

균열이 있는 원공을 갖는 유한 평판에 대한 경계조건의 영향

염 영 진
기 계 공 학 과
(1985. 9. 13 접수)

<요 약>

균열이 있는 원공을 가진 유한평판의 경계조건이 달라짐에 따라 응력확대계수와 응력, 변위분포에 어떠한 영향을 미치는가를 MMC(Modified Mapping Collocation)방법으로 해석하였다.

그 결과 균일변위조건의 경우가 균일응력조건 때보다 응력확대계수의 값이 작았고 그 차이는 균열의 길이가 커짐에 따라 증가하였다. 또 응력과 변위분포도 경계조건에 따라 큰 차이를 보였다.

Effect of Boundary Conditions on a Finite Sheet Having a Cracked Circular Hole

Yum, Young-Jin
Dept. of Mechanical Engineering
(Received September 13, 1985)

<Abstract>

The effect of boundary conditions on the stress intensity factor, stress and displacement distributions has been studied for a finite sheet having a cracked circular hole using MMC (Modified Mapping Collocation) method.

Stress intensity correction factor for uniform displacement condition is less than that for uniform stress condition and the difference increases as the crack length increases.

Furthermore, the stress and displacement distributions vary remarkably with respect to the boundary conditions.

I. 서 론

Modified Mapping Collocation 방법은 1970년 Bowie 와 Neal [1]에 의해서 유한평판에 균열이 있는 문제에 처음 적용되었고 그 이후 복잡한 형상을 갖는 평면균열 문제에 성공적으로 적용되어왔다. Bowie 와 Freese [2]는 이방성 평면문제에 적용을 하였고 Gandhi [3]는 이방성 평판이 경사진 균열을 갖는 문제를 이 방법으로 해석하였다. 본 논문에서는 이방성문제에도 적용할 수 있는 일반적인 이론 전개를 하였고 폭과 높이가 같은 등방성 유한평판의

내부에 균열을 가진 원공이 있을 때 경계조건이 응력확대계수와 응력, 변위분포에 미치는 영향을 조사하였다.

II. 이 론

1. 복소변수 표시

평면응력상태에 있는 이방성재료에 대한 응력-변형도 관계는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ \epsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

직교이방성 즉 식방성재료에 대해서는 $a_{16}=a_{26}=0$ 이 된다.

Airy 응력함수 $U(x, y)$ 를 Compatibility equation에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (2)$$

s_i 를 다음 특성방정식으로부터 얻어지는 근이라 하면

$$a_{11}s_i^4 - 2a_{16}s_i^3 + (2a_{12} + a_{66})s_i^2 - 2a_{26}s_i + a_{22} = 0 \quad (3)$$

식(2)의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$U(x, y) = U_1(x + s_1 y) + U_2(x + s_2 y) + U_3(x + s_3 y) + U_4(x + s_4 y) \quad (4)$$

Lekhnitskii [4]는 직방성의 경우 특성근이 공액 복소수이거나 순허수임을 증명하였다.

등방성인 경우 $s_1 = s_2 = i$ 가 됨을 쉽게 알 수 있다.

직방성인 경우 서로 다른 네 근 $s_1, s_2, \bar{s}_1, \bar{s}_2$ ($s_1 \approx s_2$)에 대한 응력함수는 다음과 같이 표현된다.

$$U(x, y) = 2R_e [U_1(z_1) + U_2(z_2)] \quad (5)$$

여기서 $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$ 이다.

$\phi(z_1) = \frac{dU_1}{dz_1}$, $\Psi(z_2) = \frac{dU_2}{dz_2}$ 의 두 함수를 도입하면

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2R_e [s_1^2 \phi'(z_1) + s_2^2 \Psi'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2R_e [\phi'(z_1) + \Psi'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2R_e [s_1 \phi'(z_1) + s_2 \Psi'(z_2)] \\ u &= 2R_e [p_1 \phi(z_1) + p_2 \Psi(z_2)] \\ v &= 2R_e [q_1 \phi(z_1) + q_2 \Psi(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

로써 응력과 변위가 표시된다. 여기서

$$p_i = a_{11}s_i^2 + a_{12} - a_{16}s_i$$

$$q_i = a_{12}s_i + a_{22}/s_i - a_{26} \text{ 이다.}$$

합력조건식은

$$(1 + i s_1) \phi(z_1) + (1 + i s_2) \Psi(z_2) + (1 + i \bar{s}_1) \overline{\phi(z_1)} + (1 + i \bar{s}_2) \overline{\Psi(z_2)}$$

$$= i \int' (X_n + i Y_n) ds + C \\ = f_1(s) + i f_2(s) \quad (7)$$

로 표시할 수 있다.

여기서 X_n, Y_n 은 미소요소 ds 에 작용하는 수평 수직방향의 응력이고 C 는 적분상수이다.

2. MMC

등방성의 경우와 달리 z 평면의 z_1, z_2 평면을 생각한다.

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy \\ z_1 &= x + s_1 y \\ z_2 &= x + s_2 y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

두 개의 매개평면 ζ_1, ζ_2 를 생각하면

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \omega_1(\zeta_1) = \frac{L}{2}(\zeta_1 + \zeta_1^{-1}) \\ z_2 &= \omega_2(\zeta_2) = \frac{L}{2}(\zeta_2 + \zeta_2^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

두 영역 S_{z_1}, S_{z_2} 는 각각 S_{ζ_1}, S_{ζ_2} 로 등각사상이 되고 한 점 z 에 대해서 $\zeta_1 = \zeta_2$ 가 된다.

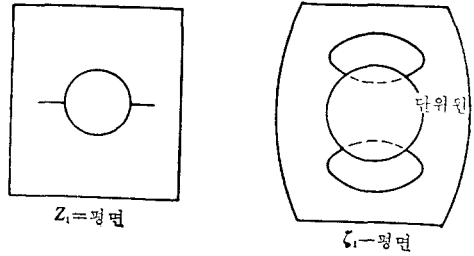


그림 (1) 실제평면과 사상평면

ζ_1, ζ_2 평면에서의 응력과 변위는 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2R_e [s_1^2 \phi'(\zeta_1) / \omega_1'(\zeta_1) + s_2^2 \Psi'(\zeta_2) / \omega_2'(\zeta_2)] \\ \sigma_y &= 2R_e [\phi_1'(\zeta_1) / \omega_1'(\zeta_1) + \Psi'(\zeta_2) / \omega_2'(\zeta_2)] \\ \tau_{xy} &= -2R_e [s_1 \phi'(\zeta_1) / \omega_1'(\zeta_1) + s_2 \Psi'(\zeta_2) / \omega_2'(\zeta_2)] \\ u &= 2R_e [p_1 \phi(\zeta_1) + p_2 \Psi(\zeta_2)] \\ v &= 2R_e [q_1 \phi(\zeta_1) + q_2 \Psi(\zeta_2)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

또 합력식은 다음과 같이 된다.

$$(1 + i s_1) \phi(\zeta_1) + (1 + i s_2) \Psi(\zeta_2) + (1 + i \bar{s}_1) \overline{\phi(\zeta_1)} + (1 + i \bar{s}_2) \overline{\Psi(\zeta_2)} = f_1(s) + i f_2(s) \quad (11)$$

다음으로 ζ_1, ζ_2 평면에서의 단위원을 통한 Analytic Continuation [5]에 대해 생각해 보자. $S_{z_1}^+, S_{z_2}^+$ 를 ζ_1, ζ_2 평면에서의 매개영역, $S_{z_1}^- = S_{z_1}^+ + S_{z_2}^+$ 이라 하고 단위원내의 영역을 $S_{z_1}^-$ 로 표시하자.

$S_{z_1}^-$ 영역에서 analytic 함수 $G(\zeta)$ 를 도입하여 다음 관계식을 사용하면 $G(\zeta)$ 가 $S_{z_1}^-$ 영역에서도 정의될 수 있다.

$$BG(\zeta) = \Psi(1/\zeta) - \overline{CG}(1/\zeta) \quad \zeta \in S_{z_1}^- \quad (12)$$

$$\text{그러면 } \Psi(\zeta_2) = BG(1/\zeta_2) + CG(\zeta_2) \quad (13)$$

가 된다.

$$\phi(\zeta_1) = G(\zeta_1) \quad (14)$$

으로 하면 $\phi(\zeta_1)$ 와 $\Psi(\zeta_2)$ 가 $G(\zeta)$ 의 형으로 단위원 안으로도 확장되어 정의될 수 있다. 식(12)(13)의 상수 B, C 는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} B &= (\bar{s}_2 - \bar{s}_1) / (s_2 - \bar{s}_2) \\ C &= (\bar{s}_2 - s_1) / (s_2 - \bar{s}_2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(13)~(15)식을 (11)식에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} & (1+i\bar{s}_2)(s_2-s_1)(\bar{s}_2-s_2)^{-1} [G^-(\sigma) - G^+(\sigma)] \\ & + (1+i\bar{s}_2)(\bar{s}_2-\bar{s}_1)(s_2-\bar{s}_2)^{-1} [\overline{G^-(\sigma)} - \overline{G^+(\sigma)}] \\ & = -i \int^s (X_n + iY_n) ds + C \\ & = -f_1(s) - if_2(s) \end{aligned} \quad (16)$$

이 되며 이 식은 무한중 균열면에서는 $G^+(\sigma) = G^-(\sigma)$ 가 되어 $G(\zeta)$ 가 균열면 경계에서 연속임을 증명한다.

3. 응력함수와 응력확대계수의 결정

균열 하중시와 마찬가지로 응력함수를 다음과 같이 선정한다. [6]

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=-M}^N a_n \zeta^{2n+1} + \sum_{n=1}^{MN} b_n \zeta(\zeta^2+1)^{-n} \quad (17)$$

응력, 변위, 합력을 a_n, b_n 으로 표시하고 경계조건과 Least square collocation을 적용하면 a_n, b_n 이 구해지고 응력과 변위분포를 구할 수 있다.

응력확대계수는 다음과 같이 주어진다. [7]

$$K_1 = 2\sqrt{2} [(s_2 - s_1) / s_2] \lim_{z_1 \rightarrow z_0} (z_1 - z_0)^{1/2} \phi'(z_1) \quad (18)$$

z_0 는 균열첨단의 좌표이다.

(18)식은 결국

$$K_1 = 2\sqrt{L} [(s_2 - s_1) / s_2] G'(1) \quad (19)$$

이 된다.

K_1 을 응력확대수정계수로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_1 &= \sigma_a F \sqrt{L} \\ F &= K_1 / \sigma_a \sqrt{L} \end{aligned} \quad (20)$$

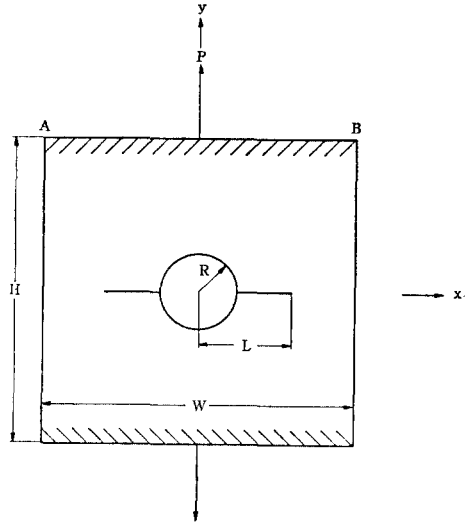
σ_a 는 경계조건이 균일응력인 경우 균일응력값과 일치하고 균일변위일 경우 경계면에서의 평균응력값과 같다.

4. 경계조건의 적용

균일변위의 경우 그림(2)로부터 경계조건이 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad x = \frac{W}{2} \quad 0 \leq y \leq \frac{H}{2} \\ \tau_{xy} = 0 \quad v = v_0 = \text{const} \quad 0 \leq x \leq \frac{W}{2} \quad y = \frac{H}{2} \\ \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

원공주위에서 균열면과 원공주위에서의 적분상수는 0이 되나 바깥경계에서는 응력이 균일하지 않으므로 그림(2)의 AB면에 작용하는 평균응력 σ_a 를 생각한다.



그림(2) 평판의 기하학적 형상

$$\sigma_a = \frac{1}{W} \int_A^B \sigma_x dx \quad (22)$$

평판이 xy 축에 대해 대칭이라 전체의 $\frac{1}{4}$ 만 생각하므로 바깥경계에서의 적분상수는 $\frac{\sigma_a W}{2}$ 가 된다. 균일변위 v_0 를 경계조건으로 주는 것보다 σ_a 를 경계조건으로 하여 문제를 푼다. 그러면 AB면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \circ AB \text{ 면에 작용하는 전체 힘} &= \sigma_a W \\ \circ \tau_{xy} &= 0 \\ \circ v_{01} - v_{02} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

여기서 v_{01}, v_{02} 는 AB면에 있는 서로 다른 두 점에서의 변위를 나타낸다.

III. 수치해석 및 고찰

1. 계산과정

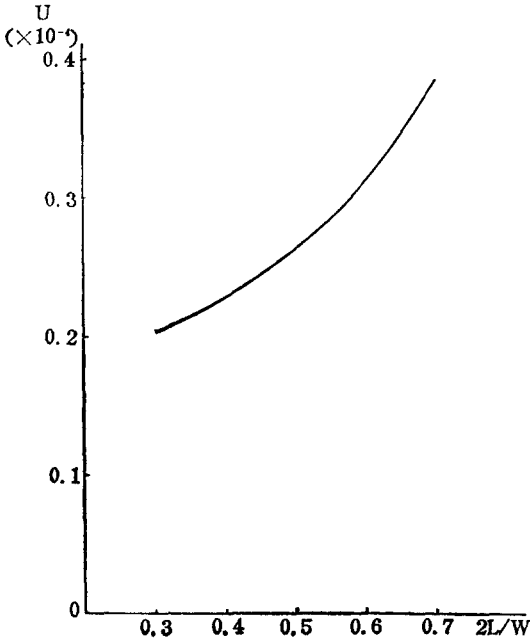
평판의 폭과 높이의 비는 1로 고정하였고 평판이 xy 축에 대해 대칭이므로 전체의 $\frac{1}{4}$ 만 고려하였다. 응력함수의 계수 $M=N=MN=10$ 으로 취했고 원공주위의 Collocation Point는 3° 간격으로, 경계면에서의 Collocation Point의 간격은 $\frac{1}{20}$ 로 하였다. 원공의 지름은 평판폭의 $\frac{1}{4}$ 로 고정하였고 균열길이는 $2L/W=0.3$ 부터 0.7 까지 변화시켰다. 경계면

$y = \frac{H}{2}$ 에서의 평균응력 σ_a 의 크기는 1로 취했다.

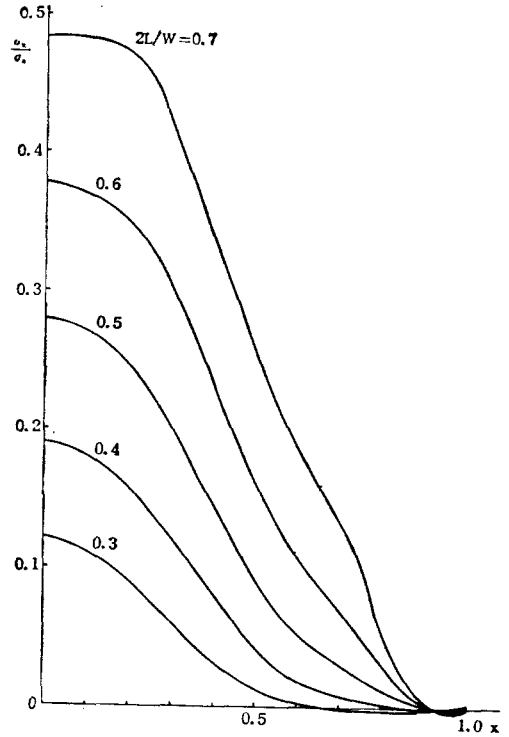
2. 결과 및 고찰

(1) 균일변위 경계조건

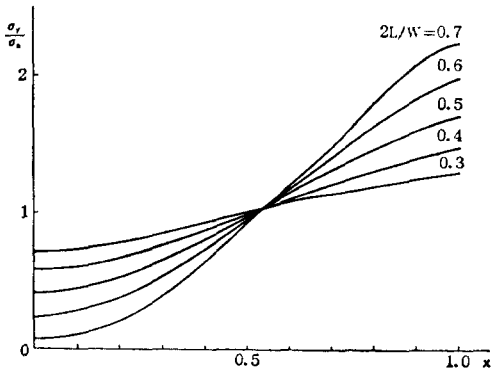
그림(3)은 균열길이에 따른 $y = \frac{H}{2}$ 에서의 y 방향 변위를 보여주고 그림(4)는 $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 분포를 보여준다. 그림(5)에 보인 $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 값은 균



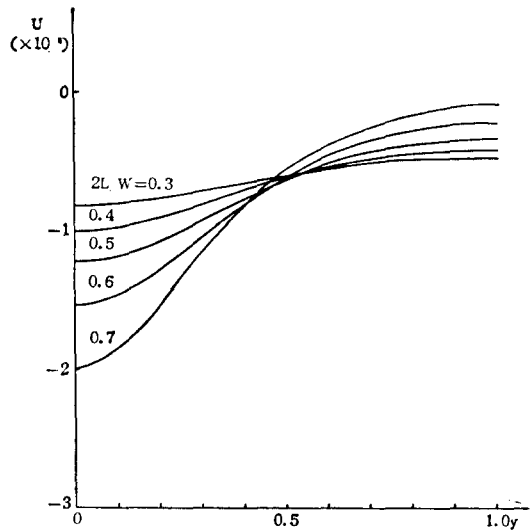
그림(3) 균열길이에 따른 $y = \frac{H}{2}$ 에서의 y 방향 변위



그림(4) $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 분포

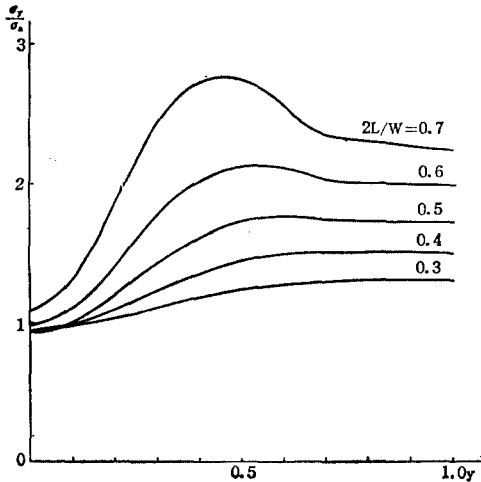


그림(5) $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 분포



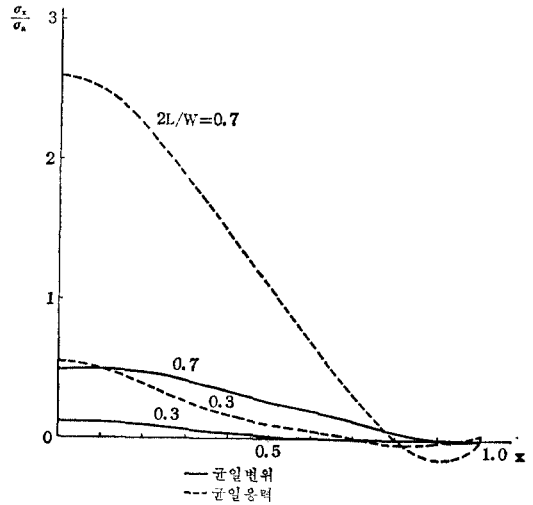
그림(6) $x = \frac{W}{2}$ 에서의 x 방향 변위

열이 커짐에 따라 변화가 심해서 $2L/W=0.7$ 일 때 평균응력의 약 2.25배까지 증가한다. 그림(6)의 $x=\frac{W}{2}$ 에서의 x 방향 변위는 균열길이에 관계없이 모두 음이 되고 그 절대치는 평균중앙에서 가장 크다. 그림(7)의 $x=\frac{W}{2}$ 에서의 σ_y 값은 $y>0.7$ 인 경우 균열길이에 관계없이 거의 일정한 값을 나타낸다.



그림(7) $x=\frac{W}{2}$ 에서의 σ_y 분포

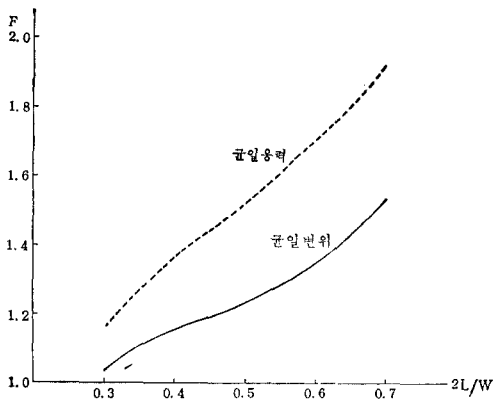
시보다 훨씬 큰 값을 나타냈고 그림(10)의 $x=\frac{W}{2}$ 에서의 σ_x 값은 균열변위인 경우 균일응력시보다 약간 큰 값을 나타냈다.



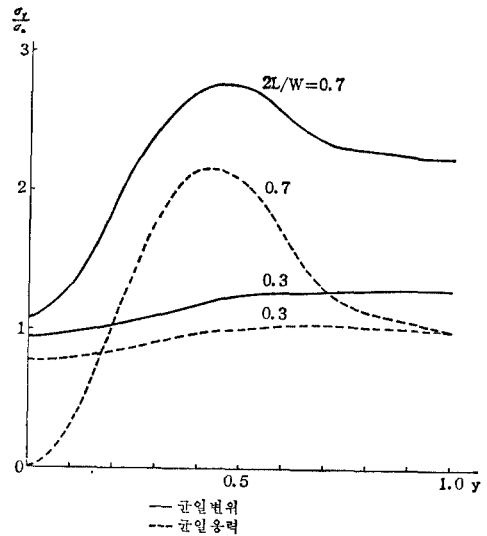
그림(9) $y=\frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 분포

(ii) 균일응력시와 균일변위시의 비교

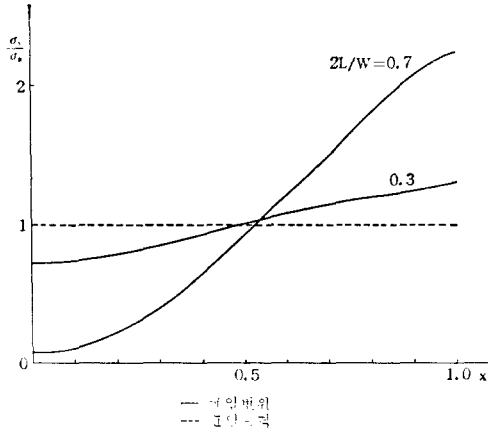
그림(8)에서 보듯이 균일변위때의 응력확대수정계수가 균일응력때보다 작은 값을 나타냈는데 그 차이는 균열이 커짐에 따라 증가하였다. 그림(9)에 있는 $y=\frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 값은 균일응력인 경우가 균일변위



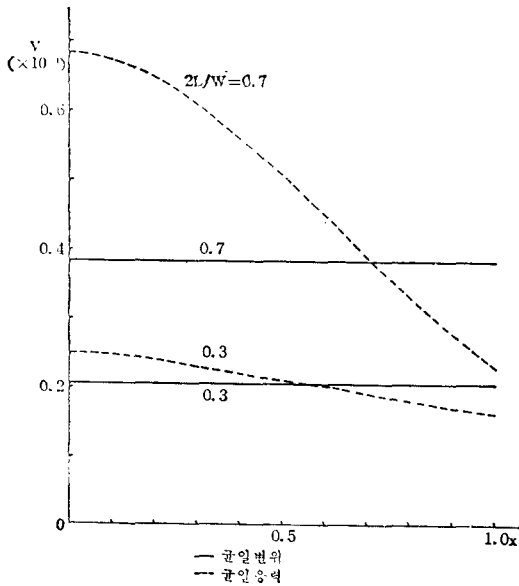
그림(8) 응력확대 수정계수(F)



그림(10) $x=\frac{W}{2}$ 에서의 σ_x 분포



그림(11) $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_y 분포



그림(12) $y = \frac{H}{2}$ 에서의 y 방향 변위

IV. 결 론

1. 균일변위조건일 때 $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_y 값은 $2L/W = 0.7$ 일 때 평균응력의 2.25배까지 증가한다.
2. 응력확대수정계수는 균일응력일 때가 균일변위시보다 더 크고 그 차이는 균열이 길수록 증가한다.
3. $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 값은 균일응력일 때, $x = \frac{W}{2}$ 에서의 σ_y 값은 균일변위일 때 각각 본 값을 갖는다.

참 고 문 헌

1. O.L. Bowie and D.M. Neal
Int. J. of Fracture Mech. 62, pp.199-206 (1970)
2. O.L. Bowie and C.E. Freese
Int. J. of Fracture Mech. Vol.8, No.1, pp. 49-58 (1972)
3. K.R. Gandhi
J. of Strain Analysis Vol.7, No.3, pp.157-162 (1972)
4. S.G. Lekhnitskii
Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body Holden-Day Inc. San Francisco (1963)
5. N.I. Muskhelishvili
Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity P. Noordhoff Groningen (1963)
6. Y.J. Yum In this Volume.
7. G.C. Sih, P.C. Paris and F.Erdogan
J. of Appl. Mech. Vol.29, pp.306-312 (1962)