

마찰 접촉 경계 조건을 가진 링 압축 문제의 유한 요소 해석

진 종 태
 기계공학과
 (1984. 9.30 접수)

〈요 약〉

마찰 접촉 경계 조건을 고려한 링 압축 문제의 유한 요소 해석을 선형 탄성역에 대해 수행하여 마찰조건에 따른 링의 변형 양상 및 마찰 접촉면의 접촉 현상에 대해 조사하였다.

Finite Element Analysis of Ring Compression Problem with Frictional Contact Boundary Condition

Jong-Tae Jinn

Dept. of Mechanical Engineering
 (Received September 30, 1984)

〈Abstract〉

The finite element analysis of ring compression problem was performed in a linearly elastic range considering the frictional contact boundary conditions. The deformation modes of ring and the sticking phenomena on the frictional contact surfaces were investigated in view of friction coefficients.

I. 서 론

링 압축(ring compression) 문제의 해석은 금속성형 가공에서의 공작물과 다이(die)사이의 마찰거동을 조사하는데 편리하게 사용되고 있다. 왜냐하면 대부분의 금속성형 가공은 압축하중 하에서 행하여지며, 또한 압축하중하에서의 링의 변형 양상(deformation mode)과 변형된 칫수를 이용하여 공작물과 다이경계면에서의 마찰상태를 표현할수 있기 때문이다. 이러한 이유로들인해 링 압축 문제의 해석이나 실험등이 지금까지 널리 행하여져 왔으며, 1970년대 이후로는 유한요소법(finite element method)을 도입한 해석 방법이 보편적으로 이용되고 있다. 그러나 지금까지의 대부분의 연구들은 마찰 접촉면에서의 경계조건을 단순화하여 접촉면에서의 상대 미끄럼 현상을 상대 미끄럼 속도(혹

은 상대변위)가 0인 중립반경(neutral radius)을 중심으로 그 속도 방향이 바뀌며, 이 불연속 미끄럼 속도장을 적당한 함수로 표현하여 해석하는 방법을 주로 이용해 왔다[1].

마찰 접촉 경계치 문제(frictional contact boundary value problem) 자체의 유한 요소 해석은 최근 연구되고 있는 과제중의 하나로, 현재까지로는 선형 탄성 재료에 대해서 반복 수행법(iterative method)을 이용하여 수렴해를 구하는 방법이 주로 사용되고 있다[2]. 본 논문에서는 최근 이 [3]에 의해 개발된 해법을 이용하여, 링 압축 문제에 대해 마찰 경계조건을 만족하는 탄성역에서의 거동을 해석해 본 결과 위와 같은 단순속도장의 가정이 마찰조건에 따라서는 실제속도장과 상당한 차이가 있음을 밝히고 있다. 즉, 실제 속도 장에서는 상대 미끄럼 속도가 0인 접촉 부위(sticking zone)가 중립반경이 아닌 상당히 넓은 영역에 걸쳐 발생되고 있

었다. 아울러 이러한 마찰접촉경계 문제에서의 반복 수정 작업을 효율적으로 다룰수 있도록 기존의 frontal 해법을 일부 수정한 방법이 부록에 제시되어 있다.

II. 이론 해석

1. 유한 요소 모델 설정

그림 1과 같은 링 압축 문제의 유한 요소 해석을 위하여 본 연구에 도입된 가정들은 아래와 같다.

(1) 링 재료는 균질, 등방, 선형 탄성이며, 다이 재료는 변형하지 않는다.

(2) 링은 변형 후에도 축대칭성(axisymmetry)이 유지된다.

(3) 변형량은 작지 않으며 (small deformation) 변형에 의한 접촉면의 변화는 적다.

(4) 마찰은 Coulomb의 마찰법칙을 따른다.

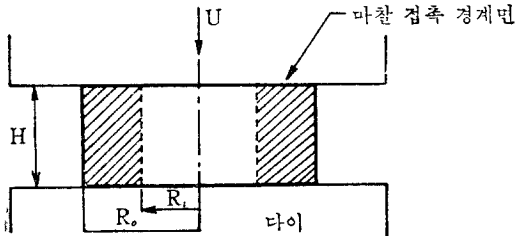


그림 1. 링 압축 문제

이러한 모델에 대해 가상일 원리 (principle of virtual work)를 적용하면,

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \\ = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{\Gamma_1} f_{i1} \delta u_i d\Gamma_1 \\ + \int_{\Gamma_2} f_{i2} \delta u_i d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (1)$$

가 되며 여기서 δ 는 변분(variation)기호, σ 는 응력, ε 은 변형도, u 는 변위, f_{i1} 는 체적힘, f_{i2} 는 비접촉(non-contact) 경계면 Γ_1 에 작용하는 힘, f_{i2} 는 접촉 경계면 Γ_2 에 작용하는 힘이다.

요소(element)내의 변위를 u 절점(nodal point)에서의 변위 벡터 u 로 표현하면,

$$u = N u_n, \quad u_n = \begin{Bmatrix} u_{nc} \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (2)$$

가 되며, N , u_{nc} , u_c 는 각각 interpolation 함수

의 column 벡터, 비접촉 절점에서의 변위 벡터, 접촉 절점 변위 벡터이다. 또한 요소내의 변형도 ε 은 다음과 같이 표현되고,

$$\varepsilon = B u, \quad B = \frac{dN}{dx} \quad (3)$$

여기서 x 는 좌표 벡터이다.

선형 탄성 재료의 응력-변형도 관계식은 다음 식과 같이 표현되고,

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{혹은} \quad \sigma = E \varepsilon \quad (4)$$

여기서 E 는 탄성계수 matrix이다.

식 (2), (3), (4)를 식 (1)에 대입하여 변분 원리를 적용하여 정리하면 아래와 같은 matrix 방정식으로 나타내어진다.

$$K u = R \quad (5)$$

여기서 $K = \int_V B^T E B dV$ 이고, 첨자 T 는 matrix의 transpose를 나타내며, 식(1)의 우변은 아래와 같은 각 절점에서의 힘 벡터 R 로 표시될 수 있다.

$$R = \begin{Bmatrix} F \\ P \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 F , P 는 각각 비접촉 절점 힘 벡터, 접촉 절점 힘 벡터를 나타낸다.

식 (1) 혹은 식 (5)가 만족하여야 할 접촉 경계면에서의 경계조건들은 다음과 같다. (7)

i) 경계면의 분리 조건

$$(D_i - u_i)_N < 0 \text{ 일 때 } P_{i,N} = 0.$$

여기서 i 는 절점, N 은 수직 방향 성분을 나타내며 D 는 두 접촉 물체 사이의 초기 간격으로 링 압축의 경우 압축량을 표시한다.

ii) 경계면의 접촉 조건

$$(D_i - u_i)_N = 0 \text{ 일 때 } P_{i,N} \leq 0.$$

iii) 침투 방지(no penetration) 조건

$$(D_i - u_i)_N \leq 0$$

iv) 경계면의 접촉 조건

$$|P_{i,T}| \leq \mu |P_{i,N}| \text{ 일 때 } U_{i,T} = 0.$$

여기서 $||$ 는 절대값을 나타내며, T 는 수평 방향 성분, μ 는 Coulomb 마찰 계수이다.

식 (5)는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} u_{nc} \\ u_c \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} F \\ P \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $[C] = [K]^{-1}$ 즉 influence matrix이다. 식 (8)의 해를 구하기 위해서는 u 및 P 를 반복 수정시키면서 식 (7)의 조건들을 만족시키는 값들을 찾아야 한다. 본 연구의 경우 $[C]$ 가 일정하므로, 식

(8)을 변형하여,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{nc} \\ u_c \end{Bmatrix} &= [C] \begin{Bmatrix} F \\ \rho \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \rho \\ P \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} u_{nc} \\ u_c \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \rho \\ P \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

혹은 간단히,

$$\begin{aligned} u_c &= w_c + [C']P \\ u_{nc} &= w_{nc} \end{aligned} \quad (10)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $[C']$ 은 $[C]$ matrix의 접촉 절점에 관계되는 부분 matrix를 나타낸다. 일단 식 (5)가 식(10)으로 표시될 수 있기 때문에 실제 반복수행에 필요한 계산량은 훨씬 감소시킬수 있다.

2. 해법(solution algorithm)

II-1 절에서 실정한 유한 요소 모델에 대해 최근 이 [3]에 의해 개발된 해법을 적용하였다. 본 해법은 식 (7)의 접촉 경계 조건에 저촉되는 양을 error로 표현하여, 이 error의 양을 감소시킬 수 있게 접촉 절점에서의 힘 벡터를 수정시키면서 반복 수행을 통해 식 (7)의 조건을 만족하는 수렴해를 구한다.

(1) error norm 과 수렴 조건 (convergence criteria)

m 번째 반복 수행에서의 error norm을 아래와 같이 정의한다.

$$\|V\| = \left[\sum_{i=1}^{NCOPT} \{({}^m V_{IN})^2 + ({}^m V_{IT})^2\} \right]^{1/2} \quad (11)$$

여기서, ${}^m P_{IN} < 0$ 일 경우 ${}^m V_{IN} = (u_i - D_i)_N$ 이고, ${}^m P_{IN} = 0$ 일 경우 ${}^m V_{IN} = 0$. 또 $|{}^m P_{IT}| < \mu |{}^m P_{IN}|$ 이거나, ${}^m P_{IT}$ 의 부호가 ${}^m u_{IT}$ 의 부호와 반대일 경우 ${}^m V_{IT} = {}^m u_{IT}$ 이고, 그 외의 경우 ${}^m V_{IT} = 0$ 이다.

수렴 조건은 식 (11)에서 정의된 error norm이 최대 허용 오차 이하가 될 경우, 혹은 식 (13)에서 정의된 수렴속도가 일정치 이하가 될 경우로 하였다.

$$\|V\| < \text{최대 허용 오차} \quad (12)$$

$$\frac{\|V\| - \|{}^{m-1}V\|}{\|{}^{m-1}V\|} < \text{일정치} \quad (13)$$

(2) 반복 수행 기법

<초기 단계>

- i) 식 (5)의 stiffness matrix K 를 구한다.
- ii) 접촉 절점을 제외한 global load 벡터 R 을 구한다.

iii) $P_{IT} = 0$ 로 둔다.

<반복 단계>

iv) frontal method를 이용하여 식 (5)로 부터 변위 벡터 u 를 구한다.

v) m 번째 반복 수행에서의 접촉 절점의 힘 벡터는 아래와 같이 수정된다. 만약, ${}^m P_{IN} < 0$ 이면 ${}^m P_{IN} = -{}^{m-1}P_{IN} - \alpha {}^{m-1}(u_i - D_i)_N$ 이고, ${}^m P_{IN} > 0$ 이면 ${}^m P_{IN} = 0$. 또, $|{}^m P_{IT}| < \mu |{}^m P_{IN}|$ 이면 ${}^m P_{IT} = -{}^{m-1}P_{IT} - \alpha {}^{m-1}u_{IT}$ 이고, $|{}^m P_{IT}| \geq \mu |{}^m P_{IN}|$ 이면 ${}^m P_{IT} = ({}^m P_{IT}$ 의 부호) $\mu {}^m P_{IN}$ 이다. 여기서 α 는 influence matrix C 에 관계되는 매개 변수이며 다음 절에서 설명되어진다.

vi) 수렴 조건을 이용하여 수렴 해인지 조사한다. 만약 수렴되지 않았다면 iv)~vi)을 반복 수행한다.

(3) 매개 변수 α 의 선정

전절에서 설명한 반복 수행 해법을 이용하여 수렴해를 구하기 위해서는 매개 변수 α 의 선정이 필요하다. α 의 값이 크면 수렴 속도는 증가되나 해가 발산되거나 요동되므로, 이론적인 α 의 최적 값은 아래의 조건을 만족하는 최대값을 의미한다.

$$0 < \alpha < \frac{2}{\|C'\|_{\infty}} \quad (14)$$

식(14)의 유도 및 증명은 문헌 [3]에서 찾을 수 있다. 또 $\|C'\|_{\infty}$ 은 직접 계산하는 것보다 C' matrix의 대략적인 최대 eigenvalue를 구하여 그 값 보다 약간 큰 값을 채택하는 것이 편리하다.

III. 계산 결과 및 고찰

표 1의 제원을 가진 링에 대한 유한 요소 모델은 그림 2와 같으며, 이 모델의 마찰 계수 변화에 따른 계산 결과는 표 2 및 그림 3과 같다.

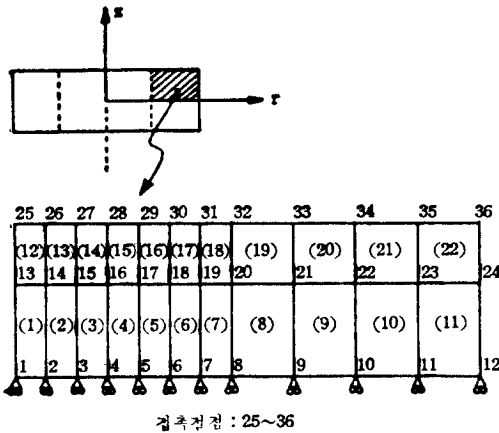
표 1. 링의 제원

외 측 반 경 R_o	15mm
내 측 반 경 R_i	7.5mm
높 이 H	5mm
탄 성 계 수 E	7,000kgf/mm ²
포 아 승 비 ν	0.3
마 찰 계 수 μ	0~0.2

표 2. 마찰계수 변화에 따른 계산 결과

마찰 계수	최 종 칫 수 *				접착 점	변형 양상 §
	최소 ΔR_r	최대 ΔR_r	최소 ΔR_o	최대 ΔR_o		
0.	0.0045 <25>**	0.0045 <1>	0.0090 <36>	0.0090 <12>	없음	양상 1
0.01	0.00346 <25>	0.00354 <1>	0.00819 <36>	0.00823 <12>	없음	양상 1
0.05	-0.00037 <25>	-0.00016 <1>	0.00500 <36>	0.00532 <12>	<26>	양상 2
0.1	-0.0016 <1>	-0.0010 <25>	0.0034 <36>	0.0041 <12>	<28>~<29>	양상 3
0.2	-0.0023 <1>	-0.0008 <25>	0.0016 <36>	0.0032 <12>	<28>~<33>	양상 3

주 : * : 압축량 0.005mm 일때의 링의 변형 칫수이며 $\|V\|^2 < 10^{-8}$ 으로 취했음.
 ** : < >안은 절결 번호
 § : 그림 3참조



본 수치 실험에서 사용한 매개 변수 α 의 값은 50,000~80,000으로 수렴 속도에 따라 α 의 값에 변화를 주면서 계산하였다. 표 2의 계산결과에 나타나 있는 바와 같이 마찰계수의 값이 증가함에 따라 접착 부위(sticking zone)도 증가함을 알 수 있다. 즉 마찰 계수 μ 가 0.05일때는 하나의 요소에서만 접착 현상이 발생하였으나, 0.2일때는 여섯개의 요소에서 발생하고 있었다. 아울러 링의 변형 양상은 마찰 조건에 따라 세가지 다른 형태로 나타나고 있으며 양상 (1) 및 (3)은 일반적인 경우이나 마찰조건에 따라서는 양상 (2)도 발생될 수 있음을 보이고 있다. 변형 양상 (2)에 대한 실제 링 압축 실험에 대한 연구는 문헌 [5]에 있다.

그림 2. 축 대칭 유한 요소 모델

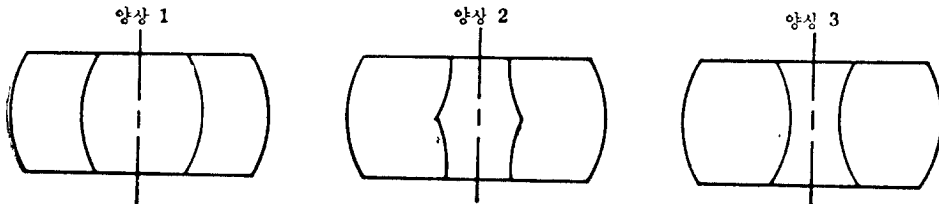


그림 3. 링의 변형 양상

IV. 결 론

참 고 문 헌

마찰 접촉 경계 조건을 가진 링 압축 문제를 유한 요소 해석한 결과 마찰 접촉면에서의 상대 미끄럼 속도장은 마찰상태가 심할 수록 많은 접촉부를 포함하고 있었다. 이는 지금까지의 단순 미끄럼 속도장의 가정, 즉 중립 반경에서만 접촉 현상이 발생한다는 가정이 실제 속도장과는 상당한 차이가 있음을 밝히고 있다. 따라서 링 압축 공정의 정확한 해석을 위해서는 단순 미끄럼 속도 장의 가정을 수정하여 사용하던지, 본 연구에서와 같이 마찰 접촉 경계 조건을 만족시키는 algorithm을 사용하여야 한다. 그러나 본 연구에서 사용한 해법도 수렴 해를 구하기 까지 많은 횟수의 반복 수행 작업을 하여야 되며 마찰 계수의 값이 클수록 수렴성이 저조하다는 단점이 있다.

〈 후 기 〉

본 연구는 교수 해외 연수 프로그램에 의거 미국 오하이오 주립대학에 파견되어 수행된 것이다.

1. C. C. Chen & S. Kobayashi, Rigid Plastic Finite Element Analysis of Ring Compression, Application of Numerical Methods to Metal Forming Processes, ASME, AMD, Vol.28, p.163, 1978
2. J. T. Oden & G. F. Carey, Finite Elements—Special Problems in Solid Mechanics, Vol.5, Prentice Hall, 1984.
3. Kisu Lee, Numerical Solution of Elastic Contact Problem Including Friction, Ph. D. dissertation, The Ohio State University, 1984.
4. E. Hinton & D.R.J. Owen, Finite Element Programming, Ch. 8, Academic Press, 1977.
5. M.N. Janardhana & S.K. Biswas, Modes of Deformation in Aluminium Rings Subjected to Static Axial Compression, Int. J. Mech. Sci., Vol.21, p.699, 1979.

부 록

II-1절의 식 (10)을 효율적으로 반복 수행하기 위해서 일반적인 frontal method를 일부 수정하여 사용하였다. 즉 frontal method는 요소 단위로 assembly 및 elimination 작업을 수행하기 때문에, 본 문제와 같이 부분적인 절점에서의 힘벡터의 수정만 요구될 경우라도 반복 수행 중 계산량을 줄일 수 없다. 본 연구에서 채택한 방법은 일반적인 frontal method에서와 같이 요소 단위로 assembly 및 elimination 작업을 수행하되 접촉 절점 부분은 나중에 모아서 따로 Gaussian method를 이용함으로써 반복 수행에서는 이 나중 부분만 계산하도록 하였다.

그림 4와 같은 간단한 모델에 대한 계산 예는 아래와 같다.

각 절점에서의 자유도는 1이며 각 요소에서의 stiffness matrix load 및 vector는 동일하게 아래의 같다.

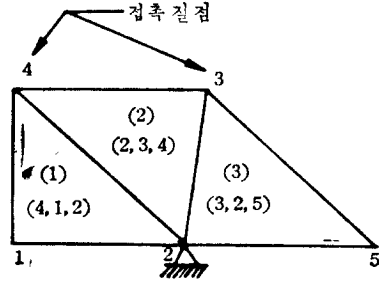


그림 4. 계산 예제

$$k_{ij}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(e)} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

또 절점 3과 4는 접촉 절점이며 절점 2는 고정 절점으로 $u_2=0$ 이다.

단계 1: 요소 (1)의 결합

$$\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 10 \\ -1 & 3 & -2 & : & 10 \\ 0 & -2 & 2 & : & 10 \end{bmatrix}$$

절점 1의 소거

$$\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.67 & 0 & -0.67 & : & 13.3 \\ -1 & 3 & -2 & : & 10 \\ -0.67 & 0 & 0.67 & : & 16.7 \end{bmatrix}$$

$(-1, 3, -2, 10)$ 을 저장

단계 2: 요소 (2)의 결합

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \left. \begin{bmatrix} 0.67+2^{(2)} & -2^{(2)} & -0.67+0^{(2)} & : & 13.3+10^{(2)} \\ -2^{(2)} & 3^{(2)} & -1^{(2)} & : & 10^{(2)} \\ -0.67+0^{(2)} & -1^{(2)} & 0.67+1^{(2)} & : & 1.67+10^{(2)} \end{bmatrix} \right\}$$

단계 3: 요소 (3)의 결합

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{matrix} \left. \begin{bmatrix} 2.67 & -2 & -0.67 & 0 & : & 23.3 \\ -2 & 3+1^{(3)} & -1-1^{(3)} & 0^{(3)} & : & 10+10^{(3)} \\ -0.67 & -1-1^{(3)} & 1.67+3^{(3)} & -2^{(3)} & : & 26.7+10^{(3)} \\ 0 & 0^{(3)} & -2^{(3)} & 2^{(3)} & : & 10^{(3)} \end{bmatrix} \right\}$$

절점 2의 소거

$(-0.67, -2, 4.67, -2, 36.7)$ 을 저장

절점 5의 소거

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2.67 & -2 & 0 & : & 23.3 \\ -2 & 4 & 0 & : & 20 \\ 0 & 0 & 2 & : & 10 \end{bmatrix}$$

(0, 0, 2, 10)을 저장

단계 4: 접촉 절점들의 소거

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} 2.67 & -2 : 23.3 \\ -2 & 4 : 20 \end{array} \right\}$$

위 matrix를 다음 반복 수행을 위해 저장

절점 4의 소거

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} 2.67 & -2 : 23.3 \\ 0 & 2.5 : 37.6 \end{array} \right\}$$

(2.67, -2, 23.3)을 저장

(2.5, 37.6)을 저장

단계 5: backsubstitution

$$u_3=15, u_4=20, u_5=5, R_2=90, u_1=10$$

단계 6: 반복 수행

접촉 절점에서의 힘 벡터 수정량을 ΔR_4 및 ΔR_3 라고 하면, 단계 4에서 저장한 matrix를 이용하여 단계 4~6을 반복 수행하면 된다.

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} 2.67 & -2 : 23.3 + \Delta R_4 \\ -2 & 4 : 20 + \Delta R_3 \end{array} \right\}$$