

유한요소 - J 적분법을 이용한 3차원 응력강도계수의 계산

주석재
기계공학과

<요약>

2차원 균열문제에 대한 J 적분법을 3차원 균열문제에 확대하여 적용하는 방법을 개발하였다. 표면적분인 3차원 J 적분을 균열전선 어느 짧은 구간을 포위한 충분히 가는 원통적분표면을 선택하여 균열전선과 수직인 평면에서의 2차원 J 적분으로 환원하였다. 유한요소의 수치적분점을 통과하는 적분 경로가 균열전선과 수직인 평면 상에 놓이도록 균열전선을 포위한 15 절점 퇴화요소의 3각형 양측면이 각각 균열전선과 수직이도록 절점을 배치하였다. 몇 개의 3차원 균열문제를 통하여 본 논문에서 개발한 방법의 정확성과 안정성을 입증하였다.

Calculation of 3-D Stress Intensity Factors Using the Finite Elements and the J-Integral

Chu, Seok Jae
Dept. of Mechanical Engineering

<Abstract>

The J-integral method widely used for 2-D crack problems is extended to cover 3-D crack problems. Selecting a cylindrical surface of sufficiently small radius and nearly zero length along the crack front as an integration surface, the 3-D j-integral can be reduced to the 2-D J-integral defined on the plane perpendicular to the crack front. To make the plane perpendicular to the crack front, two triangular faces of the 15-node degenerate elements around the crack front are set to be perpendicular to the crack front. The accuracy and stability of the present method are confirmed through some 3-D example crack problems.

1. 서 론

2차원 균열체에서 균열연장에 관한 에너지해방률(energy release rate)을 계산하는 방법으로서 J 적분법(J-integral method)과 가상균열연장법(virtual crack extension method)이 널리 사용된다. 선적분인 J 적분은 균열이 연장될 때 적분경로가 포위한 영역에 대한 에너지의 감소를 계산하는 것으로서⁽¹⁾ 균열선단을 포위하는 어느 경로에 대하여도 적분치가 일정하며 J 적분치가 에너지해방률이다. 가상균열연장법⁽²⁾은 일부 절점을 이동하여 균열의 연장을 표현하고 강성행렬이 변한 요소에 대하여 에너지의 감소를 계산하는 면적분법이다. 과소하거나 과대하지 않은 대체로 넓은 범위의 가상균열연장에 대하여 에너지해방률이 일정하다.

선적분인 J 적분법이 면적분인 가상균열연장법보다 간편하지만 체적력 등이 존재하여 적분경로가 포위한 영역에 외력이 작용하는 경우에는 면적분이 추가되어 오히려 더 불편해진다. 적분경로가 요소 내부의 수치적분점을 통과하며 부분적으로 포위한 요소에 대한 면적분을 계산하는 것이 곤란하기 때문이다. 이런 난점을 해소하는 방법으로서 본인⁽¹⁾은 균열선단 인근 적분경로를 사용하여 경로가 포위한 영역을 충분히 축소하여 체적력 등이 존재하는 경우에 추가되는 면적분을 무시하는 방법을 개발하였다. 한편 처음부터 강성행렬이 변한 요소 전체에 대한 면적분으로 출발한 가상균열연장법에서는 이런 난점이 없다.

3차원 균열문제에 위의 2가지 방법을 확대하여 적용하면 J 적분은 균열전선(crack front)의 어느 구간을 포위한 영역의 표면에 대한 표면적분이 되고 가상균열연장법은 강성행렬이 변한 요소에 대한 체적적분이 된다. 적분표면이 요소 내부의 수치적분점을 통과하며 부분적으로 포위한 요소에 대한 표면적분을 계산하는 것은 역시 상당히 곤란하다. 절점을 이동하

여 균열전선 어느 구간의 균열성장을 표현하는 가상균열연장법은 처음부터 강성행렬이 변한 요소 전체에 대한 체적적분으로 출발하여 이런 난점이 없으므로 널리 사용되었다^(3, 4).

본 논문에서는 본인이 2차원 균열문제에서 사용하였던 균열전선 인근경로 J 적분법을 3차원 균열문제에 확대하여 적용하고자 한다. 충분히 축소된 적분표면을 사용하여 3차원 J 적분의 난점을 해소하고 3차원 J 적분이, 균열전선과 수직인 평면에서의 2차원 J 적분으로 환원되는 것을 제시하고자 한다.

2. 3차원 J 적분

탄성체의 2차원 균열이 연장될 때 에너지해방률은 다음과 같은 J 적분으로 주어진다.

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}) ds \quad (i, j = 1, 2) \quad (1)$$

여기서 적분경로 Γ 는 균열선단을 포함하는 영역을 포위하는 경계이고 W 는 스트레인 에너지 밀도, n_j 는 영역 밖을 향하는 Γ 와 수직인 단위벡터이다.

탄성체의 3차원 균열이 성장될 때 에너지 해방률은 다음과 같이 3차원 J 적분으로 주어진다.

$$J = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta} \int_{A_\epsilon + A_\epsilon^- + A_\epsilon^+} (Wn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}) dA \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

Fig. 1과 같이 균열선단을 포함한 영역은 이것을 포위하는 표면 A_ϵ , A_ϵ^- 과 A_ϵ^+ 로 정의된다. 표면 A_ϵ 은 균열전선과 평행한 표면이고 표면 A_ϵ^- 과 표면 A_ϵ^+ 는 각각 균열전선과 수직인 양쪽 표면이다.

국부좌표계 x_i 는 Fig. 2와 같이 원점이 균열선단인 국부좌표계로서 x_1, x_2 는 균열전선과 수직인 평면상에서 각각 균열평면과 평행하거나 수직인 방향 좌표이고 x_3 는 균열전선의 접선방향 좌표이다.

$\epsilon \rightarrow 0$ 일 때 $A_\epsilon^- \rightarrow 0$ 와 $A_\epsilon^+ \rightarrow 0$ 이므로 deLorenzi⁽³⁾가 제시한 x_3 방향 hoop stress의 기여는 무시되므로 식(2)에 포함시키지 않았다.

x_3 방향으로는 특이성이 존재하지 않으므로 $\epsilon \rightarrow 0$ 와 $\delta \rightarrow 0$ 일 때 A_ϵ^- 와 A_ϵ^+ 에 대한 적분은 상쇄된다. 그리고, 모드 I과 II인 경우 A_ϵ 상에서 $u_{3,1}$ 은 $u_{1,1}$ 과 $u_{2,1}$ 보다 충분히 작으므로 무시하고 $\delta \rightarrow 0$ 일 때 $\delta ds = dA_\epsilon$ 이므로 식(2)는 식(1)이 된다.

결국 3차원 J 적분은 Fig. 2와 같이 균열전선과 수직인 평면에서의 2차원 J 적분으로 환원된다.

3. 3차원 유한요소법

Owen과 Fawkes⁽⁵⁾의 8절점 등 매개변수 요소를 사용하는 2차원 유한요소 프로그램을 기초로 20절점 등 매개변수 요소를 사용하는 3차원 유한요소 프로그램을 개발하였다. 20절점 등 매개변수 요소에 대한 형상함수 N_i 는 corner node에 대하여

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (3)$$

$\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$ 인 mid-side node에 대하여

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (4)$$

를 사용하였다. 균열선단 부근은 20 절점 등 매개변수 요소의 $\xi = -1$ 인 면을 구성하는 절점을 ζ 좌표(균열전선과 평행) 가 같은 것 끼리 중첩하여 15 절점 퇴화요소(degenerate element)을 생성하여 균열전선과 일치시키고 $\xi = 0$ 인 중간절점을 균열선단에 가까운 1/4점에 옮겨 균열선단의 특이성을 주었다. 균열평면에 관하여 상하 대칭이므로 Fig. 3과 같이 하부만 모델링하였고 퇴화요소 1개당 45° 씩 퇴화요소 4개가 모여 균열선단 주위 180° 를 포위하게 하였다. J 적분경로 Γ 는 균열전선에 수직인 평면($\zeta = \text{const.}$) 상에서 $\xi = \text{const.}$, 인 선으로서 균열전선에 인접한 요소의 Gauss 수치적분점을 통하여 선으로서 4 개의 퇴화요소를 연속적으로 통과하게 모델링하였다. Gauss 수치적분 차수는 $2 \times 2 \times 2$ 로 충분하였고 이 때 Fig. 4와 같이 1 쌍의 퇴화요소에 대하여 ζ 가 다른 2 개의 적분경로가 생긴다.

3차원 유한요소 모델링은 유한요소 프로그램 NISA II(미국 EMRC 사)의 pre-processor DISPLAY III를 사용하였다. J 적분경로가 균열전선과 수직인 평면상에 놓이도록 균열전선에 인접한 퇴화요소의 면($\zeta = -1, 0, +1$)이 각각 균열전선에 수직이도록 절점을 배치하였다.

본 논문에서 개발된 3차원 유한요소 프로그램의 입력 file은 DISPLAY III가 출력한 NISA II 해석용 입력 file을 간단한 프로그램을 작성하여 변환하여 사용하였다.

국부좌표계 x_i 는 전체좌표계 X_i 를 X_2 축에 관하여 회전하고 원점을 균열선단에 옮긴 것이므로 σ_{ij} 와 ϵ_{ij} 는 전체좌표계에 관하여 출력된 것을 J 적분을 계산하기 전 국부좌표계에 관한 것으로 변환하여 사용하였다.

에너지해방률(J 적분치)은 다음과 같이 응력강도계수와 연관된다. 모드 I인 경우 plane strain일 때

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (5)$$

여기서 E 는 탄성계수이고 ν 는 Poisson 비이다. J 적분치를 식(5)에 대입하여 K_I 을 구한다.

4. 수치 예제

본 논문의 방법의 정확성과 안정성을 입증하려고 이미 수치해나 해석해가 여러 가지 존재하는 3 가지 예제에 대하여 3차원 모드 I 응력강도계수를 산출하여 보았다. 균열전선 부근의 유한요소망은 3 가지 예제에 대하여 서로 비슷하다. Poisson 비 ν 는 모두 0.3을 사용하였다.

예제 1 원형봉 속의 동전균열(penny-shaped crack) : $2a/D = 0.25$

Fig. 5와 같이 X_1X_2 , X_2X_3 , X_3X_1 평면에 관하여 대칭이므로 Fig. 6과 같이 전체의 1/8 만 모델링하였다. 모델상에서 균열전선은 중심축에 관하여 90° 회전하는 원호로서 90° 원호를 2 분할하였다. 균열전선에 수직인 평면과 균열전선에 인접한 요소의 교차면은 전체적으로 반원형이므로 J 적분경로는 원형이다. 균열선단에 접근하면서 요소의 반경방향 길이는 1/2로 감소하게 배치하였다. J 적분치가 유한요소망 거칠기에 영향 받으리라 예상되어 균열전선 인접 요소를 단계적으로 반경방향으로 더 분할하여 가며 해의 안정성을 살펴보았다. Fig. 6에 도시한 것이 Model B이고 이것보다 덜 분할한 것이 Model A, 더 분할한 것이 Model C이다. Table 1에서 보는 것과 같이 reference 해에 관하여 본 결과의 오차가 Model A는 -0.7 %,

Model B는 +0.1 %, Model C는 +0.1 %이었다. MODEL A에서 Model B가 되며 reference 해에 접근한 후에는 Model C가 되어도 해는 거의 변하지 않았다. 2차원 축대칭 유한요소와 가상균열연장법을 이용한 deLorenzi(3)의 결과의 오차는 +0.3 %이었다.

예제 2 무한체 속의 동전균열

Fig. 7과 같이 X_1X_2 , X_2X_3 , X_3X_1

평면에 관하여 대칭이므로 Fig. 8과 같이 무한체를 표현한 정육면체 전체의 1/8을 $20a \times 20a \times 20a$ (a 는 균열의 반지름)인 정육면체로, 동전균열의 1/4을 정육면체의 모서리에 모델링하였다. 균열전선에서 반경방향으로는 예제 1의 MODEL B 정도로 세밀하게 배치하였고 균열전선인 90° 원호는 4 분할하여 J 적분경로는 8개를 취하였다. 무한체를 정육면체로 모델링하여 J 적분치는 적분경로마다 약간 변동하였다. Table 2에서 보는 것과 같이 이론해와 비교하여 평균치의 오차는 본 논문의 결과가 -0.1 %, Farris⁽⁷⁾의 경계요소법의 결과가 +0.3 %, 최대오차는 본 논문의 결과가 -0.1 %, Farris의 경계요소법의 결과가 +0.6 %이어서 본 논문의 결과가 더 정확하고 안정적이었다. Farris⁽⁷⁾도 본 논문과 같이 무한체를 정육면체로 모델링하였다.

예제 3 표면 파열 반원균열($b/a = 1$)과 반타원균열($b/a = 0.25$)

Fig. 9와 같이 X_2X_3 , X_3X_1 평면에 관하여 대칭이므로 Fig. 10과 같이 직육면체의 1/4을 $20b \times 20b \times 20b$ (b 는 타원균열의 단반경)인 정육면체로, 타원균열의 1/2을 정육면체의 모서리에 모델링하였다. 균열전선에서 반경방향으로는 예제 1의 MODEL B 정도로 세밀하게 배치하였고 균열전선인 1/4 타원은 4 분할하여 J 적분

경로는 8개를 취하였다. 단반경과 장반경의 비 b/a 는 1과 0.25인 2가지 경우를 택하였다. 타원 균열전선상의 위치는 Fig.11과 같이 정의된 각으로 표시하였고 이 각의 간격이 일정하게 균열전선을 분할하였다. 균열전선에 수직인 평면과 Fig. 3와 같이 균열선단에 인접한 요소의 교차면은 전체적으로 직사각형이므로 Fig. 4와 같이 J 적분경로는 정사각형이다.

계산된 응력강도계수는 $K_0 = 2\sigma(b/\pi)^{1/2}$ 로 나누어 무차원화하였다. Fig. 12와 같이 본 논문의 결과는 $\theta = 0^\circ \sim 10^\circ$, 즉 plane stress가 지배적인 표면 부근, 을 제외하고는 plane strain이 지배적인 내부영역에서는 Newman⁽⁸⁾의 결과와 잘 일치하였다. 표면 근처의 plane stress 지배영역을 정확히 파악하기가 곤란하므로 표면 외에는 plane strain을 가정하는 것이 일반적이다. 본 논문에서는 표면에서는 계산하지 않으므로 plane strain을 가정하였다. Table 3을 보면 $b/a = 1$ 인 경우 내부영역인 $\theta = 90^\circ$ 인 부근에서는 Newman의 결과보다 Farris⁽⁷⁾의 결과와 잘 일치하였다.

5. 결 론

3차원 J 적분은 균열전선의 어느 구간을 포함한 영역을 포위한 표면에 대한 표면적분으로서 적분표면을 구성하는 요소의 부분적인 내부표면에 대한 적분이 곤란하여 3차원 균열문제의 해석에는 가상균열연장법이 주로 이용되었다. 본 논문에서는 충분히 가늘고 짧은 원통표면을 적분표면으로 택하여 3차원 J 적분의 난점을 해소하고 3차원 J 적분을 균열전선에 수직인 평면상의 2차원 J 적분으로 환원하였다.

본 논문의 3차원 J 적분법은 3차원 균열문제에 대하여 널리 사용되는 가상균열연장법에 비하여 절점을 이동하여 균열연장을 표현할 필요도 없고 증가한 가상균

열면적을 계산할 필요도 없으며 균열전선 어느 구간에서의 에너지해방률의 평균치를 구하지 않고 균열전선상 어느 점에서의 에너지해방률을 구하는 것이 장점이다.

몇 가지 수치예제를 통하여 기존의 균열선단 절점력법, 가상균열연장법, 경계요소법 등의 결과와 비교하여 3차원 J 적분법의 정확성 및 안정성을 입증하였다. 원형봉이나 무한체 속의 동전균열에 대하여 본 논문의 결과는 해석적인 해에 관한 오차가 0.1 %에 불과하였다.

참고문현

1. 주석재, "J_k 적분을 이용한 이방성 복합 적층판에 대한 혼합모드 균열문제의 해석," 박사학위논문, 한국과학기술원, 1990.
2. D. M. Parks, A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, International Journal of Fracture, Vol.10, No. 4, pp.487-502, 1974.
3. H. G. deLorenzi, "Energy release rate calculations by the finite element method," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 21, No. 1, 1985, pp.129-143.
4. G. P. Nikishkov and S. N. Atluri, "Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the equivalent domain integral method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, pp.1801-1821.
5. D. R. J. Owen and A. J. Fawkes, Engineering Fracture Mechanics, Pineridge Press Ltd., 1983.
6. H. Tada, P. C. Paris and G. R. Irwin, The Stress Analysis of Cracks Handbooks, Paris Production Inc., 1973.
7. T. N. Farris and M. Liu, "Boundary

- element crack closure calculation of three-dimensional stress intensity factors", International Journal of Fracture, Vol.60, 1993, pp.33-47.
8. J. C. Newman and I. S. Raju, Engineering Fracture Mechanics, Vol.15, pp.185-192, 1981.
 9. M. Isida, H. Noguchi and T. Yoshida, International Journal of Fracture, Vol.26, pp.157-188, 1984.

Table 1 Normalized stress intensity factors for a penny-shaped crack in a cylinder

	$K_I / \sigma_{net}(\pi a)^{1/2}$
deLorenzi ⁽³⁾	0.604
present	0.5978 (Model A) 0.6024 (Model B) 0.6025 (Model C)
reference ⁽⁶⁾	0.602

Table 3 Normalized stress intensity factors for a surface-breaking penny-shaped crack in an infinite body
: $b/a = 1, \theta = 90^\circ$

	$K_I / 2\sigma(a/\pi)^{1/2}$
Newman ⁽⁸⁾	1.0407
Tada ⁽⁶⁾	1.0250
Farris ⁽⁷⁾	1.0320
present	1.0326

Table 2 Normalized stress intensity factors for an embedded penny-shaped crack in an infinite body

	$K_I / 2\sigma(a/\pi)^{1/2}$
Farris ⁽⁷⁾	average 1.0025 (min. 0.9972, max. 1.0057)
present	average 0.9994 (min. 0.9989, max. 0.9999)
theory	1.0000

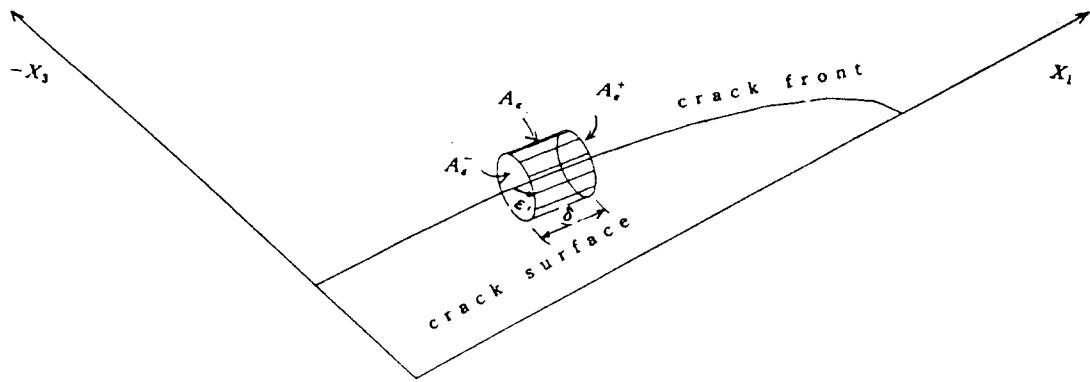


Fig. 1 3-D integration surface A_ϵ , A_ϵ^+ and A_ϵ^- around a segment of the crack front

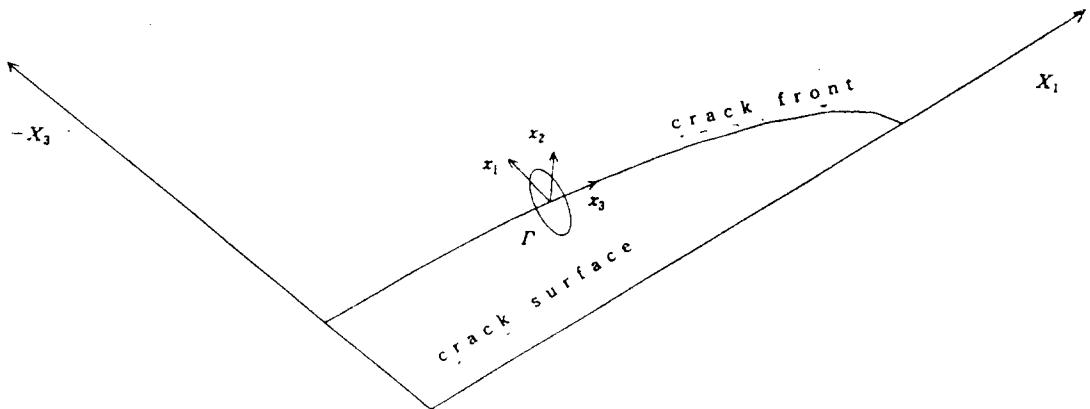


Fig. 2 2-D integration contour Γ around a crack tip

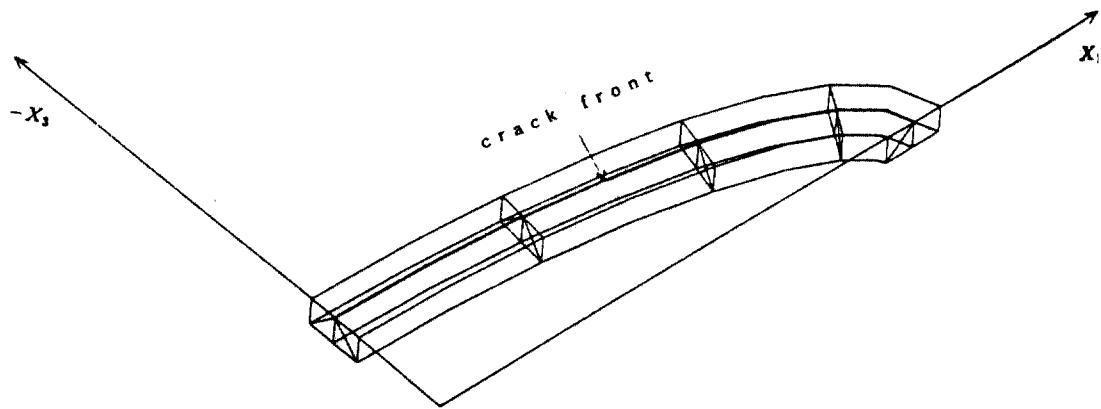


Fig. 3 15-node degenerate elements around the crack front

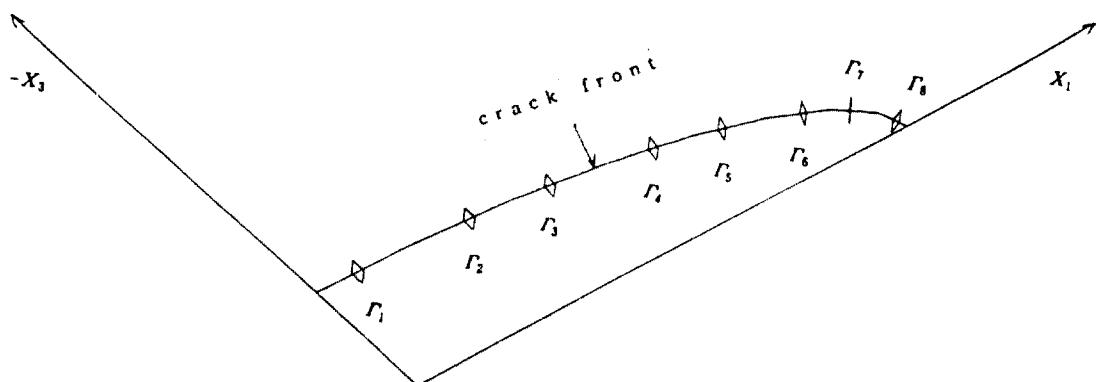


Fig. 4 Integration contours along the crack front

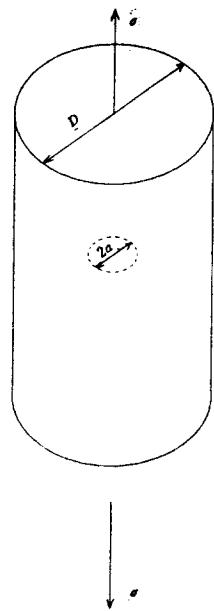


Fig. 5 A penny-shaped crack in a cylinder

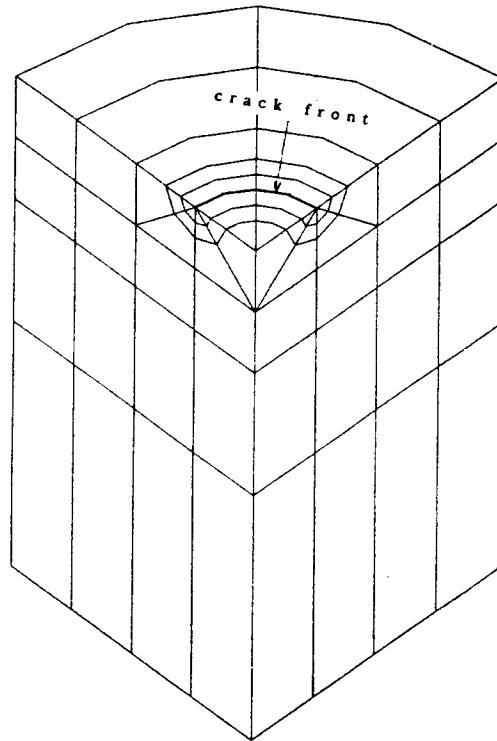


Fig. 6 Finite element model for a penny-shaped crack in a cylinder

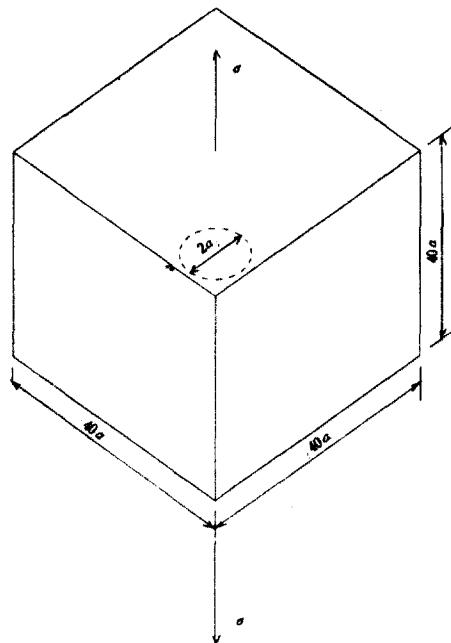


Fig. 7 A penny-shaped crack in a large medium

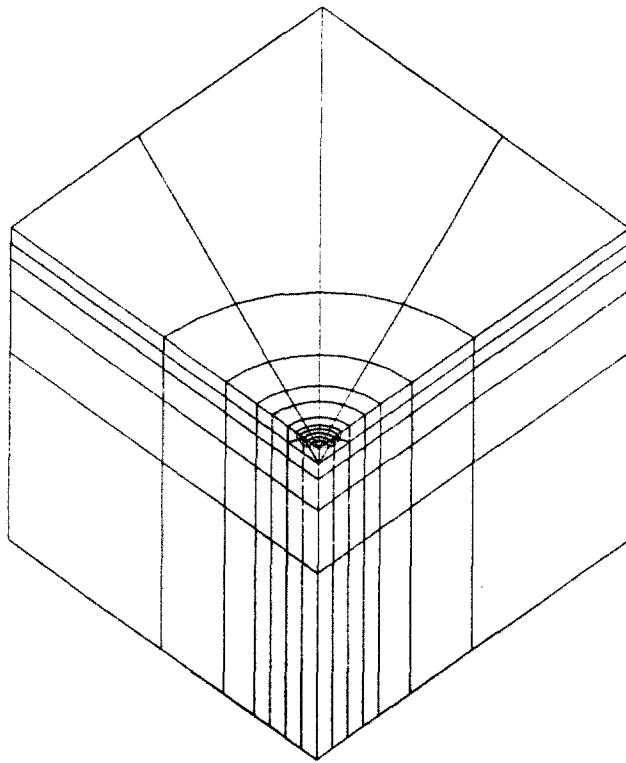


Fig. 8 Finite element model for a penny-shaped crack in a large medium

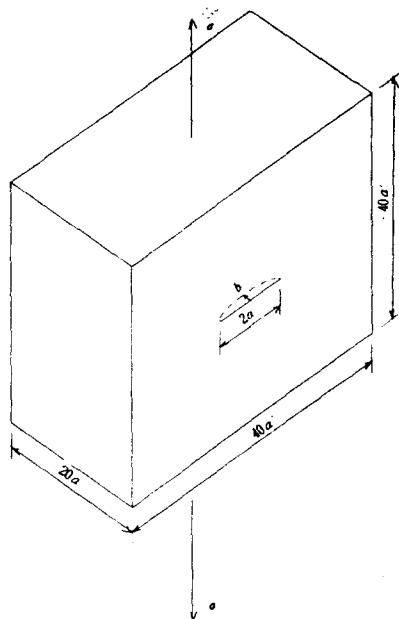


Fig. 9 A semi-circular or a semi-elliptical surface crack in a large medium

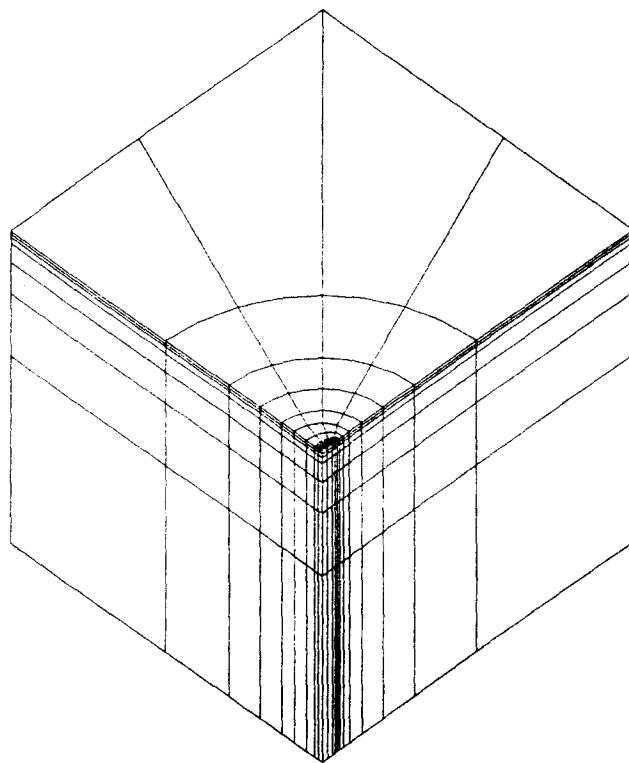


Fig. 10 Finite element model for a semi-elliptical surface crack in a large medium

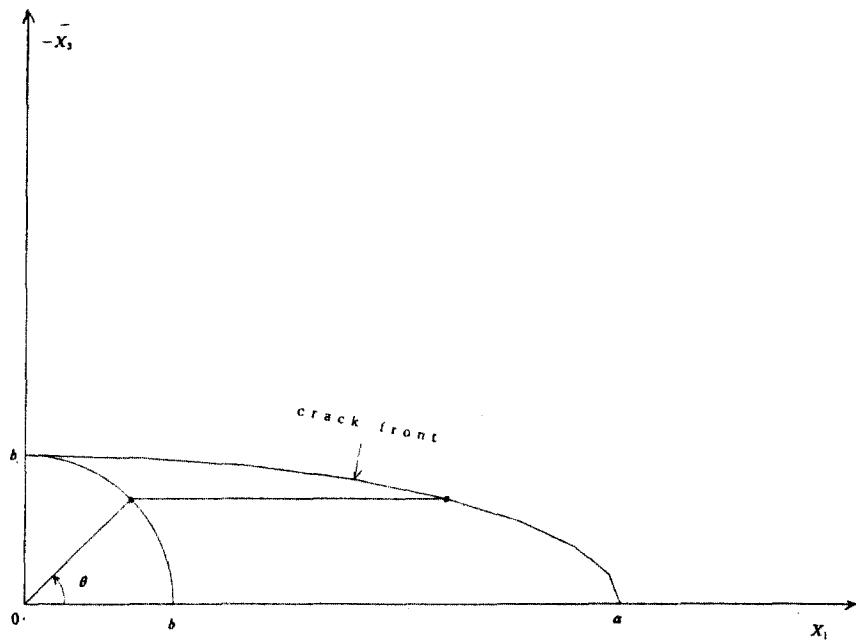
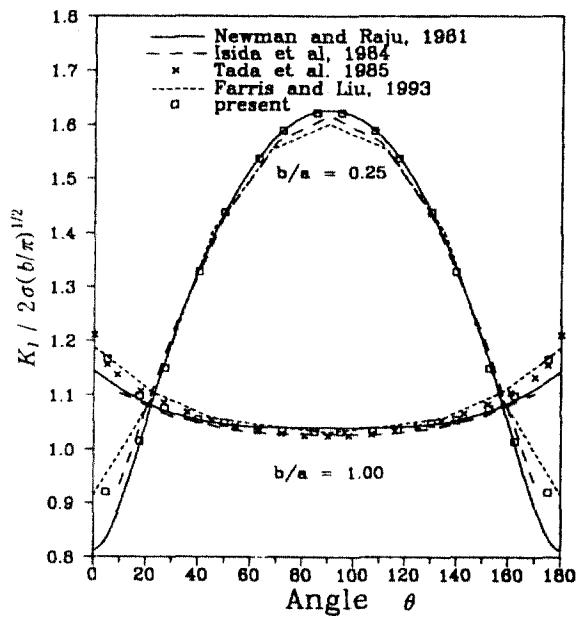
Fig. 11 Definition of the angle θ 

Fig. 12 Stress intensity factors for a semi-circular or a semi-elliptical surface crack