UIT Report Vol. 14, No. 1, pp. 31~35, 1983　　연구논문집 제14권 제1호 pp. 31~35, 1983

交通 Network의 通行配定에 關한 研究

金　在　均
產 業 工 學 科
(1982. 10. 30 접수)

〈초　　록〉

혼잡한 도시교통체계의 Equilibrium通行配定技法에 關하여 研究를 했다. 通行需要는 固定되어 있고, 各 도로의 通行費用函數는 알려져 있는 것으로 가정하였다.

다른 通行配定方法과 比較를 하여 効率을 比較해 보았다.

An Algorithm for the Traffic Assignment Problem

Kim, Jae Gyun
Dept. of Industrial Engineering
(Received October 30, 1982)

〈Abstract〉

In this paper we address the methodology of the equilibrium traffic assignment on congested network. The paper presents a unified approach to an iterative solution procedure within general mathematical frame work.

Comparative Analysis of two basis algorithms for traffic assginment is reported.

I. 序　論

一般的인 交通計劃法은 發生交通量推定, 通行分布推定, 교통수단선정, 通行配定 등의 단계로 나누어진다. 交通計劃의 最終段階는 各 路線에 通行量을 配定하는 通行配定이다. 本 論文에서는 이런 通行配定技法에 대해서 研究를 하였다.

통행수요는 고정되어 있고, 통행비용함수는 알려진 것을 가정하였다.

II절에서는 通行配定을 정의하고 數學的 模型으로 바꾸었으며 III절에서는 最適解에 도달하는 通行配定技法을 提示하였다. 여기서 使用된 方法으로 Convex-Simplex-Method를 이용하였다. IV절에서는 다른 通行配定技法과 比較를 効率性을 調査하였다.

II. 通行配定 問題

Equilibrium通行配定技法은 交通計劃 問題에서 많이 研究되어 온 분야이다. 주어진 地域을 交通地域과 도로로 나타낼 수 있는데 각 交通地域은 出發地와 도착지를 뜻하며 「O-D」로 表示한다. 각 交通地域은 한개의 出發地 또는 도착지를 갖게 된다.

交通計劃 問題에서 「O-D」는 모든 交通量이 出發地에서 시작하여 도착지로 흘러 간다는 것을 假定하고 있다.

각 「O-D」에서 發生하는 交通量을 通行需要라고 하는데 各 도로에 흐르고 있는 通行需要는 현재 通行하고 있는 交通量에 따라 變하게 된다.

通行需要를 各 도로에 配定하는 것은 두가지 경우를 생각할 수 있다. 첫째는 각 經路의 通行量이 Equilibrium狀態에 도달할 때까지 順序的으로 配

定하는 경우와, 둘째는 모든 通行需要를 同時에 配定하고 最適解를 찾아가는 方法이 있다.

이때 「O-D」로 가기 위해 經路를 選擇하는 運轉者의 意思決定은 두가지 形態로 생각할 수 있다. 첫째, 운전자가 택하는 經路는 그 자신이 最小의 費用으로 갈 수 있는 經路를 택하게 된다. 둘째, 운전자가 택하는 經路는 交通 System 全體의 費用을 最小化하도록 택한다. 이 原則을 Wardrop의 原則이라 한다.[1] 또 前者의 경우를 User-Optimization, 後者의 경우는 System-Optizmization이라 한다.

經路의 通行費用은 經路에 포함되는 모든 路線에 해당되는 費用들의 合으로 구할 수 있다.

System-Optianization 問題는 中央集中的 意思決定方法으로 실제 問題에서는 잘 일어 나지 않는다. 그러나 通行費用函數를 간단하게 변화 시킴으로써 User-Optimization 問題에서 System-Optimization 問題로 전환이 可能하다.

Kuhn-Tucker 條件에 依해 System-Optimization 問題에서 Equilibrium 狀態에 도달하기 위한 充分條件을 구해 낼 수 있다.[2]

Equilibrium Point를 決定하기 위해서는 다음과 같은 가정이 필요하다.

假定 1 : 各 도로의 費用은 通行時間, Gas 使用量, 운전자의 긴장도, 차량의 마모 등의 要因에 依해 決定되는 複合的인 費用이다. 通行費用은 通行量에 따라 strictly increasing nonlinear function로 된다.[3]

假定 2 : 各 도로의 費用函數는 운전자들에게 알려져 있고, 운전자는 費用函數를 근거로 理性的인 意思決定을 한다.

n개의 node와 m개의 arc를 갖는 交通 Network을 생각해 보자. node는 도로의 교차로나 「O-D」를 말한다. 使用의 편리함을 위하여 各 node는 $1, 2, \cdots, n$으로, 各 arc는 $1, 2, \cdots, m$으로 表示되고 node에서 처음 $1, 2, \cdots n_0$는 出發地를 나타내는 node라고 하자. 여기 「O-D」를 연결하는 經路 ij는 出發地 i로 부터 도착지 j를 연결하는 같은 方向의 arc들로 구성된 Sequence이다.

g_{ij}는 出發地 i로 부터 도착지 j의 通行需要를, h_l은 經路 l의 交通量을, 그리고 f^s_a는 出發地 s로 부터온 arc a의 交通量을 나타낸다고 하자.

arc a의 總 交通量은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_a = \sum_{s=1}^{n_0} f^s_a \tag{1}$$

혹은

$$f_a = \Sigma_{ij} \Sigma_{l \in Q_{ij}} \delta_{al} h_l \tag{2}$$

여기서 Q_{ij}는 「O-D」의 ij를 연결하는 經路들의 集合이다. δ_{al}은 arc a가 l에 포함되면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는다.

通行變數들의 關係는 흐름保存等式에 依해 表現될 수 있다.

$$\Sigma_{l \in Q_{ij}} h_l = g_{ij}, \quad V_{ij} \tag{3}$$

$$h_l \geq 0, \quad l \in \underset{ij}{U} Q_{ij} \tag{4}$$

혹은

$$\Sigma_{a \in W_i} f^s_a - \Sigma_{a \in V_i} f^s_a = \begin{cases} -g_{si}, & i\text{가 도착지인 경우} \\ 0, & \text{그렇지 않은 경우} \end{cases}$$

$$(i \neq S,\ i = 1, 2, \cdots n;\ S = 1, 2, \cdots n_0) \tag{5}$$

$$f^s_a \geq 0, \quad (a = 1, 2, \cdots m;\ S = 1, 2, \cdots n_0) \tag{6}$$

$$g_{ij} \geq 0, \quad V_{ij} \tag{7}$$

여기서 W_i와 V_i는 i에서 出發하는 arc들의 集合과, i에서 끝나는 arc들의 集合을 나타내게 된다.

C_a는 arc a의 通行費用, V_{ij}는 「O-D」의 ij의 路 通行費用을 나타낸다고 하면 다음과 같은 關係式이 成立한다.

$$C_a = C_a(f_a) \tag{8}$$

$$g_{ij} = D_{ij}(V_{ij});\ V_{ij} = G_{ij}(g_{ij}) \tag{9}$$

여기서

需要函數 D_{ij}는 단조감소函數이며, G_{ij}는 D_{ij}의 역함수이다.

따라서 交通計劃에 있어서 通行配定 問題는 다음과 같이 arc-chain-formulation이나 node-arc formulation을 利用해 convex cost multicommodity flow 問題로 나타낼 수 있다.

$$\text{Minimize } Z = \sum_a Z_a(f_a) - \Sigma_{ij} Z_{ij}(g_{ij}) \tag{10}$$

Subject to a) arc-chain 制約條件 (3)-(4) ;

혹은 b) node-arc 制約條件 (5)-(6)-(7)

여기서 f_a는 (1), (2)式에서 定義된 函數이며

$$Z_a(f_a) = \int_0^{f_a} C_a(x)\,dx \tag{11}$$

$$Z_{ij}(g_{ij}) = \int_0^{g_{ij}} G_{ij}(x)\,dx \tag{12}$$

이다.

通行需要가 固定되어 있는 경우에 目的函數 (10)式은 다음과 같이 줄일 수 있다.

$Z=\Sigma_c(f_a)$ (13)

目的函數가 Convex 라는 것은 (11)式에서 C_a는 단조증가함수, G_{ij}는 단조감소함수를 의미하며 (10)式의 最適解는 유일하게 存在한다.

Ⅲ. 通行配定技法의 開發

(10)式은 다음과 같은 NLP問題로 쓸 수 있다.

$\mathrm{Min}F(x)$ subject to $Ax-b=0,\ x\geqslant 0$ (14)

(14)式은 線形制約條件을 갖는 NLP 問題인데 Zoutendijk의 Feasible dirertion Method에 依해 풀 수 있다.[4]

Feasible dirertion Method에 依해 最適解를 구하기 위해서는 먼저 iteration에 따라 目的函數가 最適解에 수렴하는 것이 보장되어야 한다. 따라서 目的函數가 最適解에 도달하도록 하는 feasible direction을 찾는 것이 重要하다.

目的函數가 Quadratic 函數인 경우에는 LP問題로 Approximation하여 feasible dirertion을 구할수 있고,[5] 目的函數가 一般的 形態일 경우에는 Convex-Simplex Method에 feasible dirertion을 찾아 낼 수 있다.[6]

따라서 通行配定問題에서도 Equilibrium 點을 찾아 가기 위해 Convex-Simplex-Method에 依한 Algorithm을 作成할 수 있다.

먼저 특정한 出發地 S만을 포함하는 조그만 問題를 생각해 보자. 이 問題는 (10-b)式으로 부터 $f^s{}_a$를 제외한 모든 變數를 固定시킴으로서 얻을 수 있다.

또 node-arc-incident 行列의 basis는 Spanning tree를 形成하는 Network을 나타내게 되고,[7] B를 node-arc-incidence matrix A의 Basis를 나타낼 때 $X=B^{-1}A$가 成立한다. $f^s{}_l$가 非基抵變數인 때 이를 나타내는 node-arc incident 行列 A의 列 X_l은 out-of-tree arc l과 in-tree arc에 의해 결정되는 유일한 cycle을 갖는 Network에 대응되게 된다.[7] 여기서 in-tree arc는 X_l의 nonzero 要素들에 의해 결정된다.

이 대응 관계를 구체적으로 表示하면 in-tree arc i가 cycle l과 같은 方向을 가질 때, $X_{il}=1$이고, in-tree-arc i가 cycle l과 反對 方向을 가질 때 $X_{il}=-1$이다. E_l은 out-of-tree are l에 대응되는 cycle l을 나타내고, E_l^+를 l과 같은 方向을 갖는 arc들의 集合, E_l에서 E_l^+要素를 뺀 나머지 要素들의 集合을 E_l^-이라 하면 Cycle cost r_l는 다음과 같이 계산된다.

$$r_l=\sum_{a\in E_l^+}{}' Ca-\sum_{a\in E_l^-}{}' C_a$$

여기서 C_a는 arc a의 費用이다. 따라서 通行配定問題에서의 Convex Simplex direction의 計算은 node-arc-incidence 行列의 basis에서 spannig tree의 구조를 分析함으로 직접 얻어 낼 수 있다.[8]

Cycle 費用 r_l은 出發地 s와 주어진 node를 連結하는 서로 다른 두개의 經路의 費用의 差異로 해석할 수 있다.

P_i를 出發地 s에서 node i로 連結하는 經路라고 할 때, s에서 出發하는 directed Spanning tree가 주어지면 P_i는 유일하게 決定된다. 經路 i의 費用은 $U(i)$로 表示할 때 $U(i)=\Sigma_{a\in P_i}C_a$로 된다.

따라서 Cycle E_l의 費用 r_l은 다음과 같이 계산된다.

$$r_l=C_l+U(i)-U(j) \qquad (15)$$

여기서 $l=(i,j)$이다. (15)式을 利用해 Cycle 費用 r_l을 쉽게 구해 낼 수 있다. 모든 s에 Cycle 費用을 구하면 Global Equilibrium Point에 도달할 수 있다.

(15)式의 結果를 利用해 通行配定問題의 最適解를 구하는 Algorithm은 다음과 같다.

단계 1 : $f^s{}_a,\ a=1,\cdots,m$와 in-tree-arc $T(s)$의 集合을 구한다.

단계 2 : $i\neq s$인 모든 node i에 대해 經路費用 $U(i)$를 구한다. 여기서 $U(i)=\Sigma_{a\in P_i}C_a,\ P_i\in T(s)$이다. $U(s)=0$으로 한다.

단계 3 : 各 out-of-tree arc a에 대해 Cycle 費用 r_a를 구한다. $r_a=C_a+U(i)-U(j)$이고 i와 j는 arc a의 시작 node와 끝점 node를 말한다.

단계 4 : $r_l=\min\{r_a\}$와 $r_kf^s{}_k=\max\{r_af^s{}_a\}$를 구하여, $|r_l|\leqslant\varepsilon,\ r_kf^s{}_k\leqslant\varepsilon$이면 Algorithm을 종지하고, $|r_l|\geqslant r_kf^s{}_k$이면 $j=l$이라 하고 그렇지 않으면 $j=k$로 한다.

단계 5 : Cycle E_j를 조사한다. L_1과 L_2는 E_j를 구성하는 經路라 하고, 交通量의 흐름은 L_1에서 L_2로 옮겨간다고 가정하고 다음을 계산한다.

$$\theta=f^s{}_r=\min_{a\in L_1}\{f_a\}$$

만일 $\theta>0$이면 단계 6으로 가고 그렇지 않으면 $T(s)$를 in-tree-arc r과 r의 끝점 node에 연결된 arc와 교환하여 변화시킨다. 단계 2로 가라.

단계 6 : 다음을 最小化하는 t^*를 구한다.

$$\sum_{a\in L_1} Z_a(f_a-t)+\sum_{a\in L_2}(f_a+t);\ 0<t\leqslant\theta$$

단계 7 : Cycle E_j의 通行量과 通行費用을 다음과 같이 변화시킨다.

$$f^s_a=f^s_a-t^*,\ a\in L_1$$
$$f^s_a=f^s_a+t^*,\ a\in L_2$$
$$e_a=f^s_a+\Sigma_{i\neq s} f^i_a,\ a\in E_j$$
$$C_a=C_a(f_a),\ a\in E_j$$

단계 2로 가라.

Ⅳ. 電算化 및 計算結果

本 論文에서 提示한 通行配定技法을 電算化하는데는 CDC-170컴퓨터에 FORTRAN 言語를 使用하였다. 電算化하는데 考慮한 事項은 다음과 같다.

첫째, 目的函數는 $(Z_a f_a)=t_a(1.0+0.15(f_a/k_a)^4)$[9]을 使用했다. 여기서 t_a는 도로 a의 자유속도, k_a는 도로 a의 通行容量이다. 둘째, 各「O-D」사이의 最小費用經路를 찾기 위해 使用된 方法은 Dijkstra의 Algorithm[10]을 利用했다. 셋째, 단계 6에서 使用된 단계 폭 t^*는 Golden Section Search method[11]를 使用했다. 넷째 通行需要는 Gravity Model[12]을 使用하여 구했다.

本 論文에서 提示한 通行配定技法과 比較를 한 通行配定技法은 「Incremental」 通行配定技法이다.[13] 「Incremental」 通行配定技法은 이산적 通行配定技法으로 *KIST* 도시교통연구실에서 사용되어, 부산시 지하철 건설계획, 서울시 지하철 2,3,4호선 건설계획에서 각 노선의 通行量을 예측하는 데 利用된 바 있다.[14]

교통망의 크기는「O-D」가 2~8개, node의 수가 9~30개, link의 수가 16~110개에 이르는 8개의 교통망을 가상적으로 作成하여 比較해 보았다. 表 1은 각 교통망의 크기를 나타낸다.

表 1에서 주어진 8개의 교통망에 대해서 각 통행배정기법을 계산시간(초/CPU 시간), 목적함수값 별로 비교 분석해 보았다. 먼저 계산시간의 경우에 있어서는 문제의 대부분의 경우 「Incremental」 통행배정방법보다 본 논문에서 제시한 방법이 10~30% 정도 더 걸리는 것으로 나타났다. 〈表 2〉는 각 통행배정방법에 있어서 교통망 별로 소요된 시간을 나타내었다. 그러나 계산결과에 있어서는 본 논문에서 제시된 방법이 「Incremental」 通行配定方法보다 상당히 좋게 나타났다. 〈表 3〉은 교통망 8번의 결과를 상세히 나타낸 것인데 「Incremental」 통행배정방법은 같은 교통망인지라도 通行量을 配定하는 比率에 따라 목적함수 값이 다르게 나타났다. 이는 각 도로의 통행량에 따라 費用函數가 다르게 변하기 때문이다. 反面에 같은 교통망을 본 論文에서 제시한 방법으로 푼 결과를 〈表 4〉에서 나타내 보였다. 목적함수의 값이 「Incremental」 通行配定

〈表 1〉 각 교통망의 크기

교통망	node	arc	oripin
1	9	16	2
2	12	30	3
3	15	30	4
4	20	40	5
5	20	68	5
6	30	100	8
7	30	110	8
8	20	104	6

〈表 2〉 각 교통망의 통행배정방법別 계산시간

[단위 : 초/cpu 시간]

교 통 망	A 방 법	B 방 법
1	0.60	0.73
2	6.23	6.72
3	6.40	6.84
4	26.4	35.85
5	40.6	52.8
6	71.29	80.4
7	100.8	120.64
8	90.8	106.45

A 방법 : 「Incremental」 통행배정방법
B 방법 : 본 논문에서 제시된 방법

〈表 3〉 「Incremental」 통행배정 방법의 통행량 배정비율에 따른 목적함수의 값

Iteration수		통행량배정방법(%)	목적함수의 값
4	1	0.5, 0.2, 0.1, 0.2	0.142960×10^7
	2	0.4, 0.3, 0.2, 0.1	0.143034×10^7
	3	0.5, 0.3, 0.1, 0.1	0.143011×10^7
	4	0.5, 0.2, 0.2, 0.1	0.143966×10^7
	5	0.3, 0.3, 0.3, 0.1	0.142421×10^7
3		0.4, 0.3, 0.3	0.142658×10^7
2		0.5, 0.5	0.143784×10^7

〈表 4〉 본 논문에서 제시한 통행배정 방법의 목적 함수 값

Iteration	목적함수의 값	변화율(%)
1	0.140986×10^7	
2	0.140976×10^7	−0.07831
3	0.140841×10^7	−0.02450
4	0.140830×10^7	−0.00774
5	0.140827×10^7	−0.00245
6	0.140826×10^7	−0.00077

方法에 比해 상당히 改善된 結果를 제시하고 있으며 또한 목적함수의 값이 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이는 통행배정기법에 Feasible dirertion Method를 이용한 結果이기도 하다.

V. 結 論

교통체계의 通行量配定方法은 교통계획 과정에서 매우 중요한 부분이다. 본 논문에서는 通行量配定方法에 對해서 연구를 하였다. 非線型計劃法의 Feasible direction method와 Convex simplex method를 교통체계모형에 적용하여 새로운 통행배정 방법을 만들었다. 또 이 방법을 부산시 지하철 건설계획과 서울시 지하철 2, 3, 4호선 건설계획에서 通行量 예측에 使用된 「Incremental」通行配定方法과 比較分析한 結果 계산시간에 있어서는 「Incremental」通行配定方法이 10~30% 작고, 목적함수의 값은 새로 제시된 방법이 상당히 改善된 結果를 갖는 것으로 나타났다.

참 고 문 헌

(1) Wardrop, J.G., "Some Theoretical Asperts of Road Traffic Research" PROC. INST. CIVIL ENGINEERS, PART Ⅱ, VolⅠ, 1952, pp. 325~378.

(2) A. Weintraub, "Optimal Flows and Games: The multiommodity Flow Problem in integers," Warking Paper 76121IC, University of Chile, 1977.

(3) A Weintraub, "A Prime Algorithm to solve Network Flow Problems with Convex Costs," Mgt. Sci 21(1), pp. 87~94, 1974.

(4) Zoutendijk, G. "Methods of Feasible directions," Elservier, 1960.

(5) Frank, M., and Wolfe, P. "An algorithms of Quardratic Programming," Noval Research Quarterly, Vol3, pp. 95~110, 1956.

(6) Zangwill, W.I. "Nonlinear Programming: A unified Approach," Prentice Hall, Englenwood cliffs, N.J., 1969.

(7) S. Ngyuen, "A unified Approach to Equilibrium Methods for Traffic Assignment," presented at International Symposium of Traffic Equilibrium Methds, Montreal 1975.

(8) S. Nguyen, "An algorithm for the Traffic Assignment Problem," Publication ♯123 Département d'informatique, Université de Montréal, 1973.

(9) U.S. Department of Commerce, Bureau of Public Rood Traffic, "Assigonment Manual", Washington, D.C. 1964.

(10) Dijkstra, E.W., "A note on Two Problems in Connexion with Graphs," Numeriche mathematik, Vol1, 1959, pp. 269—271.

(11) Kowalik, J., and osborne, M.R., "Methode for Unconstrainted optimization Problems," Elservier, New York, 1968.

(12) Martin Manheim, "Fundamentals of Transportation System Analysis," MIT Press, Cambridge, 1979.

(13) Martin, B.V, and M.L. Manheim, "A Research Program for Comparison of Traffic Assignment Technique," Highway Research Record 88, 1965.

(14) 한국과학기술연구소 부설 지역개발연구소, "부산시종합교통계획", 1980.