토하여 보려는 노력이 筆者에 의하여 시도되었었다.[13] 그러나 당시의 論文에서는 管壁에 垂直한 座標 y를 $y=\cos\beta$로 變換한 結果 管壁 $y=1$이 特異點이 되어 不定確한 結果가 얻어졌을 가능성이 있다.

따라서 本 硏究에서는 等角寫像을 利用하여 流動領域을 無限平行平板 사이의 領域으로 變換하고 다시 이를 有限한 四角領域으로 變換하여 差分法을 適用, 運動方程式을 代數方程式으로 바꾸어 各節點에서의 流動函數와 渦度(vorticity)를 구하였다.

실제 計算은 Reynolds數가 5및 10인 두 경우에 對하여 실시 하였다.

Ⅱ. 基本 方程式

그림 1에서와 같이 半無限 水槽의 壁에 距離 $2L$만큼 떨어진 두 개의 半無限平行平板이 直角으로 붙어 있고, 이 사이로 非壓縮性 流體가 흐른다고 假定하자.

基本運動方程式은 流動函數ϕ와 渦度ζ로 表示하면 다음과 같이 된다. 즉

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\zeta$$

여기서 ν는 動粘性係數를 나타낸다. 또

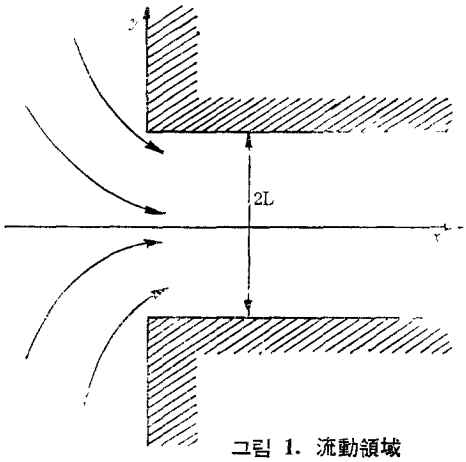

그림 1. 流動領域

境界條件은 다음과 같이 된다. 즉

$x>0,\ y=L$에서 $\quad \psi=u_mL, \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0$

$x=0,\ y>L$에서 $\quad \psi=u_mL, \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial x}=0$

$y=0$에서 $\quad \psi=0, \quad \zeta=0$

$x\to\infty$일 때 $\quad \psi=\dfrac{1}{2}u_my\left[3-\left(\dfrac{y}{L}\right)^2\right],$

$$\zeta=\frac{3u_my}{L^2}$$

여기서 u_m은 管路에서의 平均流速을 나타낸다. 한편 水槽의 上流 즉 $x^2+y^2\to\infty$인 곳에서의 境界條件은 정확히는 Jeffrey-Hamel流動 [14,15]의 解를 利用하여야 하나 여기서는 단순히 potential流動을 假定하였다. 즉

$x^2+y^2\to\infty$일때 $\quad \psi=-\dfrac{2}{\pi}u_mL\tan^{-1}\dfrac{y}{x}, \quad \zeta=0$

이들 式을 다시 無次元變數

$x'=x/L, \quad y'=y/L,$

$\psi'=\psi/u_mL, \quad \zeta'=\zeta L/u_m,$

$R=u_mL/\nu$

들로 나타내면 運動方程式은

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}-\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2\zeta'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\zeta'}{\partial y'^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y'^2}=-\zeta'$$

으로 되고, 境界條件은

$x'>0,\ y'=1$ 에서 $\quad \psi'=1, \dfrac{\partial\psi'}{\partial y}=0$

$x'=0,\ y'>1$에서 $\quad \psi'=1, \quad \dfrac{\partial\psi'}{\partial x'}=0$

$y'=0$ 에서 $\quad \psi'=0, \quad \zeta'=0$

$x'\to\infty$일 때 $\quad \psi'=\dfrac{1}{2}y'(3-y'^2), \quad \zeta'=3y'$

$x'^2+y'^2\to\infty$인 때 $\quad \psi'=-\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}\dfrac{y'}{x'}, \quad \zeta'=0$

이 된다.

이제 複雜한 流動領域을 無限帶狀의 單純한 領域으로 變換하기 위하여 座標變換

$$z=\frac{1}{\pi}\left[-2(e^{-\pi w}+1)^{1/2}+\log\frac{(e^{-\pi w}+1)^{1/2}+1}{(e^{-\pi w}+1)^{1/2}-1}\right]$$

$z=x'+iy'$

$w=\alpha+i\beta$

를 하고 구하여진 유동함수 및 와도를 ψ을 없애고 간단히 ϕ, ζ로 기록하면 運動方程式은

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial\beta^2}=R\left[\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right]$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\beta^2}=-h^2\zeta$$

$$h^2=[e^{-2\pi\alpha}+2e^{-\pi\alpha}\cos\pi\beta+1]^{1/2}$$

이 되고, 境界條件은 간단히

$\beta=1$에서 $\quad \phi=1, \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial\beta}=0$

$\beta=0$에서 $\quad \phi=0, \quad \zeta=0$

$\alpha\to-\infty$일 때 $\phi=\beta, \quad \zeta=0$

$\alpha\to\infty$ 일 때 $\quad \phi=\dfrac{1}{2}\beta(3-\beta^2), \quad \zeta=3\beta$

로 된다.

마지막으로 無限帶를 四角領域으로 변환하기 위하여 좌표 변환

$\xi=\tanh k\alpha, \quad \eta=\beta$

즉

$$\alpha=\frac{1}{2k}\log\frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad \beta=\eta$$

를 하면 運動方程式은

$$k^2(1-\xi^2)^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}-2k^2\xi(1-\xi^2)\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}$$

$$=kR(1-\xi^2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}-\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right) \qquad (1)$$

$$k^2(1-\xi^2)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}-2k^2\xi(1-\xi^2)\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=-h^2\zeta \qquad (2)$$

$$h^2=(e^{-2\pi\alpha}+2e^{-\pi\alpha}\cos\pi\beta+1)^{1/2}$$

과 같이 되고, 경계조건은

$\xi=-1$에서 $\quad \phi=\eta, \quad \zeta=0$

$\xi=1$에서 $\quad \phi=\dfrac{1}{2}\eta(3-\eta^2), \quad \zeta=3\eta$

$\eta=0$에서 $\quad \phi=0, \quad \zeta=0$

$$\eta=1 \text{ 에서} \qquad \phi=1, \qquad -\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0$$

과 같이 변환된다. 여기서 k는 常數로서 그 값을 적절히 택함으로써 差分式으로 변환시 節點들의 位値를 조절할 수 있다. 本 論文에서는 0.5를 택하였다.

한편 流速과 壓力은 各各 流動函數의 定義式과 Navier-Stokes方程式으로부터 간단히 구할 수 있으며, 管路 中心線 즉 $y=\eta=0$에서의 流速u_c 및 壓力 p는 式

$$\frac{u_c}{u_m}=\frac{1}{\sqrt{e^{-\pi\alpha}+1}}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \tag{3}$$

$$\frac{p}{\rho u_m^2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{u_m^2}=-\frac{1}{kR}\int\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}d\xi \tag{4}$$

로 표시 된다. 여기서 ρ는 유체의 밀도를 나타낸다. 또 固體境界面 $\eta=1$에서의 過度는 식(2)에 $\frac{\partial\phi}{\partial\xi}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}=0$인 조건을 代入하면

$$\zeta_{\eta=1}=-\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \tag{5}$$

$$h^2=|1-e^{-\pi\alpha}|$$

으로 된다.

Ⅲ. 數値解析

영역 $-1<\xi<1$, $0<\eta<1$을 그림 2에서와 같이 四角mesh로 分割하고 各 節點(i,j)에 對하여 差分法을 適用하면 式 (2)는 다음과 같이 변형된다. 즉

$$\left[2\,k^2(1-\xi_j^2)^2+\frac{a^2}{b^2}\right]\phi_{i,j}$$
$$-k^2(1-\xi_j^2)(1-\xi_j^2+a\xi_j)\,\phi_{i,j-1}$$
$$-k^2(1-\xi_j^2)(1-\xi_j^2-a\xi_j)\phi_{i,j+1}-\frac{a^2}{b^2}\phi_{i-1,j}$$
$$-\frac{a^2}{b^2}\phi_{i+1,j}=a^2h_{i,j}^2\zeta_{i,j} \tag{6}$$

$$h_{i,j}^2=(e^{-2\pi\alpha_j}+2e^{-\pi\alpha_j}\cos\pi\eta_{i+1})^{1/2}$$

$$\alpha_j=\frac{1}{2k}\log\frac{1+\xi_j}{1-\xi_j}$$

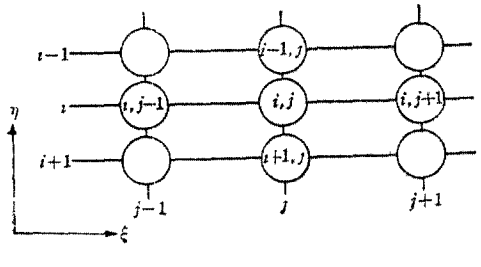

그림 2. 節點 기호

식 (1)에 대하여서는 Allen[16]에 따라 다음과 같이 변형하였다. 먼저 식(2)는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다. 즉

$$k^2(1-\xi^2)^2\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}-\left[\frac{2\xi}{1-\xi^2}+\frac{R}{k(1-\xi^2)}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right\}$$
$$-\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}+kR(1-\xi^2)\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right]=0$$

또는

$$k^2(1-\xi^2)^2A+B=0 \tag{7}$$

$$A=\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}-\left[\frac{2\xi}{1-\xi^2}+\frac{R}{k(1-\xi^2)}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$$
$$=\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}+\kappa\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} \tag{8}$$

$$B=-\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}+kR(1-\xi^2)\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$$
$$=-\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}+\lambda\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \tag{9}$$

A및 k를 常數로 생각하면 微分方程式 (8)의 解는

$$k\zeta=A\xi-B-G\exp(-\kappa\xi) \tag{10}$$

와 같이 된다. 여기에 節點 $(i,j-1)$, (i,j)및 $(i,j+1)$에서의 값들을 代入하면 A,B,G에 對한 3개의 대수 방정식이 얻어지고 이를 풀면 A는 다음과 같이 된다. 즉

$$A=\frac{\kappa[\exp(\kappa a)(\zeta_{i,j+1}-\zeta_{i,j})-(\zeta_{i,j}-\zeta_{i,j-1})]}{a[\exp(\kappa a)-1]} \tag{11}$$

같은 방법으로 B를 구하면

$$B=\frac{\lambda[\exp(\lambda b)(\zeta_{i-1,j}-\zeta_{i,j})-(\zeta_{i,j}-\zeta_{i+1,j})]}{b[\exp(\lambda b)-1]} \tag{12}$$

κ및 λ는 통상의 차분법을 적용하여 구하고, 식(11) (12), 를 식(7)에 대입하면 식 (1)에 대한 다음과 같은 대수 방정식이 얻어진다. 즉

$$C_{i,j}\zeta_{i,j}-C_{i,j-1}\zeta_{i,j-1}-C_{i,j+1}\zeta_{i,j+1}-C_{i-1,j}\zeta_{i-1,j}-$$
$$C_{i+1,j}\zeta_{i+1,j}=0 \tag{13}$$

여기서

$$C_{i,j-1}=k^2(1-\xi_j^2)^2\frac{\kappa_{i,j}}{a[\exp(\kappa_{i,j}a)-1]}$$

$$C_{i,j+1}=C_{i,j-1}\exp(\kappa_{i,j}a)$$

$$C_{i+1,j}=\frac{\lambda_{i,j}}{b[\exp(\lambda_{i,j}b)-1]}$$

$$C_{i-1,j}=C_{i+1,j}\exp(\lambda_{i,j}b)$$

$$C_{i,j}=C_{i,j-1}+C_{i,j+1}+C_{i-1,j}+C_{i+1,j}$$

$$\kappa_{i,j}=-\left[\frac{2\xi_j}{1-\xi_j^2}+\frac{R}{k(1-\xi_j^2)}\frac{\phi_{i-1,j}-\phi_{i+1,j}}{2b}\right]$$

$$\lambda_{i,j}=kR(1-\xi_j^2)\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2a}$$

식 (13)및 (6)는 계산에 편리하도록 다음과 같이 변형한다. 즉 n번째 구한 값들을 上添字 n을 써서 表示하고, 식 (13)과 (6)을 各各

$$C^{n-1}_{i,j}\zeta^{n}_{i,j}-C^{n-1}_{i,j-1}\zeta^{n}_{i,j-1}-C^{n-1}_{i,j+1}\zeta^{n}_{i,j+1}$$
$$=C^{n-1}_{i-1,j}\zeta^{n}_{i-1,j}-C^{n-1}_{i+1,j}\zeta^{n-1}_{i+1,j} \quad (14)$$

$$2\left[k^2(1-\xi_j^2)^2+\frac{a^2}{b^2}\right]\phi^n_{i,j}-k^2(1-\xi_j^2)(1-\xi_j^2-a\xi_j)\phi^n_{i,j-1}-k^2(1-\xi_j^2)(1-\xi_j^2-a\xi_j)\phi^n_{i,j-1}$$
$$=a^2h^2_{i,j}\zeta^n_{i,j}+\frac{a^2}{b^2}\phi^n_{i-1,j}+\frac{a^2}{b^2}\phi^{n-1}_{i-1,j} \quad (15)$$

와 같이 변형한다.

또 $\eta=1$에서의 渦度 $\zeta^n_{i,j}$에 대하여서는 식 (5)로부터

$$\zeta^n_{i,j}=\frac{1}{h^2_{i,j}}\frac{2(\phi^{n-1}_{1,j}-\phi^{n-1}_{2,j})}{a^2}$$
$$=\frac{1}{h^2_{i,j}}\frac{2(1-\phi^{n-1}_{2,j})}{a^2} \quad (16)$$

$$h^2_{i,j}=|1-e^{-\pi\alpha_j}|$$

$$\alpha_j=\frac{1}{2k}\log\frac{1+\xi_j}{1-\xi_j}$$

와 같이 된다.

실제 계산은 다음과 같이 하였다.

먼저 앞에서 구한 $\phi^{n-1}_{i,j}$를 代入하여 식 (16)으로부터 $\zeta^n_{i,j}$를 구하고 계속하여 $i=2$ 부터 차례로 연립방정식(14)를 풀어 $\zeta^n_{i,j}$를 구한 다음, 이 값들을 식 (15)에 대입하여 $\phi^n_{i,j}$를 구한다. 이를 반복하여 상대 오차 $\left|\frac{\phi^n_{i,j}-\phi^{n-1}_{i,j}}{\phi^n_{i,j}}\right|$ 및 $\left|\frac{\zeta^n_{i,j}-\zeta^{n-1}_{i,j}}{\zeta^n_{i,j}}\right|$의 값이 10^{-6}보다 작아지면 解 $\zeta_{i,j}$ 및 $\phi_{i,j}$가 구하여진 것으로 하였다. 다음 구해진 해를 식 (3)및 (4)에 代入하여 $\eta=0$에서의 流速과 壓力을 구하였다. 壓力을 구하기 위한 적분은 Simpson의 적분공식을 이용하였다.

Ⅳ. 計算結果및 考察

실제의 계산은 $a=\frac{2}{75}$, $b=\frac{1}{30}$로 하여 Reynolds 數가 5및 10인 경우에 대하여 하였으며 그 결과가 그림 3, 4, 5, 6 및 表1에 주어져 있다.

그림 3및 4에는 流線과 等渦度線(equivorticity line)이 그려져 있다. 예측 할 수 있는 바와 같이 水槽의 上流와 管路의 下流에서는 流線이 直線으로 되고있다. 下流에서는 流動이 完全 展開된 層流流動에 접근하고 있으며, 水槽內에서는 入口에서 멀어질수록 Jeffrey-Hamel 流動에 접근하

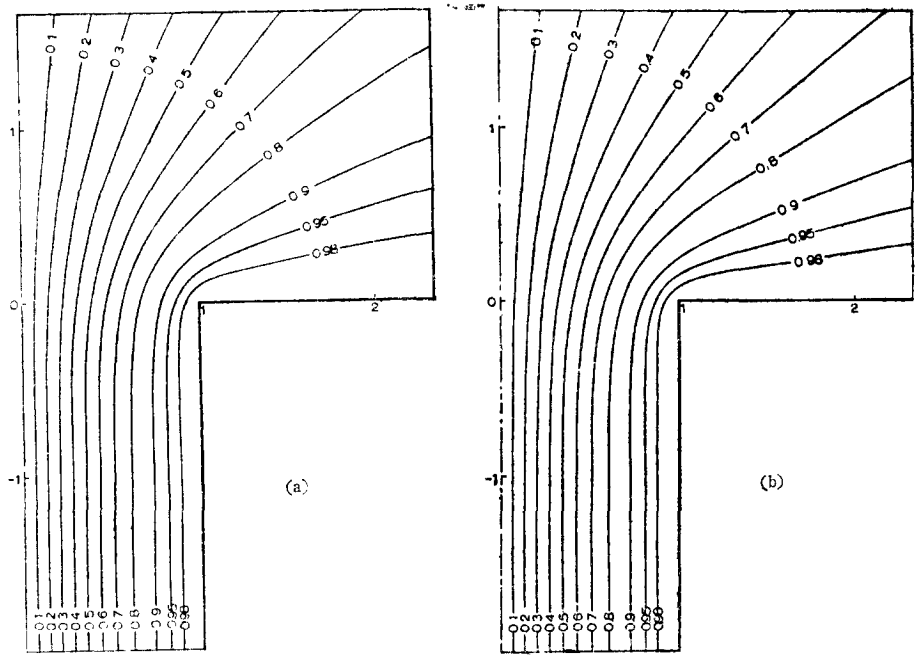

그림 3. 流線 (a) $R=5$, (b) $R=10$

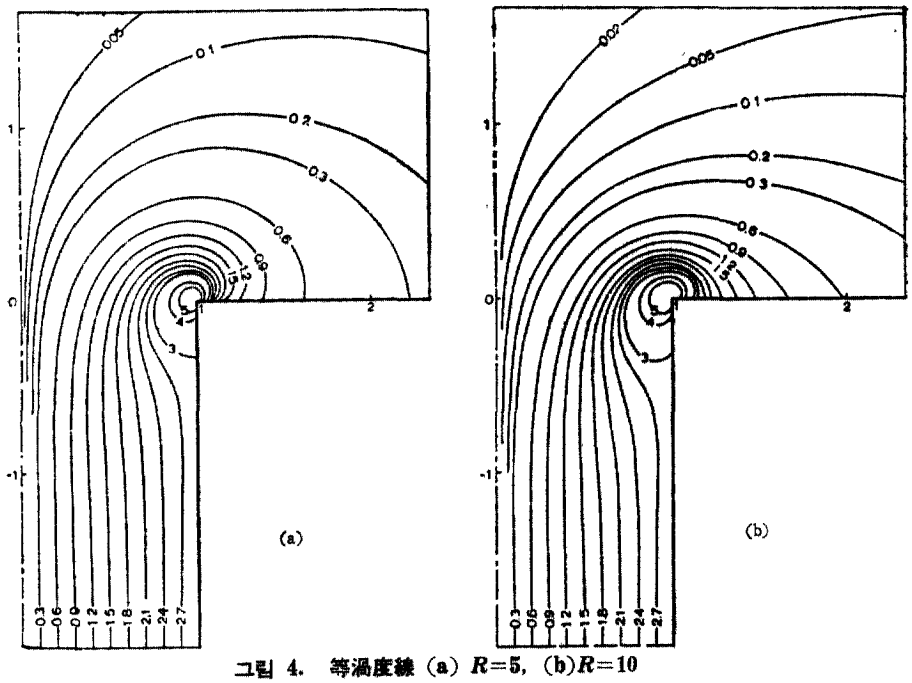

그림 4. 等渦度線 (a) $R=5$, (b) $R=10$

고 있다. 실제 계산된 결과치를 보면 入口로부터 管路幅의 5배지 10배 되는 위치에서는 計算된 流動函數의 값이 Jeffrey-Hamel 流動의 解로부터 구한 값에 비하여 1%이상 틀리지 않음을 보여 주고 있다. 물론 이 보다 먼 위치에서는 無限大에서 potential 流動이라는 非現實的인 假定을 하여 경계 조건을 준 관계로 Jeffrey-Hamel의 解와는 상당히 다른 값을 보여 주고 있다.

그림 3에서 알 수 있는 또 하나의 중요한 사실은 입구 단면에서 관로 방향 즉 x-方向의 流速成分 u_x가 均一하지 않고 이미 상당히 抛物線的으로 展開되어 있을뿐만 아니라 y-方向의 速度成分 u_y가 無視될 수 있을 정도로 작지도 않다는 것이다. 물론 Reynolds數가 큰 경우가 작은 경우에 비하여 u_x의 分布는 좀더 平坦하기는 하지만, x-方向 速度成分에 對한 y-方向 速度成分의 비 u_y/u_x는 훨씬 커져 있음을보여주고 있다. 이는 이전의 많은 硏究者들에 의하여 假定된 사실 즉 入口斷面에서는 y-方向의 速度는 무시 될수 있고, x-方向의 速度는 均一할 것이라는 사실과 틀린 현상으로 이로부터 몇가지 종전의 연구 결과와는 다른 결론이 얻어질 수 있다.

첫째로 y-方向의 速度成分 때문에 管路 中央部의 流體가 훨씬 빨리 加速되고 入口 길이(entrance length)가 짧아질 것이다. 실제로 그림 5를 보면 Reynolds數가 10인 경우가 5인 경우보다 入口길이 x/L은 약간 기나, 相對的인 入口 길이 x/LR은 훨씬 짧아져 있음을 알 수 있다. 두 경우 다 Schlichting[2]이 구한 入口길이보다는 훨씬 짧은 값을 보여주고 있다.

두째로 入口斷面에서의 均一流動을 가정하면 入口部分에서는 관로 중심 에서보다도 이로부터 관로벽쪽으로 약간 떨어진 位置에서 最大速度가 나타나는데 [6,9,10,11,12] 그림 3에서 알 수 있는바와 같이 본 연구 결과에서는 그러한 현상이 안 나타나고 있다.

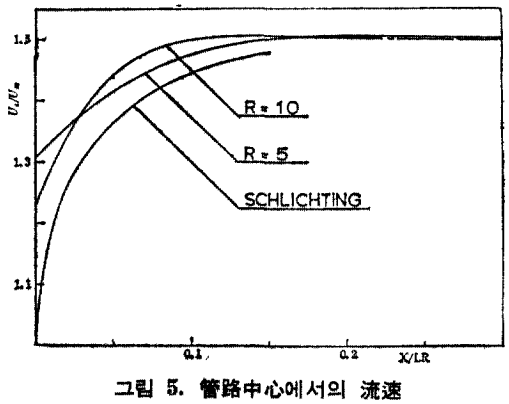

그림 5. 管路中心에서의 流速

세째로 관로중심선상에서의 유속u_c는 입구단면에서의 平均流速 u_m으로 부터 점차 증가하여 完全 展開되었을때의 流速인 $1.5u_m$으로 접근하는 것으로 알려져 있으나 本 연구결과에 의하면 관로의 어떤 위

서에서 最大速度 (대략 $1.51u_m$정도)가 되었다가 점차 감소하면서 $1.5u_m$에 가까워지고 있다. (그림 5).

이러한 현상은 모두가 入口에서의 y-方向速度成分 u_y때문에 관로 중앙부의 流體가 보다 빨리 加速됨으로 일어나는 결과가 아닌가 생각된다.

이상의 논의는 극히 기초적인 계산 결과에 근거하는 것으로 다음과 같은 점에서 충분하다고 볼 수가

表 1

Reynolds 數 (R)	入口斷面에서의 最大速度 (u_c/u_{∞})	管路에서의 最大速度 (u_{max}/u_{∞})	管路에서 最大速度가 나타나는 位置 (X_{max}/LR)	壓力降下式에서의 常數 (m)
5	1.303	1.5053	0.221	1.333
10	1.231	1.5053	0.139	1.103

없다. 즉 관로의 入口部分이 할 단국 되어서 수조의 벽과 관로가 매끈하게 연결되어 있고, Reynolds數가 충분히 큰 경우에도 실 난구결과와 비슷한 결과가 얻어질 것인가 또는 입구에서 均一流動이 이루어질 것인가는 현재의 결과만 가지고는 알수가 없다. 또 그림 3을 보면 유동의 박리(separation)현상은 나타나지 않고 있으나 Reynolds數가 커질 경우에도 유동의 박리 현상이 일어나지 않을 것인가에 대하여서도 결론을 내리기는 어렵다.

그림 6은 관로 중심에서의 압력 변화를 보여주고 있다. 일반적으로 충분히 발달된 유동에서의 壓力 p는 다음 식으로 표시할 수가 있다, 즉

$$\frac{p_0-p}{\rho u_m^2}=3\frac{x}{LR}+m' \qquad (17)$$

여기서 p_0는 水槽 上流에서의 壓力을 표示하고, m은 입구 부분에서의 추가 압력 손실을 나타내는 상수로서, 계산치가 표 1에 주어져 있다.

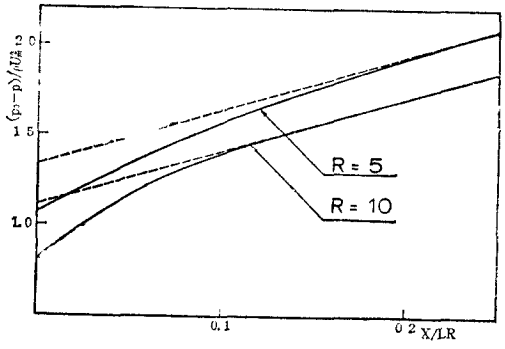

그림 6. 管路中心에서의 壓力

V. 結 論

運動方程式의 어떠한 項도 省略하지 않았다는 意味에서 完全하고, 水槽와 管路를 同時에 流動領域으로 고려하였다는 의미에서 보다 실제에 가깝게 入口 流動問題를 해석하였으며 다음과 같은 결론이 얻어졌다.

1. 入口단면에서 이미 流動이 상당히 地物線的으로 展開되고 있으며, 관벽에 수직인 方向의 속도성분이 관내에서의 속도전개에 상당한 영향을 미친다.

2. 관로 중심선의 어떤 位置에서 最大速度가 나타나는데 이 점은 고물선적으로 완전히 전개 되었을때의 관로 중심선상의 速度보다 약간 크다.

後 記

本 연구는 1976年度 文敎部 硏究費에 의하여 그 硏究費를 지원하여준 文敎當局에 감사를 드린다.

參 考 文 獻

1. SCHILLER, L., *ZAMM*, Vol. 2, p. 96, (1922).
2. SCHLICHTING, H., *ZAMM*, Vol. 11, p. 363, (1934).
3. COLLINS, M. and W.R. SCHWALTER, *Phys. of Fluids*, Vol. 5, p. 1122, (1962).
4. LANGHAAR, H.L., J. *Appl. Mech.*, Vol. 9, p. 55, (1942)
5. SPARROW, E.M., S.H. LIN, and T.S. LUNDGREN, *Phys. of Fluids*, Vol. 7, p. 338, (1964).
6. LEW, H.S., *J. Biomechanics*, Vol. 6, p. 205, (1973).
7. BODOIA, J.R. and J.F. OSTERLE, *Appl. Sci.* Res., Ser. A. Vol. 10, p. 265, (1961)
8. HORNBECK, R.W., *Appl. Sci. Res.*, Ser. A, Vol. 13, p. 224, (1964).
9. WANG, Y.L. and P.A. LONGWELL, AICHE J., Vol. 10, p. 323, (1964).
10. BRANDT, A. and J. GILLIS, *Phys. of Fluids*, Vol. 9, p. 690, (1966).
11. FRIEDMANN M., J. GILLIS, and N. LIRON, *Appl. Sci. Res.*, Vol. 19, p. 426, (1968).
12. McDONALD, J.W. et. al., *J. Appl. Mech.*, Vol. 39, p. 873, (1972).
13. KOH, Y.M., *Master Thesis*, Seoul National Univ., (1974).
14. ROSENHEAD, L., *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, Vol. 175, p. 436, (1940).
15. MILLSAPS, K. and K. POHLHAUSEN, *J. Aero. Sci.*, Vol. 20, p. 187, (1953).
16. ALLEN, D.N. de G. and R.V. SOUTH WELL, Quat. *J. Mech. and Appl. Math.*, Vol. 8, p. 129, (1955).