

회전하는 무힌지 로터깃의 플래핑과 래깅 고유진동수 해석*

권정호 · 이종찬

수송시스템공학부(항공우주공학전공)

<요 약>

운용속도로 회전하고 있는 로터깃의 구조적 안정성은 로터깃의 고유진동 특성과 밀접한 관계가 있다. 특히 공력하중에 의한 가진주파수와 깃의 고유진동수가 일치할 경우 깃에 공진현상이 발생하게 되어 깃구조나 허브 또는 연결구조 등에 심각한 파손을 유발할 수가 있다. 따라서 운용속도로 회전하는 로터깃에 대한 고유진동해석이 필수적이며 이 경우 회전원심력 효과를 고려하여 계산을 수행하여야 한다. 여기서는 플래핑운동과 래깅운동의 특성을 기초로 전달행렬(transfer matrix)을 이용하여 비교적 간단한 방법으로 회전하는 무힌지깃의 플래핑과 래깅운동에 대한 깃의 고유진동수 해석을 수행하였다.

Analysis of Flapping and Lagging Natural Frequency on Rotating Hingeless Rotor Blade

Jung Ho Kwon · Jong Chan Lee

School of Transportation Systems Engineering

<Abstract>

The structural stability of rotor blades which is rotating at operational speed, are closely related to their natural vibration characteristics. Especially, if the frequencies of aerodynamic exciting force become equal to natural frequencies of blade, the resonance of blade can occur and cause blades, hubs or their joint structures to fail. So it is necessary to have the analysis of blades checked and the effect of centrifugal force

* 본 연구는 공기반과제 위탁연구로 수행된 내용의 일부임을 밝힙니다.

should be considered to perform the calculation. This paper presents the characteristics of flapping and lagging of rotating hingeless rotor blade and relatively simple method for analysis of natural frequencies using transfer matrix.

1. 서론

로터깃의 고유진동수와 모드해석은 깃구조의 동역학적 응답이나 진동에 대한 구조적 안정성 해석을 위한 기초 자료로서 뿐만아니라 회전 중 깃이 공진상태에 들 수 있는 조건을 결정하기 위하여 필요한 것이다[1]. 일반적으로 굽힘운동 거동으로부터 유도된 방정식의 해를 구함으로써 고유진동수와 고유진동모드를 얻을 수 있다[2]. 그러나 깃의 굽힘강성도 분포 $EI(x)$ 나 질량분포 $m(x)$ 가 깃스팬방향으로 균일하지 않고 x 에 대한 복잡한 함수 형태로 표시될 경우 이러한 미분 방정식을 풀어 정확한 해를 구한다는 것은 매우 어려운 일이다. 따라서 이러한 경우 다른 방법을 통하여 근사적 해를 구하게 된다.

근사해법으로는 경계조건을 만족하는 일련의 함수로 깃의 모드함수를 유한급수 형태로 가정하고 가상일의 원리나 에너지 보존의 원리를 적용하는 에너지법[3]을 들 수 있다. Meirovitch[4]는 회전하는 구조물의 고유진동을 Rayleigh-ritz method로 구하였고 Lee et al[5]은 Galerkin method를 이용하여 회전하는 외팔보의 고유진동수를 구한 바 있다. 그러나 모드함수의 가정에 의한 에너지해법도 일반적으로 균일한 단면을 가진 깃의 1차, 2차 정도의 낮은 차수의 고유진동수는 비교적 정확하게 결정할 수 있으나 단면이 스펠방향에 따라 균일하지 않은 경우 적절한 모드함수의 가정이 어렵고 따라서 계산결과의 정확성을 기대하기가 어렵다. 또한 Friedmann[6]과 Hodges[7] 등은 유한요소법을 사용하여 회전보의 자유진동을 해석한 바 있다. 본 연구에서는 단면의 특성치가 균일하지 않는 깃구조를 스펠방향으로 여러 개의 요소로 나누고 각 요소의 파라미터가 절점에 집중된 것으로 간주하여 각 요소의 거동에 대한 전달행렬을 구성하는 행렬법[8]을 사용함으로써 앞에서의 유한요소법[6,7]보다 간단하고 효율적으로 계산하는 방법을 고찰한다. 이러한 전달행렬법은 그림 1에서 보는바와 같이 무한개의 자유도를 가진 탄성굽힘 깃을 유한개의 다자유도 시스템으로 간략화하여 계산한다. 즉, 일련의 집중질량으로 구성된 다자유도 시스템으로 구성하고 먼저 1개의 요소에 대한 거동을 분석하여 전달행렬을 구성한다. 그리고 깃의 한 끝단에서 다른 끝으로 이러한 행렬을 확장해 문제를 풀게 된다. 회전하는 로터깃의 가진주파수와 고유진동수의 공진여부를 분석하기 위해서는 깃구조 설계과정에서 로터 회전속도에 대한 고유진동수의 변화거동을 보여주는 Southwell 선도[1]를 작성할 필요가 있다. 따라서 본 연구는 현대우주항공(주)에서 설계한 rectangular와 sweptback 두가지 type의 복합재 로터깃의 whirl tower test용 축소시제깃에 대하여 전달행렬법으로 고유진동수를 계산하고 Southwell선도를 작성하여 공진발생 거동을 고찰하기로 한다.

2. 이론적 배경

2.1 깃요소의 전달행렬 구성

깃을 길이가 다른 여러개의 보 요소로 나누고 각 요소내에서의 질량은 요소길이에 걸쳐 균일하게 분포되어 있다고 간주한다. 즉, 단위길이당 질량이 균일하게 분포되었다고 가정 하면, 회전운동 중 플레핑과 래깅운동을 하는 깃의 한 요소에 작용하는 힘과 모멘트는 그림 2와 그림 3처럼 나타낼 수 있다. 래깅운동은 플레핑운동과는 달리 그림 3에서 보는 바와 같이 깃의 처짐에 따라 원심력의 방향이 달라지고 깃의 방향과 평행한 원심력은 z축과 r축 방향의 분력으로 나눌 수 있다. 즉,

$$N_{n+1,r} = N_{n+1} \frac{r}{\bar{r}} \quad , \quad N_{n,r} = N_n \frac{r}{\bar{r}}$$

$$N_{n+1,z} = N_{n+1} \frac{z}{\bar{r}} \quad , \quad N_{n,z} = N_n \frac{z}{\bar{r}}$$

$$\text{단, } \bar{r} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

여기서 각각에 대한 원심력과 전단력 그리고 굽힘모멘트의 평형방정식으로 부터 다음 관계를 얻을 수 있다.

- 플레핑운동

$$N_{n+1} = N_n + \int_{r_{n+1}}^{r_n} \Omega^2 r m dr = N_n + \frac{1}{2} m \Omega^2 (r_n^2 - r_{n+1}^2) \quad (1)$$

$$Q_{n+1} = Q_n - \int_{r_{n+1}}^{r_n} p^2 y m dr = Q_n - \frac{1}{2} m p^2 \ell_n (y_n + y_{n+1}) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n - Q_n \ell_n + \int_{r_{n+1}}^{r_n} (r_n - r_{n+1}) p^2 m y dr \\ &\quad - N_n (y_n - y_{n+1}) - \int_{r_{n+1}}^{r_n} (y_n - y_{n+1}) \Omega^2 r m dr \\ &= M_n - N_n (y_n - y_{n+1}) + p^2 \ell_n^2 m (2y_n + y_{n+1}) / 6 \\ &\quad - Q_n \ell_n - \Omega^2 \ell_n m (2r_n + r_{n+1}) (y_n - y_{n+1}) / 6 \end{aligned} \quad (3)$$

- 래깅운동

$$N_{n+1,r} = N_{n,r} + \int_{r_{n+1}}^{r_n} \Omega^2 r m dr = N_{n,r} + \frac{1}{2} m \Omega^2 (r_n^2 - r_{n+1}^2) \quad (4)$$

$$Q_{n+1} - N_{n+1,z} = Q_n - N_{n,z} - \int_{r_{n+1}}^{r_n} P^2 z m dr$$

$$Q_{n+1} = Q_n - \frac{1}{2} m P^2 \ell_n (z_n + z_{n+1}) + N_{n+1,r} \frac{z_{n+1}}{r_{n+1}} - N_{n,r} \frac{z_n}{r_n} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n - Q_n \ell_n + \int_{r_{n+1}}^{r_n} (r_n - r_{n+1}) P^2 m z dr \\ &\quad - N_{n,r} (z_n - z_{n+1}) - \int_{r_{n+1}}^{r_n} (z_n - z_{n+1}) \Omega^2 r m dr \\ &= M_n - Q_n \ell_n + P^2 \ell_n^2 m_n (2z_n + z_{n+1}) / 6 \\ &\quad - N_{n,r} (z_n - z_{n+1}) - \Omega^2 \ell_n m_n (2r_n + r_{n+1}) (z_n - z_{n+1}) / 6 \end{aligned} \quad (6)$$

위의 식에서 적분으로 표시된 관성력과 원심력은 요소의 오른쪽 끝에 집중적으로 작용한다고 가정한 것이다.

위의 식들로 부터 깃의 각요소 끝단에 작용하는 굽힘모멘트 M_1, M_2, \dots, M_n 는 P^2 과 Ω^2 의 항으로 나누어 다음과 같이 행렬형태로 쓸 수 있다.

$$\{M\} = P^2 \{a\} \{y\} + \Omega^2 \{b\} \{y\} \quad (7)$$

여기서, 단면 굽힘모멘트 행렬 : $\{M\} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n]^T$

단면 변위행렬 : $\{y\} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$

$[a], [b]$: $n \times n$ 행렬로써 r 과 m 의 함수.

2.2 깃구조의 구성방정식

깃 단면 변위행렬 $\{y\}$ 는 다음과 같이 두 요소로 나눌 수 있다. 즉,

$$\{y\} = \{y_e\} + \{y_R\} \quad (8)$$

여기서, $\{y_e\}$: 깃의 탄성 굽힘 변형에 의한 변위

$\{y_R\}$: 힌지를 중심으로 강체 회전에 의한 변위행렬

무힌지의 경우 $\{y_R\} = 0$

여기서 다음과 같이 단위하중법을 사용하여 임의의 위치에서의 탄성굽힘 처짐변위를 구할 수 있다.

$$\delta = \int_0^R \frac{M_1 M}{EI} dr \quad (9)$$

여기서, M_1 : 단위 하중에 의한 깃의 굽힘모멘트

M : 실제 하중에 의한 깃의 굽힘모멘트

그림 4처럼 임의의 점에 단위하중이 작용할 때 깃의 양단에서 발생하는 모멘트는 길이에 대하여 선형적으로 변한다고 가정한다. 그러므로 위의 식 (9)에 대하여 요소의 양단 A, B 사이를 적분하면, 깃 요소 A, B의 모멘트에 의한 단위하중점에서의 처짐 δ_{AB} 는,

$$\begin{aligned} \delta_{AB} &= \int_{AB} \frac{MM_1}{EI} dr \\ &= \frac{\ell}{6EI} [M_A(2M_{A1} + M_{B1}) + M_B(2M_{B1} + M_{A1})] \\ &= \frac{\ell M_A M_{A1}}{3EI} + \frac{\ell M_A M_{B1}}{6EI} + \frac{\ell M_B M_{B1}}{3EI} + \frac{\ell M_B M_{A1}}{6EI} \end{aligned}$$

행렬 형태로 쓰면,

$$\delta_{AB} = [M_{A1} \quad M_{B1}] \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & \frac{\ell}{6EI} \\ \frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서, M_A, M_B : 요소AB의 각각 A, B단에서 발생하는 실제 굽힘모멘트.

M_{A1}, M_{B1} : 요소AB의 각각 A, B단에서 발생하는 가상단위하중에 의한 굽힘모멘트.

ℓ : 요소AB의 길이

임의의 깃 위치에서의 굽힘에 의한 처짐변위는 식 (10)으로 표시되는 모든 요소에 대한 처짐을 합하면 된다. 즉,

$$\begin{aligned} \delta &= [M_{A1} \quad M_{B1} \quad \cdots \quad M_{n1} \quad \cdots] \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & \frac{\ell}{6EI} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} + \frac{\ell}{3EI} & \frac{\ell}{6EI} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} + \frac{\ell}{3EI} & \frac{\ell}{6EI} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ \vdots \\ M_n \\ \vdots \end{Bmatrix} \\ &= \{M_1\}^T [f] \{M\} \quad (11) \end{aligned}$$

여기서, $\{M_1\}^T$: 변위점에 작용하는 가상단위하중에 의한 각 요소 양단에 발생하는 모멘트, raw 행렬

$\{M\}$: 실제 외력에 의한 각 요소 양단에 발생하는 모멘트, column 행렬

$[f]$: 기의 유연도 행렬

같은 방법으로 기의 탄성굽힘에 의한 처짐변위 y_e 를 구할 수 있다.

$$\{y_e\} = \{\delta\} = [M_1]^T [f] \{M\} \quad (12)$$

여기서, $\{y_e\}$, $\{\delta\}$: 기의 각 점에서 탄성변형처짐 행렬

$[M_1]^T$: $\{M_1\}^T$ 로 구성되는 rectangular matrix

식 (12)와 식 (7)을 연립으로 하여 $\{M\}$ 을 소거하면,

$$\{y_e\} = p^2 [a^*] (\{y_e\} + \{y_R\}) + \Omega^2 [b^*] (\{y_e\} + \{y_R\}) \quad (13)$$

여기서, $[a^*] = [M_1]^T [f] [a]$

$[b^*] = [M_1]^T [f] [b]$

식 (13)을 다시 정리하면

$$([1] - \Omega^2 [b^*]) \{y_e\} = p^2 [a^*] (\{y_e\} + \{y_R\}) + \Omega^2 [b^*] \{y_R\} \quad (14)$$

양변에 $([1] - \Omega^2 [b^*])^{-1}$ 을 곱하면,

$$\{y_e\} = p^2 ([1] - \Omega^2 [b^*])^{-1} [a^*] (\{y_e\} + \{y_R\}) + \Omega^2 ([1] - \Omega^2 [b^*])^{-1} [b^*] \{y_R\} \quad (15)$$

이상의 식을 정리하면,

$$\{y_e\} = p^2 [c] (\{y_e\} + \{y_R\}) + \Omega^2 [d] \{y_R\} \quad (16)$$

여기서, $[c] = ([1] - \Omega^2 [b^*])^{-1} [a^*]$

$[d] = ([1] - \Omega^2 [b^*])^{-1} [b^*]$

$[c]$, $[d]$ 는 square matrix

무한지 로터 깃인 경우는 $\{y_R\}=0$ 이므로,

$$\{y_e\} = p^2 [c] \{y_e\} \text{ 또는, } \left([c] - \frac{[11]}{p^2} \right) \{y_e\} = 0 \quad (17)$$

식 (17)을 풀면 고유치와 고유벡터를 구할 수 있고, 따라서 깃의 고유진동수와 모드를 얻을 수 있다.

위에서 설명한 전달행렬법은 구조계의 자유도, 즉 요소의 수를 증가 시키면 좀 더 정확한 해를 얻을 수 있을 것이다. 또한, 요소내부의 변형(변위 또는 모멘트)분포를 비선형으로 처리한다면 좀더 개선된 해석결과를 얻을 수 있을 것이다. 그러므로 고차의 모드를 정밀하게 해석하기 위해서는 요소의 변위함수를 고차의 다항식(예: 5차, 7차 등)으로 구성함으로서 정밀한 변위의 해를 구할 수 있을 뿐만 아니라, 요소의 수를 증가시키지 않고도 정밀해가 가능하다. 따라서 y'' , y''' 의 결과도 요구되는 정밀도를 만족시킬 수 있고, y'' , y''' 계산치로 부터 깃의 정밀한 내력 계산을 바로 수행할 수 있다.

3. 전달행렬의 계산

전달행렬식에 사용되는 행렬 $[a]$, $[b]$ 를 구하기 위하여 우선 절점수 5개(요소수 4개)인 깃을 가정하고 플레핑과 래깅운동에 대하여 각 깃요소에 대한 평형방정식을 다음과 같이 구성한다.

3.1 플레핑운동

플레핑운동 중에 깃의 양단에 나타나는 힘과 모멘트는 식 (1), 식 (2), 식 (3)과 같으며 원심력, 전단력, 굽힘모멘트는 다음과 같이 Ω^2 과 P^2 항을 가지는 부분을 각각 윗첨자 Ω, P 를 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$N_{n+1}^{\Omega} = N_n^{\Omega} + \frac{1}{2} m_n (r_n^2 - r_{n+1}^2) \quad (18)$$

$$Q_{n+1}^P = Q_n^P - \frac{1}{2} m_n \ell_n (y_n + y_{n+1}) \quad (19)$$

$$M_{n+1} = M_{n+1}^P + M_{n+1}^{\Omega}$$

$$M_{n+1}^P = M_n^P - Q_n^P \ell_n + \ell_n^2 m_n (2y_n + y_{n+1})/6 \quad (20)$$

$$M_{n+1}^{\Omega} = M_n^{\Omega} - N_n^{\Omega} (y_n - y_{n+1}) - \ell_n m_n (2r_n + r_{n+1}) (y_n - y_{n+1})/6 \quad (21)$$

고유진동수 P와 관련된 식 (19)와 식 (20)을 변위(y)로 구분하여 정리하면

$$Q_{n+1}^P = Q_n^P - \frac{1}{2} m_n \ell_n y_n - \frac{1}{2} m_n \ell_n y_{n+1} \quad (22)$$

$$M_{n+1}^P = M_n^P - Q_n^P \ell_n + (\ell_n^2 m_n / 3) y_n + (\ell_n^2 m_n / 6) y_{n+1} \quad (23)$$

전단력에 대한 규칙성을 정리하면 다음과 같다.

$$n=1, \quad Q_2^P = -\frac{1}{2} m_1 \ell_1 y_1 - \frac{1}{2} m_1 \ell_1 y_2$$

$$n=2, \quad Q_3^P = Q_2^P - \frac{1}{2} m_2 \ell_2 y_2 - \frac{1}{2} m_2 \ell_2 y_3$$

$$n=3, \quad Q_4^P = Q_3^P - \frac{1}{2} m_3 \ell_3 y_3 - \frac{1}{2} m_3 \ell_3 y_4$$

요약해서 행렬형태로 나타내면 그림 5와 같다. 여기서 절점수가 5개인 깃구조 모델의 행렬이 4×4 로 나타나는 것은 경계조건으로 부터 $Q_1^P = 0$ 의 관계와 $y_5 = 0$ 를 이용하여 불필요한 1번 행과 5번 열을 소거할 수 있기 때문이다. 이 규칙성은 앞으로 만들 [a], [b] 행렬에서도 똑같이 적용된다.

굽힘모멘트 표현식의 규칙성을 고찰하기 위해 다음과 같이 각요소에 대하여 식을 전개하면,

$$n=1, \quad M_2^P = (\ell_1^2 m_1 / 3) y_1 + (\ell_1^2 m_1 / 6) y_2$$

$$n=2, \quad M_3^P = M_2^P - Q_2^P \ell_2 + (\ell_2^2 m_2 / 3) y_2 + (\ell_2^2 m_2 / 6) y_3$$

$$n=3, \quad M_4^P = M_3^P - Q_3^P \ell_3 + (\ell_3^2 m_3 / 3) y_3 + (\ell_3^2 m_3 / 6) y_4$$

위의 표현식을 마찬가지로 행렬로 표현하면 그림 6과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 4×4 행렬은 P^2 과 관련된 행렬 [a]가 된다.

로터깃의 회전속도(Ω)와 관련된 식 (18)과 식 (21)을 따로 변위(y)에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$N_{n+1}^\Omega = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (r_i^2 - r_{i+1}^2) \quad (24)$$

$$M_{n+1}^\Omega = M_n^\Omega + (-N_n^\Omega - \ell_n m_n (2r_n + r_{n+1}) / 6) y_n \\ + (N_n^\Omega + \ell_n m_n (2r_n + r_{n+1}) / 6) y_{n+1} \quad (25)$$

식 (24)는 변위와 상관없는 값을 가지므로 상수로 간주하고 깃요소에 대한 식 (25)의 규칙성을 고찰하기 위하여 전개하면 다음과 같이 된다.

$$n=1, \quad M_2^{\Omega} = (-\ell_1 m_1 (2r_1 + r_2)/6) y_1 + (\ell_1 m_1 (2r_1 + r_2)/6) y_2$$

n=2,

$$M_3^{\Omega} = M_2^{\Omega} + (-N_2^{\Omega} - \ell_2 m_2 (2r_2 + r_3)/6) y_2 \\ + (N_2^{\Omega} + \ell_2 m_2 (2r_2 + r_3)/6) y_3$$

n=3,

$$M_4^{\Omega} = M_3^{\Omega} + (-N_3^{\Omega} - \ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)/6) y_3 \\ + (N_3^{\Omega} + \ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)/6) y_4$$

위에서 살펴본 플레핑운동 중 로터깃의 회전속도(Ω)와 관련된 굽힘모멘트는 그림 7과 같이 정리될 수 있으며 좌측항의 4×4 의 행렬이 구하고자 하는 행렬 [b]가 된다.

3.2 래깅운동

로터깃이 래깅운동을 할때 깃의 양단에 나타나는 힘과 모멘트는 식 (4), 식 (5), 식 (6)과 같으며 플레핑운동과 같이 윗첨자 Ω, P 를 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$N_{n+1,r}^{\Omega} = N_{n,r}^{\Omega} + \frac{1}{2} m_n (r_n^2 - r_{n+1}^2) \quad (26)$$

$$Q_{n+1}^P = Q_{n+1}^P + Q_{n+1}^{\Omega}$$

$$Q_{n+1}^P = Q_n^P - \frac{1}{2} m_n \ell_n (z_n + z_{n+1}) \quad (27)$$

$$Q_{n+1}^{\Omega} = Q_n^{\Omega} + N_{n+1,r}^{\Omega} \frac{z_{n+1}}{r_{n+1}} - N_{n,r}^{\Omega} \frac{z_n}{r_n} \quad (28)$$

$$M_{n+1} = M_{n+1}^P + M_{n+1}^{\Omega}$$

$$M_{n+1}^P = M_n^P - Q_n^P \ell_n + \ell_n^2 m_n (2z_n + z_{n+1})/6 \quad (29)$$

$$M_{n+1}^{\Omega} = M_n^{\Omega} - N_{n,r}^{\Omega} (z_n - z_{n+1}) - Q_n^{\Omega} \ell_n \\ - \ell_n m_n (2r_n + r_{n+1}) (z_n - z_{n+1})/6 \quad (30)$$

고유진동수 P와 관련된 식 (27)과 식 (29)를 변위(z)에 대하여 정리하면

$$Q_{n+1}^P = Q_n^P - \frac{1}{2} m_n \ell_n z_n - \frac{1}{2} m_n \ell_n z_{n+1} \quad (31)$$

$$M_{n+1}^P = M_n^P - Q_n^P \ell_n + (\ell_n^2 m_n / 3) z_n + (\ell_n^2 m_n / 6) z_{n+1} \quad (32)$$

위의 식들은 식 (22), 식 (23)과 같은 모양임을 알 수 있고 따라서 앞의 플레핑운동에서 구한 행렬 [a]를 그대로 쓸 수 있음을 알 수 있다.

래깅운동에서의 행렬 [b]를 구하기 위해 로터깃의 회전속도(Ω)와 관련된 식 (26), 식 (28), 식 (30)을 변위(z)에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$N_{n+1,r}^\Omega = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (r_i^2 - r_{i+1}^2) \quad (33)$$

$$Q_{n+1}^\Omega = Q_n^\Omega - N_{n,r}^\Omega \frac{z_n}{r_n} + N_{n+1,r}^\Omega \frac{z_{n+1}}{r_{n+1}} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} M_{n+1}^\Omega &= M_n^\Omega + (-N_{n,r}^\Omega - \ell_n m_n (2r_n + r_{n+1}) / 6) z_n \\ &\quad - Q_n^\Omega \ell_n + (N_{n,r}^\Omega + \ell_n m_n (2r_n + r_{n+1}) / 6) z_{n+1} \end{aligned} \quad (35)$$

식 (33)은 플레핑의 경우와 마찬가지로 변위와 상관없는 값이므로 상수로 간주하고 식 (34)의 규칙성을 고찰하기 위하여 각 요소에 대하여 전개하면,

$$n=1, \quad Q_2^\Omega = N_{2,r}^\Omega \frac{z_2}{r_2}$$

$$n=2, \quad Q_3^\Omega = Q_2^\Omega - N_{2,r}^\Omega \frac{z_2}{r_2} + N_{3,r}^\Omega \frac{z_3}{r_3} = N_{3,r}^\Omega \frac{z_3}{r_3}$$

$$n=3, \quad Q_4^\Omega = Q_3^\Omega - N_{3,r}^\Omega \frac{z_3}{r_3} + N_{4,r}^\Omega \frac{z_4}{r_4} = N_{4,r}^\Omega \frac{z_4}{r_4}$$

마찬가지로 요약하여 행렬로 나타내면 그림 8과 같이 된다.

또한 식 (35)의 규칙성을 알아보기 위해 다음과 같이 전개하면

$$n=1, \quad M_2^\Omega = -\ell_1 m_1 (2r_1 + r_2) z_1 / 6 + \ell_1 m_1 (2r_1 + r_2) z_2 / 6$$

n=2,

$$\begin{aligned} M_3^\Omega &= M_2^\Omega + (-N_{2,r}^\Omega - \ell_2 m_2 (2r_2 + r_3) / 6) z_2 \\ &\quad - Q_2^\Omega \ell_2 + (N_{2,r}^\Omega + \ell_2 m_2 (2r_2 + r_3) / 6) z_3 \end{aligned}$$

$n=3,$

$$M_4^o = M_3^o + (-N_{3,r}^o - \ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)/6) z_3 \\ - Q_3^o \ell_3 + (N_{3,r}^o + \ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)/6) z_4$$

마찬가지로 요약하여 행렬로 나타내면 그림 9와 같고 좌측항의 4×4 행렬이 래깅운동에 대한 행렬 [b]가 된다.

4. 계산결과 및 검토

4.1 전환행렬법의 계산결과

실제 계산에 사용한 로터깃은 현대우주항공(주)에서 복합소재를 사용하여 실험시제품으로 설계한 두가지 형의 축소형 로터깃으로서 구조의 형상과 치수는 각각 다음 그림 10과 같다. 또한 회전하는 깃의 고유진동수를 계산하기 위한 깃구조 단면 특성치 자료는 표 1에 제시하고 있다.[9]

이때 계산 조건인 깃의 회전속도는 축소시제깃의 whirl tower test 시 회전속도 범위인 0~2000rpm 사이로 매 200rpm씩 회전속도를 증가시키면서 단계 별로 계산을 수행하였다. 다음 그림 11과 그림 12는 각각 rectangular type과 sweptback type 깃의 회전속도에 대한 고유진동수의 변화거동의 해석결과를 보여주고 있다. 실제 운용속도인 1917rpm에 해당하는 200 rad/sec 근방을 살펴보면 rectangular type은 3차플래핑과 2차래깅, sweptback type은 3차플래핑 거동이 가진주파수 5P선과 근접하고 있음을 알 수 있다. 그러나 가장 큰 영향을 미치는 1차플래핑과 1차래깅 진동수는 가진주파수 1P선으로부터 비교적 멀리 떨어져 있으므로 심각한 공진이 발생할 우려는 없다고 할 수 있다.

4.2 해석결과의 비교

위의 전환행렬법으로 구한 계산결과를 비교하기 위하여 축소시제깃의 모드해석을 MSC/NASTRAN을 사용하여 유한요소해석을 수행하였다. 이때 NASTRAN에서는 깃이 회전하는 상태로 모드해석을 수행할 수 없으므로 회전속도가 0인 상태에서만 제한적으로 결과를 비교하였다. 다음 그림 13은 NASTRAN의 플래핑 해석결과를 보여주고 있으며 표 2는 전달행렬법과 NASTRAN의 플래핑 고유진동수 해석결과를 비교하여 보여주고 있다. 회전속도 0에서 제한적이기는 하나 두 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

5. 결론

고속으로 회전하는 로터깃은 가진주파수와 깃구조의 고유진동 특성에 따라 구조적으로

심각한 불안정 문제를 야기시킬 수 있다. 따라서 초기설계 과정에서 회전속도 조건과 깃구조의 고유진동 특성이 공진을 유발하지 않도록 면밀한 해석이 요구된다.

본 연구에서 제시한 깃요소구조의 전달행렬을 이용한 해법은 회전하는 깃의 원심력의 영향을 고려하여 고유진동수를 계산하는데 매우 간단하고 효과적인 방법으로써 깃구조의 초기설계 과정에 활용하기에 적절한 기법이라고 할 수 있다.

복합재 로터깃의 rectangular type과 sweptback type의 두가지 축소시제에 대한 플레핑과 래깅굽힘 고유진동수 해석결과 회전속도에 대한 고유진동수의 증가율이 플레핑모드와 래깅모드에서 서로 다르게 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 또한 두가지 서로 다른 깃의 고유진동수는 플레핑과 래깅 모두 비교적 저차에서는 비슷한 값을 가지나 고차 고유진동수로 갈수록 차이가 많이남을 알 수 있다. 또한 해석결과 운용회전속도 부근에서 rectangular type은 3차플레핑과 2차래깅, sweptback type은 3차플레핑 거동이 가진주파수 5P선과 근접하는 것으로 나타나나 공진에 가장 큰 영향을 미치는 1차플레핑과 1차래깅 진동수는 가진주파수 1P선으로부터 비교적 멀리 떨어져 있으므로 전반적으로 심각한 공진의 우려는 없다고 할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Engineering Design Handbook-Helicopter Engineering Part one : Preliminary Design.,
Headquarter, U.S Army Material Document, AMCP 706-201
- [2] W. T. Thomson, Theory of Vibration with Application
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972
- [3] H. L. Langhaar, Energy Methods in Applied Mechanics
John Wiley & Sons, Inc. London 1962
- [4] L. Meirovitch, "A Stationary Principal for the Eigenvalue Problem for Rotating Structures", AIAA, Jan., 1976
- [5] 이해경, 박훈철, "탄소섬유강화 복합재료로 된 헬리콥터 로터의 구조해석에 관한 연구", 한국항공우주학회지, 제14권, 2호, 1986
- [6] P. P. Friedmann, "Application of Finite Element Method for Rotary-wing Aeroelasticity", J. of American Helicopter Society, Jan., 1980
- [7] D. H. Hodges, "Free-vibration Analysis of Rotating Beam by a Variable-order Finite Element Method", AIAA, Nov. 1981
- [8] R. K. Livesley, Matrix methods of structural Analysis,
Pergamon Press, 1975
- [9] 권정호 외 4명, "복합재료를 이용한 고성능 헬리콥터 로터깃 개발", 공통핵심기술 개발 사업, 현대우주항공 (주), 1998

표 1 회전하는 깃의 고유진동수 계산을 위한 단면특성치[9]

구분	r [mm]	Unit Mass [kg/mm]	EI_1 [$N \cdot m^2$]	EI_2 [$N \cdot m^2$]	Area [mm^2]	단면모양
Rectangular type	0~222.5	0.001	381.609	1618.65		허브
	~880.0	0.00032	13.5378	623.916	116.74	VR12
	~958.0	0.00034	9.7967	626.859	transition	transition
	~1036.2	0.00034	6.7717	622.935		
	~1100.0	0.00071	6.5203	619.011	105.58	VR15
Sweptback type	0~222.5	0.001	381.609	1618.65		허브
	~880.0	0.00032	13.5378	623.916	116.74	VR12
	~958.0	0.00034	9.7967	626.859	transition	transition
	~1016.0	0.00054	6.8464	632.745		
	~1036.0	0.00034	6.7717	622.935		
	~1077.0	0.00013	3.0962	331.578	67.38	VR15
	~1100.0	0.00012	0.5110	74.468	62.18	

표 2 MSC/NASTRAN 결과와 전달행렬법 결과의 비교

[rad/sec]

		Rectangular type		Sweptback type	
		NASTRAN	전달행렬법	NASTRAN	전달행렬법
플래핑	1차	25.698	25.133	30.096	29.4307
	2차	167.510	163.438	193.813	186.68
	3차	462.02	448.173	531.309	501.547

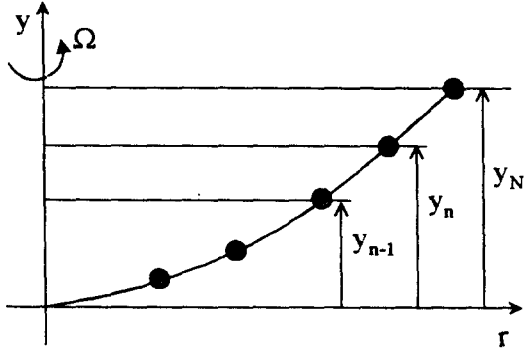


그림. 1 다자유도 시스템의 깃요소 모델

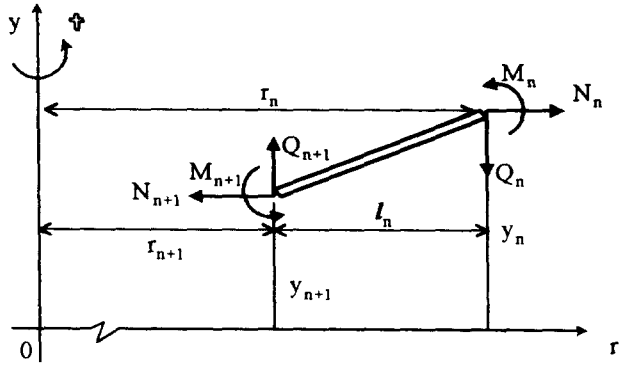


그림. 2 플래평 깃요소에 작용하는 힘과 모멘트

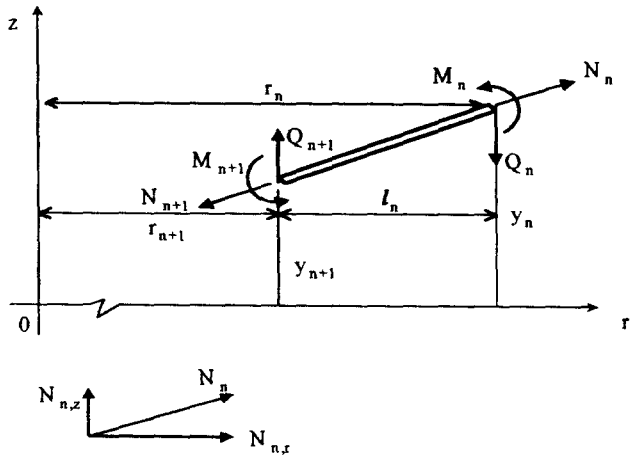


그림. 3 래깅 깃요소에 작용하는 힘과 모멘트

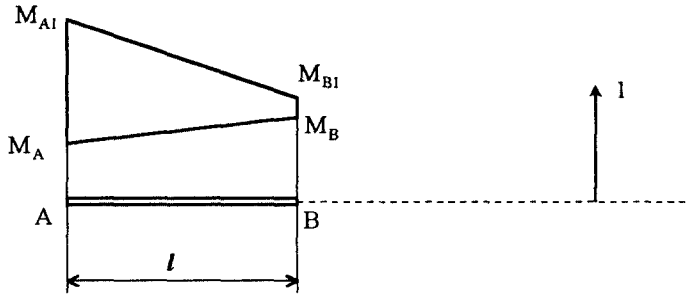


그림. 4 단위하중이 작용할 때 요소 AB에서의 모멘트의 선형적 분포

$-\frac{m_1 l_1}{2}$	$-\frac{m_1 l_1}{2}$	0	0	y ₁	Q_2^P
"	$-\frac{m_2 l_2}{2}$	$-\frac{m_2 l_2}{2}$	0	y ₂	Q_3^P
"	"	$-\frac{m_3 l_3}{2}$	$-\frac{m_3 l_3}{2}$	y ₃	Q_4^P
"	"	"	$-\frac{m_4 l_4}{2}$	y ₄	Q_5^P

그림. 5 플라핑 전단력행렬

$\frac{l_1^2 m_1}{3}$	$\frac{l_1^2 m_1}{6}$	0	0	y ₁	M_2^P
$-Q^P(1,1) l_2$	$-Q^P(1,2) l_2 + \frac{l_2^2 m_2}{3}$	$\frac{l_2^2 m_2}{6}$	0	y ₂	M_3^P
$-Q^P(2,1) l_3$	$-Q^P(2,2) l_3$	$-Q^P(2,3) l_3 + \frac{l_3^2 m_3}{3}$	$\frac{l_3^2 m_3}{6}$	y ₃	M_4^P
$-Q^P(3,1) l_4$	$-Q^P(3,2) l_4$	$-Q^P(3,3) l_4$	$-Q^P(3,4) l_4 + \frac{l_4^2 m_4}{3}$	y ₄	M_5^P

그림. 6 플라핑 굽힘행렬 중 P² 관련항

$\frac{\ell_1 m_1 (2r_1 + r_2)}{6}$	$\frac{\ell_1 m_1 (2r_1 + r_2)}{6}$			y_1	M_2^{Ω}
"	$-N_2^{\Omega}$ $-\frac{\ell_2 m_2 (2r_2 + r_3)}{6}$	N_2^{Ω} $+\frac{\ell_2 m_2 (2r_2 + r_3)}{6}$		y_2	M_3^{Ω}
"	"	$-N_3^{\Omega}$ $-\frac{\ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)}{6}$	N_3^{Ω} $+\frac{\ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)}{6}$	y_3	M_4^{Ω}
"	"	"	$-N_4^{\Omega}$ $-\frac{\ell_4 m_4 (2r_4 + r_5)}{6}$	y_4	M_5^{Ω}

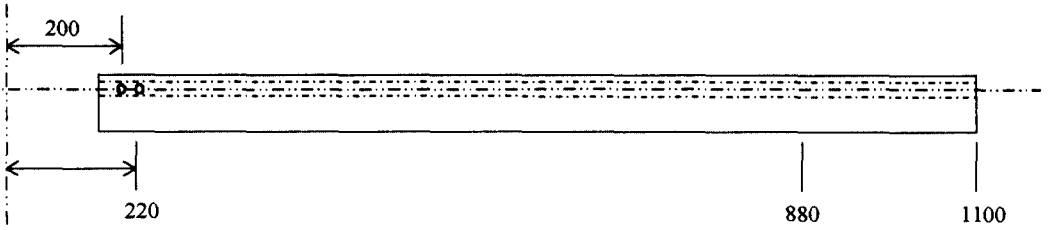
그림. 7 플래핑 굽힘행렬 중 Ω^2 관련항

0	$\frac{N_{2,r}^{\Omega}}{r_2}$	0	0	Z_1	Q_2^{Ω}
0	0	$\frac{N_{3,r}^{\Omega}}{r_3}$	0	Z_2	Q_3^{Ω}
0	0	0	$\frac{N_{4,r}^{\Omega}}{r_4}$	Z_3	Q_4^{Ω}
0	0	0	0	Z_4	Q_5^{Ω}

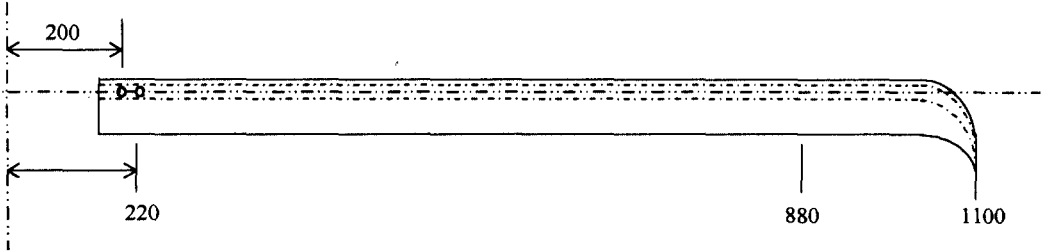
그림. 8 래깅 전단력행렬 중 Ω^2 관련항

$\frac{\ell_1 m_1 (2r_1 + r_2)}{6}$	$\frac{\ell_1 m_1 (2r_1 + r_2)}{6}$			Z_1	M_2^{Ω}
"	$-N_2^{\Omega}$ $-Q(1,2)^{\Omega} \ell_2$ $-\frac{\ell_2 m_2 (2r_2 + r_3)}{6}$	N_2^{Ω} $+\frac{\ell_2 m_2 (2r_2 + r_3)}{6}$		Z_2	M_3^{Ω}
"	"	$-N_3^{\Omega}$ $-Q(2,3)^{\Omega} \ell_3$ $-\frac{\ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)}{6}$	N_3^{Ω} $+\frac{\ell_3 m_3 (2r_3 + r_4)}{6}$	Z_3	M_4^{Ω}
"	"	"	$-N_4^{\Omega}$ $-Q(3,4)^{\Omega} \ell_4$ $-\frac{\ell_4 m_4 (2r_4 + r_5)}{6}$	Z_4	M_5^{Ω}

그림. 9 래깅 굽힘행렬 중 Ω^2 관련항



(a) Rectangular type



(b) Sweptback type

그림. 10 로터깃의 개략도

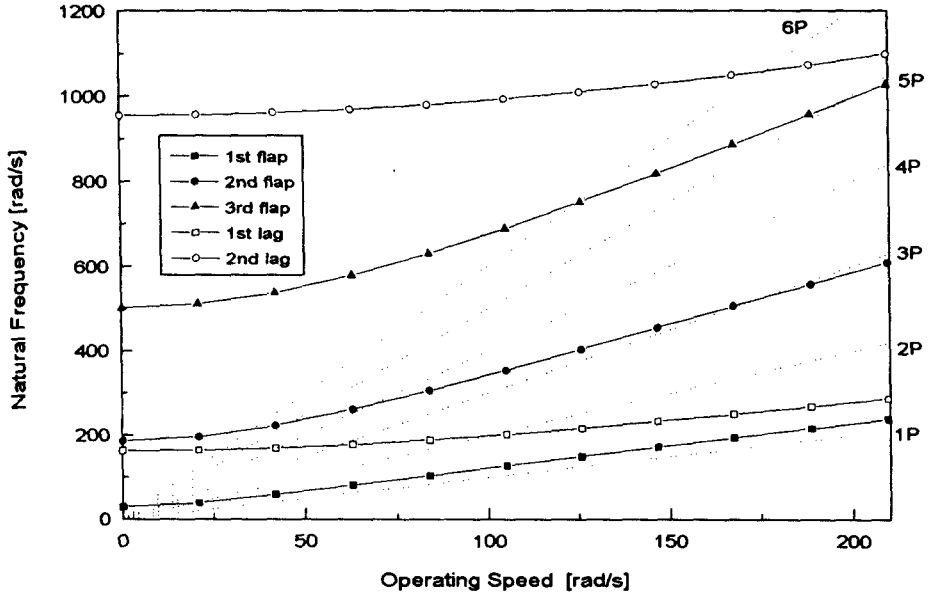


그림. 11 회전하는 것의 고유진동수 (Rectangular형)

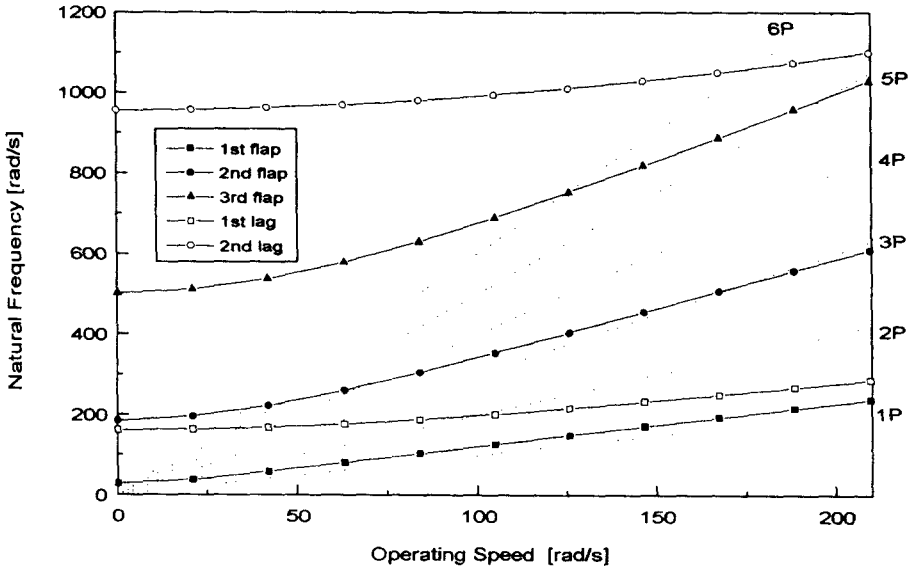
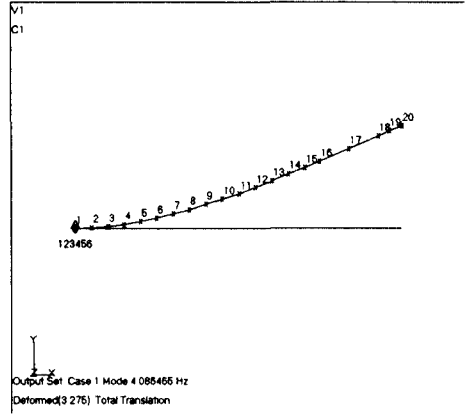
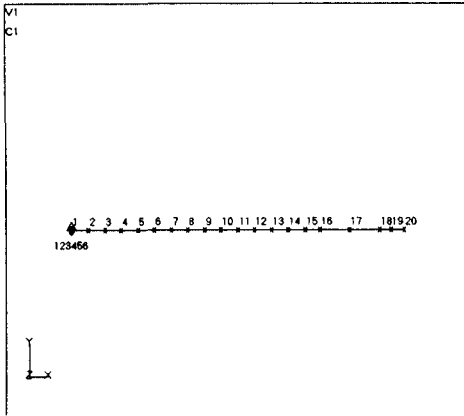
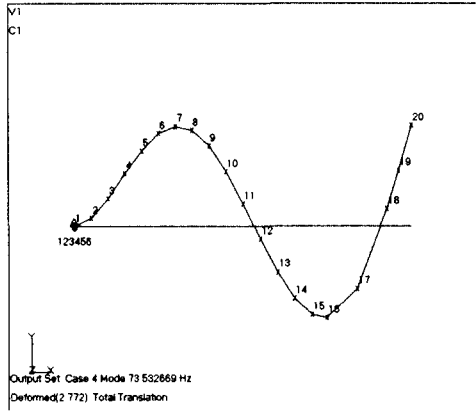
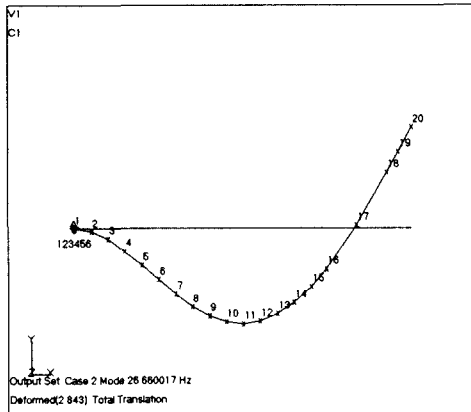


그림. 12 회전하는 것의 고유진동수 (Sweptback형)



NASTRAN 모델링

1st Flapping



2nd Flapping

3rd Flapping

그림. 13 NASTRAN 플래핑 고유진동 해석결과