相變化 問題의 近似的 解析

元聖弼 · 李根植
機 械 工 學 科
(1983. 4. 30 접수)

〈요 약〉

初期條件이 飽和狀態의 固相이고, 한벽면의 온도가 嚴密한 時間의 함수(단조감소, 단조증가, 주기함수)로 주어지며, 다른 벽면은 단열되어 있는 一次元 相變化 問題에 대하여 近似的 解析方法인 Approximate Neumann's Approach, Megerlin's Method, Biot's Variational Method, Perturbation Method 등을 이용하여 해석함으로써 相變化率과 温度分布등을 求하였으며 각 해석방법間의 結果의 誤差는 아주 각아 서로 잘 一致함을 보여주고 있다.

Approximate Solutions of A Phase Change Problem

Won, Sung Pil and Lee, Geun Sik
Dept. of Mechanical Engineering
(Received April 30, 1983)

〈**Abstract**〉

Using approximate analytical methods such as Approximate Neumann's Approach, Megerlin's method, Biot's variational method, and Perturbation method, the analytical expressions about the melting rate and the temperture distribution in the liquid phase have been obtained for the one dimensional phase change problem whose initial condition is the saturated solid phase and whose boundary condition is that the temperature of one wall is considered the discrete function such as monotonic decreasing, monotonic increasing or periodic functions about time and the other wall is considered insulated. Close agreement about the results has been obtained although four different approximate methods in analysis are used.

〈기 호〉

C_p= 정압비열
g_1, g_2=무차원화된 generalized coordinates
k= 열전도계수
l= 특성길이
L= 잠열
q_1, q_2= generalized coordinates
s= 무차원화된 상변화단의 위치
t= 시간
T = 온도
T_w= 초기벽면온도($F(0)$)
T_m= 상변화온도
x= 공간좌표
U= 무차원화된 온도$\left(\frac{T-T_m}{T_w-T_m}\right)$
X= 무차원화된 공간좌표$\left(\frac{x}{l}\right)$
ρ= 밀도
α= 열확산계수$\left(\frac{k}{\rho C_p}\right)$
τ= 무차원화된 시간
ε= Stefan수$\left(\frac{C_p(T_w-T_m)}{L}\right)$
δ= 상변화단의 위치

$\phi=$ 특성온도$(T-T_m)$

$\xi=$ 무차원화된 공간좌표$\left(\frac{x}{\delta}\right)$

상첨자

· =시간에 관한 도함수

I. 서 론

상변화를 수반하는 열전달 문제의 해석은, food processing, polymer production, solidification of soil, *metal casting, frost and ice formation*, nuclear reactor operation 등과 같은 문제에서 중요하다. 그러나 상변화단에서의 비선형 경계조건 때문에, 엄밀한 의미의 해석적 방법으로 해결할 수 있는 경우는 한정되어 있다. 따라서 공학적인 면에서 엄밀한 정확성이 요구되지 않는다면, 근사적인 해석 방법이 편리하며 실질적인 것이 된다. 상변화 문제에 대한 근사적인 해석 방법으로는, 우선, Biot's variational method(6,7)를 들 수 있고, integral heat balance method(6), Megerlin's method(3), perturbation method(8-12)등이 있다. 그러나 이와 같은 근사적 방법으로 해석한 문제의 경계조건은 보통 벽면에서 온도 혹은 열유속이 일정하거나, 대류나 복사에 의해 열전달이 이루어진다는 조건들이며 벽면의 온도가 어떤 엄밀한 시간의 함수로 주어지는 경우에 대한 해는 거의 찾아볼 수 없다.

따라서 본 논문은 한 벽면의 온도가 엄밀한 시간의 함수로 주어지는 경우의 일차원 문제를, approximate Neumann's approach(1-2), Megerlin's method, Biot's variational method, *perturbation* method 등을 이용하여 해석하고자 한다.

II. 해 석

Fig.1에서 보는 바와 같이, 한 벽면의 온도가 시간의 함수로 주어지고, 다른 벽면은 단열되어 있으며 초기 조건이 고상(固相)이며 포화온도인 1차원 상변화 문제의 기본방정식 및 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ (0\le x\le l) \tag{1}$$

$$t=0,\ T=T_m \tag{2}$$

$$t>0,\ x=0,\ T=F(t) \tag{3}$$

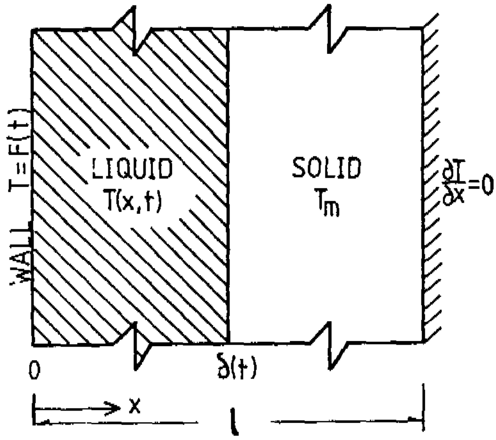

Fig 1. Schematic Representation of Phase Change Problem.

$$x=\delta(t),\ \rho L\frac{d\delta}{dt}=-k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{4}$$

$$T=T_m \tag{5}$$

$$x=l,\ \frac{\partial T}{\partial x}=0 \tag{6}$$

위의 문제를 해석하는 데 있어, 모든 물성치들은 일정하다고 가정하고, approximate Neumann's approach, Megerlin's method, Biot's variational method, singular perturbation method 등의 근사적 방법을 사용하여, 온도분포와 상변화선의 위치 등을 구하여 보기로 한다. 그리고 식(6)의 조건은 초기온도가 포화온도이기 때문에 자동적으로 만족된다고 볼 수 있으므로 다음부터는 생략하기로 한다.

1. Approximate Neumann's Approach

우선 일반적인 경우에 적용하기 위하여 식(1)—(5)를 여러가지 무차원수를 이용하여 무차원화 하면 다음의 식(7)—(11)과 같이 된다.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\ (0\le X\le 1) \tag{7}$$

$$\tau=0,\ U=0 \tag{8}$$

$$\tau>0,\ X=0,\ U=f(\tau) \tag{9}$$

$$X=S(\tau),\ \frac{ds}{d\tau}=-\varepsilon\frac{\partial U}{\partial X} \tag{10}$$

$$U=0 \tag{11}$$

여기서

$$U=\frac{T-T_m}{T_w-T_m},\quad \tau=\frac{\alpha t}{l^2},\quad X=\frac{x}{l},\quad s=\frac{\delta}{l},$$

$$\varepsilon = \frac{C_p(T_w - T_m)}{L}$$

이다. 이제 온도분포를 다음과 같이 error function 으로 가정한다.

$$U(X,\tau) = A + B\,\mathrm{erf}\frac{X}{2\sqrt{\tau}} \tag{12}$$

여기서 A와 B는 상수이다. 식(9)와 (11)에 의하여 상수 A, B가 결정되며, 따라서 식(12)는

$$U(X,\tau) = f(\tau) - \frac{f(\tau)}{\mathrm{erf}\frac{s}{2\sqrt{\tau}}}\,\mathrm{erf}\frac{X}{2\sqrt{\tau}} \tag{13}$$

이 된다. 상변화면의 위치 $s(\tau)$를 Asymptotic Estimate[3]에 의하여 다음과 같이 가정한다.

$$s(\tau) = K\sqrt{\int_0^\tau f(\tau)d\tau} \tag{14}$$

여기서 K는 비례상수이며, 식 (14)를 식 (10)에 대입하여 정리하면,

$$\frac{Kf(\tau)}{2C} = \frac{\varepsilon f(\tau)}{\sqrt{\pi\tau}\,\mathrm{erf}\frac{K\cdot C}{2\sqrt{\tau}}}\cdot\exp\left(-\frac{K^2C^2}{4\tau}\right) \tag{15}$$

가 되고, 여기서

$$C = \sqrt{\int_0^\tau f(\tau)d\tau}$$

이다.

식(15)를 Newton Raphson 방법으로 풀어 K값을 정하면, 임의의 (X, τ)에서의 온도분포와 상변화면의 위치를 식(13)과 (14)에 의하여 각각 결정할 수 있다.

2. Megerlin's Method

식(7)—(11)에 대한 온도분포를 다음과 같이 가정한다.

$$U(X,\tau) = \sum_{j=1}^{2} a_j(\tau)(X-s)^j \tag{16}$$

식(7)과 (10)의 관계에서, $X = s(\tau)$에서의 새로운 경계조건을 유도할 수 있으며, 그것은

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 = 0 \text{ at } X = s(\tau) \tag{17}$$

이 된다. 식(10)과 (17)에 의하여 계수 $a_1(\tau)$와 $a_2(\tau)$를 구하면, 식 (16)은

$$U(X,\tau) = -\frac{\dot{s}}{\varepsilon}(X-s) + \frac{(\dot{s})^2}{2\varepsilon}(X-s)^2 \tag{18}$$

이 된다. 식(9)의 경계조건에 식(18)을 대입하여 정리하면

$$s^2(\dot{s})^2 + 2s\dot{s} - 2\varepsilon f(\tau) = 0 \tag{19}$$

가 얻어진다. 이 식을 $\dot{s}$에 대하여 풀면,

$$\dot{s} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2\varepsilon f(\tau)}}{s} \tag{20}$$

이 된다. $\dot{s}>0$이어야 하므로

$$\dot{s} = \frac{-1 + \sqrt{1+2\varepsilon f(\tau)}}{s} \tag{21}$$

이 되며, s를 양변에 곱하고 적분하면,

$$s = \sqrt{2\int_0^\tau \left(\sqrt{1+2\varepsilon f(\tau)} - 1\right)d\tau} \tag{22}$$

가 된다. 결국 식 (18)과 (22)에 의해 온도 분포와 상변화면의 위치를 각각 결정할 수 있다.

3. Biot's Variational Method

식 (1)—(5)를 새로운 변수 $\phi = T - T_m$을 이용하여 변형하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le l) \tag{23}$$

$$t = 0,\ \phi = 0 \tag{24}$$

$$t > 0,\ x = 0,\ \phi = F(t) \tag{25}$$

$$x = \delta(t),\ \rho L\frac{d\delta}{dt} = -k\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{26}$$

$$\phi = 0 \tag{27}$$

Biot's variational principle을 이용하면, 우선 thermal flow vector, $\vec{H}$가 다음과 같이 정의된다

$$\mathrm{div}\vec{H} = -\rho C_p\phi \tag{28}$$

구간 $0 \le x \le \delta$에서, 온도분포를 다음과 같이 가정한다.

$$\phi = q_1\left(1 - \frac{x}{q_2}\right) \tag{29}$$

여기서 q_1과 q_2는 generalized coordinates이며 q_1은 $F(t)$를, q_2는 $\delta(t)$를 나타낸다. 식 (26), (28), (29)를 이용하면, $\vec{H}$는

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\rho C_p q_1 q_2\left(1 - \frac{x}{q_2}\right)^2 + \rho L q_2 \tag{30}$$

으로 표시된다. Biot's variational principle에 따른 generalized Lagrangian 방정식은,

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{31}$$

이며, m은 generalized coordinates의 수이다.
여기서,

$$V = \frac{1}{2}\int_v \rho C_p\phi^2 dv \tag{32-1}$$

$$D = \frac{1}{2k}\int_v (\dot{\vec{H}})^2 dv \tag{32-2}$$

$$Q_i = -\int_A \phi\frac{\partial\vec{H}}{\partial q_i}\cdot\vec{n}\,dA \tag{32-3}$$

이나. 식(29)와 (30)을 식(31)에 대입하여 정리하면,

$$\left(\frac{\rho L^2}{kC_p}+\frac{2\rho L}{3k}q_1+\frac{2\rho C_p}{15k}q_1^2\right)q_2\dot{q}_2+\left(\frac{3\rho C_p}{40k}q_1+\frac{\rho L}{6k}\right)q_2^2q_1=\frac{1}{3}q_1^2+\frac{L}{C_p}q_1 \tag{33}$$

이 된다. 앞에서의 (Ⅱ의 1와 2)무차원 결과와 맞추기 위해, 무차원수

$$U=\frac{\phi}{T_w-T_m},\ g_1=\frac{q_1}{T_w-T_m},\ \tau=\frac{\alpha t}{l^2},$$
$$g_2=\frac{q_2}{l},\ E=\frac{1}{\varepsilon}$$

등을 이용하여, 다시 정리하면,

$$\left(E^2+\frac{2}{3}Eg_1+\frac{2}{15}g_1^2\right)g_2\dot{g}_2+\left(\frac{3}{40}g_1+\frac{E}{6}\right)g_2^2g_1=\frac{1}{3}g_1^2+Eg_1 \tag{34}$$

가 된다. 식(34)를 Runge-Kutta method를 이용하여 풀면, 상변화선의 위치를 결정할 수 있고, 식(24)로 돌아가서 온도분포를 결정할 수 있다.

4. Perturbation Method

perturbation 방법은 nonuniformity의 유무에 따라 regular perturbation과 singular perturbation으로 나눌 수 있다. 상변화문제에 대한 perturbation 방법의 적용에 있어서도 두가지 방법을 다 이용할 수 있으나, 일반적으로 초기 온도가 상변화온도인 문제는 상변화단에서 온도구배에 대한 nonuniformity가 존재하지 않으므로 regular perturbation 방법으로 해석이 가능하다. 따라서 식(1)—(5)를 x에 대하여 새로운 무차원수 $\xi=\frac{x}{\delta}$를 이용하여 변형하면 다음의 식(35)—(39)가 된다.

$$\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}=s^2\frac{\partial U}{\partial\tau}-\xi s\frac{ds}{d\tau}\frac{\partial U}{\partial\xi} \tag{35}$$
$$U(\xi,0)=0 \tag{36}$$
$$U(0,\tau)=f(\tau) \tag{37}$$
$$s\frac{ds}{d\tau}=-\varepsilon\frac{\partial U(1,\tau)}{\partial\xi} \tag{38}$$
$$U(1,\tau)=0 \tag{39}$$

여기서 U,τ,s는 앞에서 정의된 무차원수와 같다.
위의 식 (35)—(39)를 만족하는 U와 s의 해를 ε에 대하여 급수전개하여 다음과 같이 가정한다.

$$U(\xi,\tau;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{n}{2}}U_n(\xi,\tau) \tag{40}$$
$$s(\tau,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'\varepsilon^{\frac{n}{2}}s_n(\tau) \tag{41}$$

식 (40)과 (41)을 식 (35)—(39)에 대입하면 다음의 급수방정식을 얻는다.

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}'\varepsilon^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2U_n}{\partial\xi^2}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{l+m+n}{2}}s_ls_m\frac{\partial U_n}{\partial\tau}-\xi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\varepsilon^{\frac{l+m+n}{2}}s_l\frac{ds_m}{d\tau}\frac{\partial U_n}{\partial\xi} \tag{42}$$
$$U_n(\xi,0)=0,\ n\geq0 \tag{43}$$
$$U_n(0,\tau)=\begin{cases}f(\tau), & n=0 \quad (44\text{-}1)\\ 0, & n\geq1 \quad (44\text{-}2)\end{cases}$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{m+n}{2}}s_m\frac{ds_n}{d\tau}=-\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}{}'\varepsilon^{\frac{n}{2}}\frac{\partial U_n(1,\tau)}{\partial\xi} \tag{45}$$
$$U_n(1,\tau)=0,\ n\geq0 \tag{46}$$

여기서 l,m,n은 0과 자연수이다.

식(42)—(46)에서 orderε^0에 대한 식들은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2U_0}{\partial\xi^2}=s_0^2\frac{\partial U_0}{\partial\tau}-\xi s_0\frac{ds_0}{d\tau}\frac{\partial U_0}{\partial\xi} \tag{47}$$
$$U_0(\xi,0)=0 \tag{48}$$
$$U_0(0,\tau)=f(\tau) \tag{49}$$
$$s_0\frac{ds_0}{d\tau}=0 \tag{50}$$
$$U_0(1,\tau)=0 \tag{51}$$

식(50)으로부터 s_0는 상수이며, 초기조건 $s(0)=0$에 의하여

$$s_0=0 \tag{52}$$

가 되고, 식(47)에 식 (52)를 대입하고 경계조건인 식 (49), (51)에 의하여

$$U_0=f(\tau)(1-\xi) \tag{53}$$

이 얻어진다. 따라서 s_0와 U_0의 해를 급수방정식 (42)—(46)에 대입하면 order $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$에 관해서는 다음의 식들이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2U_1}{\partial\xi^2}=0 \tag{54}$$
$$U_1(\xi,0)=0 \tag{55}$$
$$U_1(0,\tau)=0 \tag{56}$$
$$s_0\frac{ds_1}{d\tau}+s_1\frac{ds_0}{d\tau}=0 \tag{57}$$
$$U_1(1,\tau)=0 \tag{58}$$

식 (54), (56), (58)로 부터

$$U_1=0 \tag{59}$$

가 되며 s_1은 현단계에서 결정할 수 없다. 다음단계로 order ε^1에 관한 급수방정식을 구하면,

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2} = s_1^2 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - \xi s_1 \frac{ds_1}{d\tau} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \tag{60}$$

$$U_2(\xi, 0) = 0 \tag{61}$$

$$U_2(0, \tau) = 0 \tag{62}$$

$$s_1 \frac{ds_1}{d\tau} = -\frac{\partial U_0(1, \tau)}{\partial \xi} \tag{63}$$

$$U_2(1, \tau) = 0 \tag{64}$$

가 된다. 식 (63)과 초기 조건 $s(0)=0$에 의하여

$$s_1 = \left(2\int_0^\tau f(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \tag{65}$$

가 되며, 식(65)를 식 (60)에 대입하고, 경계조건인 식(62), (64)로 부터

$$U_2 = \frac{f(\tau)^2}{6}(\xi^3 - \xi) + \frac{df}{d\tau}\int_0^\tau f(\tau)d\tau \frac{1}{3}(-\xi^3 + 3\xi^2 - 2\xi) \tag{66}$$

이 얻어진다.

마찬가지로 order $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$에 대한 급수방정식으로 부터

$$S_2 = 0 \tag{67}$$

$$U_3 = 0 \tag{68}$$

이 얻어지며, order ε^2에 대한 급수방정식으로부터

$$S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{6} f(\tau)\left(\int_0^\tau f(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \tag{69}$$

가 얻어진다.

이상을 정리하면 U와 S에 대한 해는

$$U = U_0 + \sqrt{\varepsilon}U_1 + \varepsilon U_2 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon} + 0(\varepsilon^2)$$
$$= f(\tau)(1-\xi) + \varepsilon\left[\frac{f(\tau)^2}{6}(\xi^3 - \xi) + \frac{1}{3}(-\xi^3 + 3\xi^2 - 2\xi)\frac{df}{d\tau}\int_0^\tau f(\tau)d\tau\right] + 0(\varepsilon^2) \tag{70}$$

이 되고

$$S = s_0 + \sqrt{\varepsilon}\, s_1 + \varepsilon s_2 + \sqrt{\varepsilon}\, s_3 + 0(\varepsilon^2)$$
$$= \sqrt{2\varepsilon}\left(\int_0^\tau f(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\varepsilon}{6}f(\tau)\right] + 0(\varepsilon^2) \tag{71}$$

이 된다. 그리고 위에서 구한 U와 S의 해는 엄밀히 말한다면 $\varepsilon \ll 1$일 때 성립되는 것이나, 일반적으로 $\varepsilon \leq 0.5$일때는 합당한 해가 될 수 있다.

III. 결과 및 고찰

Stefan수 (ε)가 0.1이고, 벽면온도에 대한 함수

Table 1. Melting Rates obtained from Four Different Approximate Methods, When $f = \exp(-\tau)$

τ	S			
	II-1	II-2	II-3	II-4
0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.18762	0.18639	0.18351	0.18781
0.4	0.25355	0.25178	0.25131	0.25391
0.6	0.29673	0.29495	0.29582	0.29765
0.8	0.32815	0.32622	0.32802	0.32938
1.0	0.35190	0.34984	0.35234	0.35338
1.2	0.37027	0.36812	0.37115	0.37197
1.4	0.38474	0.38247	0.38593	0.38658
1.6	0.39625	0.39386	0.39776	0.39818
1.8	0.40545	0.40297	0.40704	0.40746
2.0	0.41290	0.41028	0.41458	0.41491
2.5	0.42588	0.42299	0.42768	0.42788
3.0	0.43366	0.43054	0.43546	0.43558
3.5	0.43839	0.43505	0.44011	0.44019
4.0	0.44130	0.43777	0.44292	0.44296
4.5	0.44310	0.43941	0.44461	0.44464
5.0	0.44423	0.44041	0.44564	0.44566
6.0	0.44542	0.44137	0.44663	0.44664
8.0	0.44621	0.44186	0.44713	0.44714
10.0	0.44649	0.44192	0.44720	0.44720

Table 2. Melting Rates obtained from Four Different Approximate Methods, When $f=\exp(\tau)$

τ	S: Ⅱ-1	Ⅱ-2	Ⅱ-3	Ⅱ-4
0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.14258	0.14153	0.14167	0.14236
0.2	0.20670	0.20509	0.20568	0.20615
0.3	0.25959	0.29746	0.25822	0.25857
0.4	0.30748	0.30480	0.30559	0.30583
0.5	0.35277	0.34949	0.35016	0.35030
0.6	0.39668	0.39274	0.39316	0.39318
0.7	0.43997	0.43528	0.43530	0.43517
0.8	0.48313	0.47759	0.47705	0.47672
0.9	0.52653	0.52002	0.51872	0.51815
1.0	0.57045	0.56284	0.56055	0.55966
1.1	0.61512	0.60624	0.60271	0.60141
1.2	0.66073	0.65039	0.64532	0.64350
1.3	0.70744	0.69545	0.68848	0.68597
1.4	0.75541	0.74153	0.73224	0.72886
1.5	0.80477	0.78873	0.77665	0.77214
1.6	0.85564	0.83717	0.82172	0.81576
1.7	0.90815	0.88692	0.86745	0.85963
1.8	0.96241	0.93807	0.91382	0.90363
1.9	1.01853	0.99069	0.96078	0.94756
2.0	1.07661	1.04484	1.00828	0.99119

Table 3. Melting Rates obtained from Four Different Approximate Methods, When $f=1+\sin 4\pi\tau$

τ	S: Ⅱ-1	Ⅱ-2	Ⅱ-3	Ⅱ-4
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.17176	0.16982	0.16947	0.17033
0.2	0.25522	0.25216	0.25490	0.25534
0.3	0.29101	0.28736	0.29575	0.29593
0.4	0.29617	0.29117	0.30141	0.30141
0.5	0.31115	0.30583	0.31080	0.31100
0.6	0.35561	0.34982	0.35008	0.35017
0.7	0.40294	0.39637	0.39984	0.39997
0.8	0.42632	0.41965	0.43136	0.43152
0.9	0.42960	0.42227	0.43668	0.43668
1.0	0.44003	0.43251	0.43976	0.43976
1.5	0.53892	0.52971	0.53868	0.53859
2.0	0.62230	0.61166	0.62207	0.62192
2.5	0.69575	0.68385	0.69553	0.69532
3.0	0.76215	0.74912	0.76194	0.76169
3.5	0.82322	0.80914	0.82301	0.82272
4.0	0.88006	0.86501	0.87985	0.87952
4.5	0.93345	0.91748	0.93323	0.93287
5.0	0.98394	0.96711	0.98373	0.98333
5.2	1.00599	0.99944	1.00694	1.00647

Table 4. Melting Rates obtained from Four Different Approximate Methods, When $f=\sqrt{1+\tau}$

τ	S			
	II-1	II-2	II-3	II-4
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.14079	0.13978	0.13997	0.14065
0.2	0.20134	0.19986	0.20060	0.20105
0.3	0.24921	0.24733	0.24841	0.24875
0.4	0.29068	0.28844	0.28976	0.29003
0.6	0.36276	0.35986	0.36154	0.36169
0.8	0.42617	0.42264	0.42458	0.42464
1.0	0.48416	0.48000	0.48214	0.48211
1.2	0.53833	0.53356	0.53585	0.53574
1.4	0.58962	0.58423	0.58665	0.58646
1.6	0.63865	0.63264	0.63516	0.63489
1.8	0.68582	0.67919	0.68180	0.68143
2.0	0.73142	0.72417	0.72686	0.72640
2.2	0.77571	0.76782	0.77056	0.77001
2.4	0.81882	0.81030	0.81309	0.81244
2.6	0.86091	0.85176	0.85458	0.85382
2.8	0.90209	0.89229	0.89514	0.89428
3.0	0.94243	0.93199	0.93486	0.93389
3.2	0.98204	0.97095	0.97383	0.97274
3.4	1.02095	1.00921	1.01209	1.01089

로써 단조감소함수, 단조증가함수, 주기함수 등이 주어질 때 앞에서 언급한 여러가지 해석방법을 이용하여 어떤 특정한 시간에 있어서의 온도분포와 상변화율을 구하였으며, 아울러 각 해석방법의 타당성은 순수한 수치해석 결과와 비교하여 고찰하였다. 우선 상변화율에 대한 결과를 보면, Table 1은 벽면온도가 단조감소 함수인 $e^{-\tau}$로 주어질 때 해석방법 II의 1, 2, 3 및 4를 이용하여 계산한 상변화율이 각각 나타나 있으며 서로 잘 일치함을 보여준다. Table 2, 3 및 4는 벽면온도가 단조증가함수 e^{τ}, 주기함수 $1+\sin 4\pi\tau$, 단조증가함수 $\sqrt{1+\tau}$ 등으로 주어질 때의 상변화율에 대한 결과가 각각 나타나 있으며, 역시 서로 잘 일치함을 보여 준다. 결국 네가지의 서로 다른 방법에 의하여 구한 상변화율은 각 방법간의 오차가 무시할 정도로 작음을 보여 준다. 따라서 Fig. 2는 해석방법 II-3을 이용하여 구한 상변화율을 대표적으로 보이고 있다. 그림을 보면 단조 증가함수인 곡선 2와 4는 어느 시간 이상에서는 벽면온도의 증가폭에 관계없이 상변화율이 일정함을 보여주며, 단조감소함수인 $e^{-\tau}$에 대한 곡선 1은 시간이 증가함에 따라 s 값이 0.447로 접근함을 보여주며, 이것은 시간이 증가함에 따

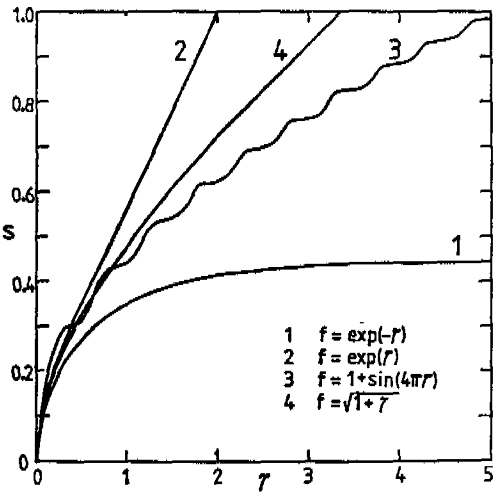

Fig. 2 Melting Rates to Four Different Wall Temperature Functions, by Analysis II-3.

라 벽면온도가 상변화온도로 접근하기 때문에 평형상태가 됨을 나타낸다. 주기함수에 대한 곡선을 보면, 상변화율이 시간에 따라 증가, 감소, 정체상태의 과정을 주기적으로 거침을 알 수 있으며, 증가구간은 시간 $4\pi\tau$가 $2n\pi$와 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$사이에 있을 때이며 감소구간은 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$와 $2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ 사이일 때이고, 정체구간은 $2n\pi+\frac{3}{2}\pi$와 $2(n+1)\pi$ 사이일 때이다. 여기서 n은 정수이다.

다음으로 액상내의 온도분포에 대한 결과를 보면 Table로 나타내지는 않았으나, 상변화율에 대한 결과와 마찬가지로 네가지 방법에 의하여 구한 온도분포가 서로 아주 잘 일치한다. 따라서 Fig. 3은 어떤 특정시간($\tau=2$)에 있어서 해석 방법 Ⅱ-1에 의하여 구한 온도분포를 각각의 벽면온도함수에 대하여 대표식으로 보이고 있다. 그림을 보면, 단조감소함수인 곡선 1과 주기함수인 곡선 3은 온도분포가 선형식임을 보이고 있으며 곡선 1은 X값이 0.41에서 곡선 3은 X값이 0.62에서 끝나고 있는데, 이것은 $\tau=2$에서 상변화단이 그곳까지 진행하여 그 이후는 고상이므로 온도가 0이 됨을 나타낸다. 단조 증가함수인 곡선 2와 4는 언뜻보면 구별하기 힘들 정도의 직선에 가까운 포물선의 온도분포임을 보여준다.

끝으로 이상과 같은 결과를 놓고 볼 때 근사적 해석 방법인 Ⅱ의 1,2,3 및 4의 타당성을 순수한 수치해석 결과와 비교하여 검토하고자 한다. 본 논문이 온도분포를 가정하여 상변화율을 근사적인 방법으로 구하는 것이 목적이므로 수치해석 방법은 언급하지 않는다(참고문헌[13]참조).

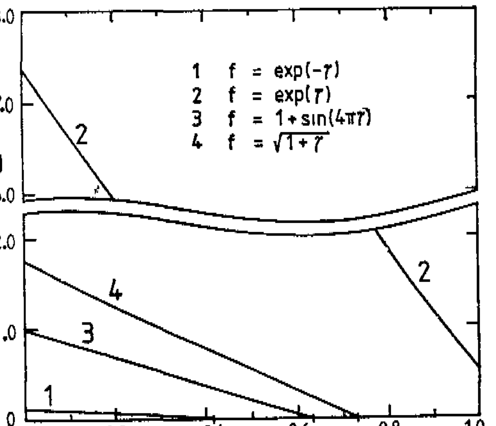

Fig. 3 Temperature Distributions of the Liquid Phase at $\tau=0$, to Four Different Wall Temperature Functions, by Analysis Ⅱ-1

우선 근사적인 해석에서 고려한 네가지의 벽면온도함수인 $e^{-\tau}$, e^{τ}, $1+\sin 4\pi\tau$ 및 $\sqrt{1+\tau}$에 대한 상변화율의 결과를 놓고 비교할 때, 수치해석과 근사식 해석인 Ⅱ-1,2,3 및 4의 방법으로 구한 결과는 max. 5% 미만의 오차를 나타낸다. 따라서 table이나 그림으로 결과를 나타내지는 않았으나, 확장하여 급격히 증가하는 함수인 $e^{10\tau}$와 급격히 감소하는 함수 $e^{-10\tau}$, 그리고 다른 주기함수인 $1-\sin 4\pi\tau$에 대해서도 계산하여 서로 비교하여 본 결과 수치해석과 근사식 해석과는 마찬가지로 max. 5% 미만의 오차를 나타냄을 볼 수 있었다.

다음으로 온도분포에 대한 결과를 비교하여 보면 벽면온도가 단조증가 혹은 단조감소 함수인 e^{τ}, $\sqrt{1+\tau}$ 및 $e^{-\tau}$ 등으로 주어지는 경우에 있어서, 수치해석으로 얻은 온도분포도 거의 선형적인 변화를 나타냄을 볼 수 있었다. 따라서 급격히 증가하거나 감소하는 함수인 $e^{10\tau}$ 및 $e^{-10\tau}$에 대해서도 계산하여 본 결과 거의 선형적 분포를 나타냄을 볼 수 있었다. 그러므로 벽면온도가 단조증가나 단조감소 함수인 경우에 있어서는 네가지 근사적 해석방법에서 가정한 온도분포가 일반적으로 타당하다 생각된다. 그러나 벽면온도가 주기함수인 $1+\sin 4\pi\tau$에 대해서 수치 해석으로 얻은 온도분포는 시간 $4\pi\tau$가 특히 $2n\pi+\frac{5}{4}\pi$와 $2n\pi+\frac{7}{4}\pi$에 있는 구간에서, 온도가 증가했다, 감소하는 분포를 보이므로 근사적 해석으로 얻은 온도분포와는 많이 다름을 나타낸다. 따라서 엄밀하게 생각한다면 벽면온도가 주기함수로 주어지는 경우는 근사적 해석인 Ⅱ-1,2,3 및 4에서 가정한 온도 분포로서는 설명할 수 없는 영역이 존재한다. 그러나 근사적 해석에서 온도분포를 가정 할 때, 가장 근사적인 온도분포 하나를 가정하는 것이 일반적이며, 주기함수의 경우와 같이 다른 형상의 변화가 생길 때 모든 변화까지를 포함하는 온도분포를 가정한다는 것은 어려운 일이다. 또한 상변화 문제에 있어서 상변화 물질내의 온도분포는 큰 관심의 대상이 되지 않으므로 벽면 온도가 엄밀한 시간의 함수로 주어지는 경우의 상변화 문제에 있어서 근사식인 해석방법인 Ⅱ-1,2,3 및 4의 적용은 일반적으로 타당하며, 꽤 정확한 근사

거인 해를 얻을 수 있음을 인정할 수 있다.

Ⅳ. 결　　론

초기조건이 초과상내의 고상이고 한 벽면의 온도가 임의한 시간의 함수로 주어지는 일차원 상변화 문제에 대해서 앞에서 언급한 네가지의 근사적인 해석방법 Ⅱ-1, 2, 3 및 4를 이용하여 상변화율과 온도분포를 구한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) 벽면의 온도가 단조증가나 단조감소의 함수로 주어지는 경우에 있어서는 순수한 수치해석 결과와 비교할 때 상변화율 및 온도분포는 서로 일치함을 보이고 있다. 따라서 근사적인 해석방법인 Ⅱ-1, 2, 3 및 4의 방법을 적용시킬 수 있으며, 정확한 결과를 얻을 수 있다.

(2) 벽면의 온도가 주기함수로 주어질 때, 상변화율은 증가, 감소, 정체의 과정을 되풀이하며 순수한 수치해석 결과와 잘 일치한다. 그러나 온도분포에 대해서는 근사적인 해석 방법에서는 나타나지 않는 이 온도구배가 존재하는 주기적인 시간영역이 수치해석 결과에서 나타난다. 그러나 상변화문제에 있어서는 큰 관심의 대상은 되지 않으므로 온도분포가 다른 시간 영역이 존재한다 하더라도 별 문제는 없는 것으로 볼 수 있고, 따라서 근사적인 해석방법 Ⅱ-1, 2, 3 및 4를 적용할 수 있다고 생각된다.

(3) 벽면의 온도가 단조증가 함수로 주어지는 경우에 있어서 어느 시간 이상에서는 벽면온도 증가폭에 관계없이 상변화율이 일정함을 보여주며, 이것은 벽면의 온도가 단조 감소나 주기함수로 주어지는 경우와 벽면에서의 일반적인 경계조건(온도일정 혹은 열플럭스 일정)이 주어지는 경우에서와 같이 시간이 지남에 따라 상변화율이 점차적으로 감소하는 것과는 좋은 대조를 이룬다.

그리고 본 논문은 초기 온도가 상변화 온도인 문제에 여러 근사적인 해석 방법을 적용 시켜 상변화율 등의 결과를 얻은 것이며, 초기 온도가 상변화 온도가 아닌 다른 온도로 주어지는 경우에 대해서 이 방법을 확장하는 것은 연구중에 있다.

Reference

1. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, 2nd Ed., Oxford, 1959.
2. Eckert, E.R.G. and Robert, M.D., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, 1972.
3. Wilson, D.G., Solomon, A.D. and Boggs, P.T., Moving Boundary Problem, Academic press, 1978.
4. Nayfeh, A.H., Perturbation Methods, Wiley, 1973
5. Ames, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic press, 1965.
6. Chung, B.T.F. and Yeh, L.T., "Solidification and Melting of Materials Subject to Radiation and Convection," J. Spacecraft, Vol. 12, No. 6, p. 329, 1975.
7. Chung, B.T.F. and Yeh, L.T., "A Variational Analysis of Freezing or Melting in a Finite Medium Subject to Radiation and Convection," J. of Heat Transfer, Vol. 101, p. 592, 1979.
8. Lock, G.S.H., "On the Perturbation Solution of the Ice Water Layer Problem," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 14, p. 642, 1971.
9. Pedroso, R.I. and Domoto, G.A., "Exact Solution by Perturbation Method for Planar Solidification of a Satured Liquid with Convection at the Wall," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, p. 1816, 1973.
10. Huang, C.H. and Shih, Y.P., "Perturbation Solution of Planar Diffusion-Cotrolled Moving Boundary Problems," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 18, p. 689, 1975.
11. Yan, M.M. and Huang, P.N.S., "Perturbation Solutions to Phase Change Problem Subject to Covection and Radiation," J. of Heat Transfer, Vol. 101, p. 96, 1979.
12. Weinbaum, S. and Jiji, L.M., "Singular Perturbation Theory for Melting or Freezing in Finite Domains Initially Not at the Fusion Temperature," J. of Applied Mechanics, March, p. 25, 1977.
13. Won, Sung Pil, "A Study on Heat Transfer in a Thermal Storage System Using a PCM," U.I.T. Report, Vol. 13, No. 1, 1982.