

균일응력 경계조건을 받는 유한평판의 원공으로부터 발생하는 균열해석

염 영 진
기 계 공 학 과
(1985. 9. 13. 접수)

<요 약>

균열이 있는 원공을 가진 유한평판이 균일응력을 받을 때 균열길이가 응력확대계수와 응력, 변위에 미치는 영향을 연구하였다. 계산방법은 Bowie에 의해 소개된 Modified Mapping Collocation Method를 사용하였다. 평판의 높이와 폭의 비는 1로 고정하였고 균열길이와 폭의 비는 0.3부터 0.7까지 변화시켰다. 그 결과 균열길이가 증가함에 따라 응력확대수정계수가 증가하였으며 응력과 변위도 큰 변화를 보였다. 또 원공의 반경이 증가할수록, 평판 높이와 폭의 비가 감소할수록 응력확대수정계수가 증가함을 알 수 있었다.

Analysis of a Crack Emanating from a Circular Hole of a Finite Sheet under Uniform Stress Boundary Condition

Yum, Young-Jin
Dept. of Mechanical Engineering
(Received September 13, 1985)

<Abstract>

The effect of a crack length on the stress intensity factor, stress and displacement distributions has been studied for a finite sheet having a cracked circular hole under a uniform stress boundary condition.

The computation was accomplished using MMC(Modified Mapping Collocation) method introduced by Bowie. Height-to-width ratio was fixed to 1 and crack length-to-width ratio varied from 0.3 to 0.7. As crack length increased, stress intensity factor increased and the stress and displacement distribution varied remarkably.

As the radius of the hole increased and height-to-width ratio decreased, stress intensity factor increased.

I. 서 론

많은 구조물이 원공에서부터 발생, 전파되는 균열에 의해 파괴가 되고 있다.

이러한 파괴를 막기 위해서는 균열 주위의 응력과 변위분포를 정확히 알 필요가 있다.

균열문제의 해석방법에는 여러가지가 있으나 그

중에 Muskhelishvili⁽¹⁾의 복소수 이론에 의해 파괴역학에 많은 진전이 있어왔다. Bowie 등은^{(2),(3)} 복소수이론에 등각사상과 Analytic Continuation을 적용하여 균열면에서의 무하중 조건을 만족시켜주는 응력함수의 형태를 선정하고 그 이외의 경계부분에는 Least Square Collocation을 사용하여 응력함수를 결정하는 Modified Mapping Collocation(MMC)방법을 제시하고 복잡한 형상을 갖는 균열문제를

풀었다. 본 논문에서는 균열이 있는 원공을 갖는 유한평판이 균일응력을 받을 때 균열길이에 따라 응력확대계수와 응력, 변위분포가 어떻게 달라지는가를 MMC 방법으로 해석하였다.

II. 이 론

1. 복소변수 표시

등방체의 이차원 문제에 필요한 기본식을 문헌⁽¹⁾에 따라 간단히 설명하고자 한다.

Airy 응력함수는 다음과 같이 표현된다.

$$U(x, y) = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \int \Psi(z) dz] \quad (1)$$

응력과 변위도 복소응력함수 $\phi(z)$ 와 $\Psi(z)$ 로 표시될 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] = 4\text{Re}[\phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \Psi'(z)] \\ 2\mu(u + iv) &= k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기서 $k=3-4\nu$ (평면변형시)
 $(3-\nu)/(1+\nu)$ (평면응력시)

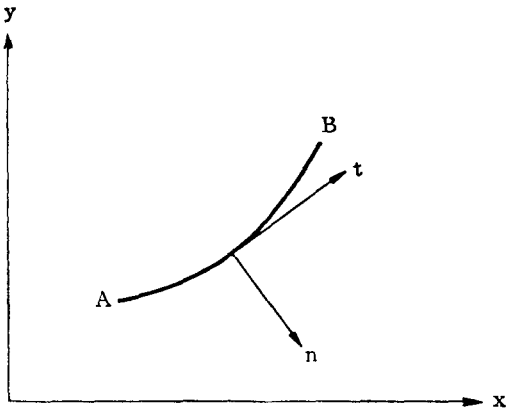
경계조건이 응력으로 주어지는 면에서는 그 면에 대한 합력식을 이용하는 것이 편리하다. 그림(1)에서 $X_n ds$ 와 $Y_n ds$ 를 각각 미소요소에 작용하는 수평, 수직힘이라고 하면

$$(X_n + iY_n) ds = -id\{\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\} \quad (3)$$

이 된다.

그러므로

$$\begin{aligned} \phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} &= i \int^s (X_n + iY_n) ds + C \\ &= f_1(s) + if_2(s) \end{aligned} \quad (4)$$



(그림 1) 합력식에서의 좌표

가 되고 AB가 경계면이면서 그 면에서의 응력을 알 때 $f_1(s) + if_2(s)$ 를 구할 수 있다.

좌표계 원점에 대한 모멘트를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{AB} (xY_n - yX_n) ds \\ &= \text{Re}\{\chi(z) - z\Psi(z) - z\bar{z}\phi'(z)\}_{AB} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\chi'(z) = \Psi(z)$ 이다.

2. MMC

사상을 통하여 균열면에서의 무하중 조건을 만족시키는 과정을 설명하고자 한다.

다음의 간단한 사상함수를 생각해보자.

$$z = \omega(\zeta) = \frac{L}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \quad (6)$$

이 사상함수는 단위원 $|\zeta| = 1$ 과 그 외부를 실수축상의 $Z = -L$ 에서 $Z = L$ 까지의 선분과 그 외부로 사상시키는 함수이다.

응력과 변위를 ζ 평면에서 표시하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 4\text{Re}[\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{\omega(\zeta)}\{\phi''(\zeta)/\omega'(\zeta)\} + \Psi''(\zeta)]/\omega'(\zeta) \\ 2\mu(u + iv) &= k\phi(\zeta) - \omega(\zeta)\overline{\phi'(\zeta)}/\omega'(\zeta) - \overline{\Psi(\zeta)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

경계면에서의 합력식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) + \omega(\zeta)\overline{\phi'(\zeta)}/\omega'(\zeta) + \overline{\Psi(\zeta)} &= i \int^s (X_n + iY_n) ds + C \\ &= f_1(s) + if_2(s) \end{aligned} \quad (8)$$

Analytic Continuation⁽¹⁾에 대해 생각해보자.

S_1^- 는 $y < 0$ 에서 정의되고 S_1^+ 는 $y > 0$ 에서 정의되는 구역일 때 탄성체가 S_1^- 를 점유하고 있다고 가정하고 $\phi(z)$ 가 S_1^+ 에서 다음과 같이 정의된다고 가정하자.

$$\phi(z) = -z\overline{\phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \quad z \in S_1^+ \quad (9)$$

그러면

$$\Psi(z) = -\overline{\phi(z)} - z\phi'(z) \quad z \in S_1^- \quad (10)$$

로 표시되고

$$\phi(z) - \phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\phi'(\bar{z})} = f_1(s) + if_2(s) \quad (11)$$

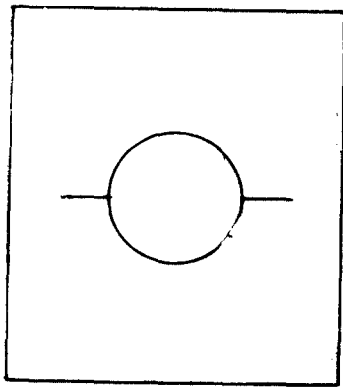
가 된다.

이 식은 $z = x$ 에서

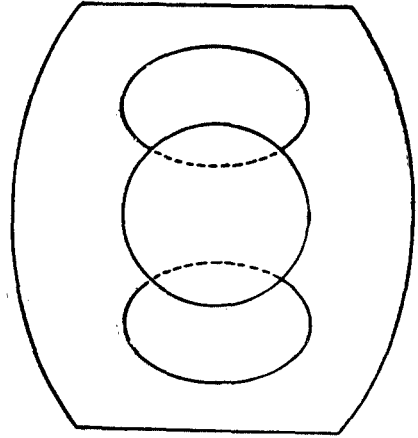
$$\phi^-(x) - \phi^+(x) = f_1(x) + if_2(x) \quad (12)$$

가 된다. 여기서 $\phi^-(x)$ $\phi^+(x)$ 는 S_1^+ , S_1^- 에서의 $\phi(x)$ 값을 나타낸다.

무하중 실수축에서는



Z-평면



ζ-평면

(그림 2) 실제평면과 사상평면

$$\phi^-(x) - \phi^+(x) = 0 \quad x \in S_1 \quad (13)$$

가 되므로 $\phi(z)$ 는 $z \in S_1$ 에서 Analytic하다.

ζ평면에서의 Analytic Continuation을 생각해 보기로 한다.

단위원의 외부 S_2^- 를 탄성체로 등각사상한다고 하면 단위원상의 점들은 실제 영역의 경계로 사상된다.

$\phi(\zeta)$ 는 다음 정의에 의해 단위원 내부로 확장될 수 있다.

$$\begin{cases} \phi(\zeta) = -\omega(\zeta)\bar{\phi}'(1/\zeta)/\omega'(1/\zeta) - \Psi(1/\zeta) & \zeta \in S_1^+ \\ \Psi(\zeta) = -\bar{\phi}(1/\zeta) - \bar{\omega}(1/\zeta)\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta) & \zeta \in S_2^- \end{cases} \quad (14)$$

합력식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \phi^-(\sigma) - \phi^+(\sigma) + [\omega^-(\sigma) - \omega^+(\sigma)]\bar{\phi}'(\sigma)/ \\ \bar{\omega}'(\sigma) = f_1(s) + if_2(s) \end{aligned} \quad (15)$$

사상함수 $\omega(\zeta)$ 가 단위원 $\zeta = \sigma$ 상에서 연속이라면 (15)식이 다음과 같이 된다.

$$\phi^-(\sigma) - \phi^+(\sigma) = f_1(s) + if_2(s) \quad (16)$$

3. 응력함수와 응력확대계수의 결정

유한평판에 균열이 있는 원공이 있을 때 응력함수는 다음과 같이 취할 수 있다.

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta(\zeta^2+1)^{-n} \quad (17)$$

실제 계산에서는 무한급수를 유한개만큼 취하여 사용한다.

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^N a_n \zeta^{2n+1} + \sum_{n=1}^{MN} b_n \zeta(\zeta^2+1)^{-n} \quad (18)$$

응력과 변위, 합력을 a_n 과 b_n 으로 표시하고 Least Square Collocation을 적용하면 a_n, b_n 이 구해지고 응력과 변위분포를 알 수 있다.

응력확대계수는 문헌(4)에 다음과 같이 주어진다.

$$K_1 = 2\sqrt{2} \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)^{\frac{1}{2}} \phi'(z) \quad (19)$$

여기서 z_1 은 균열첨단의 좌표이고 응력확대계수를 매개평면상에서 정의하면 다음과 같이 된다.

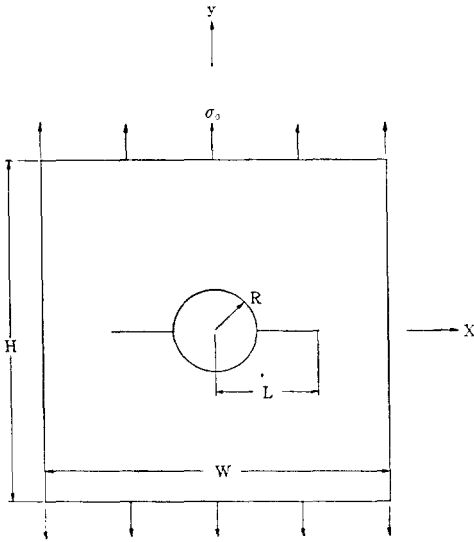
$$\begin{aligned} K_1 = 2\sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_1)]^{\frac{1}{2}} \phi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \\ = 2\phi'(\sigma_1)/[\omega''(\sigma_1)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 σ_1 은 균열첨단에 대한 단위원상의 점이다.

응력확대계수는 다음과 같이 응력확대수정계수로 나타내는 것이 편리하다.

$$\begin{aligned} K_1 &= \sigma_0 F \sqrt{L} \\ F &= K_1 / \sigma_0 \sqrt{L} \\ &= \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{L}} \frac{\phi'(\sigma_1)}{[\omega''(\sigma_1)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (21)$$

L 은 균열길이의 반, σ_0 은 경계에서 주어지는 균일응력의 크기이고 F 는 응력확대수정계수(Stress Intensity Correction Factor)로서 평판의 유한성과 균열길이가 응력확대계수에 미치는 영향을 나타낸다.



(그림 3) 평판의 기하학적 형상

4. 경계조건의 적용

그림(3)으로 부터 경계조건이 다음과 같이됨을 알 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \tau_{xy} = 0 & \quad x = \frac{W}{2} \quad 0 \leq y \leq \frac{H}{2} \\ \sigma_y = \sigma_0, \tau_{xy} = 0 & \quad 0 \leq x \leq \frac{W}{2} \quad y = \frac{H}{2} \\ \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 & \quad \text{원공면을 따라서} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

균열면과 원공주위에서의 적분상수는 0이되고 바깥경계면에서의 적분상수는 균일응력과 폭의 곱과 같다는 것을 알 수 있다. 즉 $C = \sigma_0 \times \frac{W}{2}$ 가 된다.

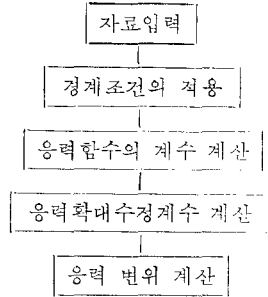
Ⅲ. 수치해석 및 고찰

1. 계산과정

전산기해산의 흐름도는 다음과 같다.

평판의 폭과 높이의 비는 1로 고정하였고 평판이 x, y 축에 대해 대칭이므로 전체의 1/4만 고려하였다.

유한급수의 갯수 $M=N=MN=10$ 개로 취하였고 원공주위의 Collocation Point는 3°간격, 경계면에서의 Collocation Point의 간격은 1/20로 하였다. 원공의 지름은 평판폭의 1/4로 고정하였고 균열길이는 $2L/W = 0.3$ 부터 0.7까지 변화시켰다. 경계면



$y = \frac{H}{2}$ 에서 주어지는 균일응력 σ_0 의 크기는 1로 취하였다.

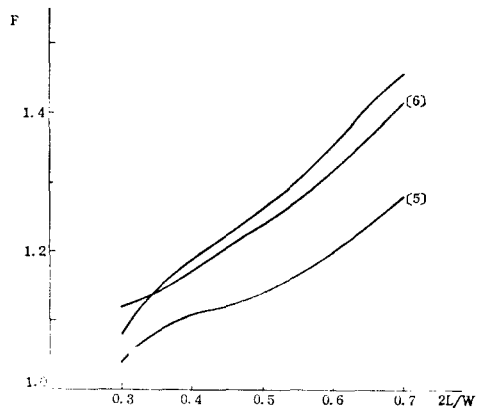
2. 결과 및 고찰

표 (1)과 그림 (4)에서 나타나듯이 H/W 가 작을수록 또 원공의 반경이 커질수록 응력확대수정계수가 커지는 것을 알 수 있다.

$y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 분포는 그림 (5)에 나타나 있는데 중앙에서의 커다란 변위로 인하여 x 방향의 인장 응력이 발생하고 그 크기는 균열길이와 더불어 증가

표 1. 평판의 기하학적 형상에 따른 응력확대 수정계수

$\frac{2L}{W} \backslash \frac{2R}{W}$		$\frac{2L}{W}$					
		0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	
$\frac{H}{W}$	1	0.25	1.16	1.38	1.53	1.71	1.92
	ϵ_1	0.2	1.24	1.35	1.48	1.64	1.84
	ϵ_2	0.25	1.08	1.22	1.28	1.40	1.57

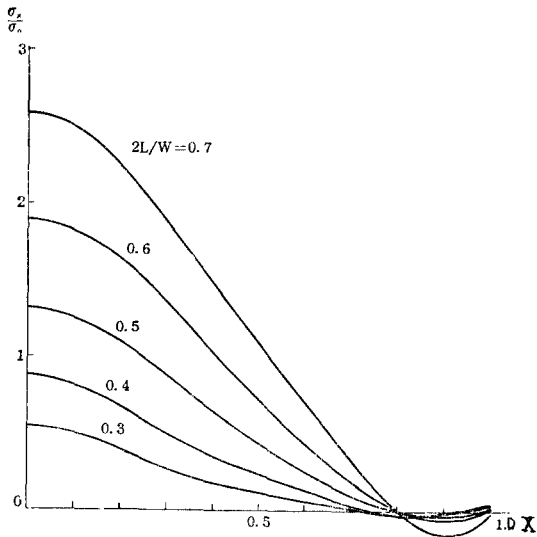


(그림 4) 응력확대 수정계수

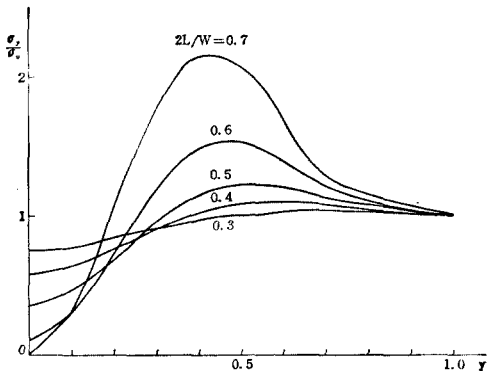
하여 $2L/W=0.7$ 인 경우 균일응력 σ_0 의 2.6배까지 됨을 알 수 있다.

$x = \frac{W}{2}$ 에서의 σ_x 분포는(그림 (6)) 균열이 작을 경우 주어진 응력 σ_0 와 거의 비슷한 크기를 갖지만 균열이 커질수록 변화가 심해짐을 알 수 있다.

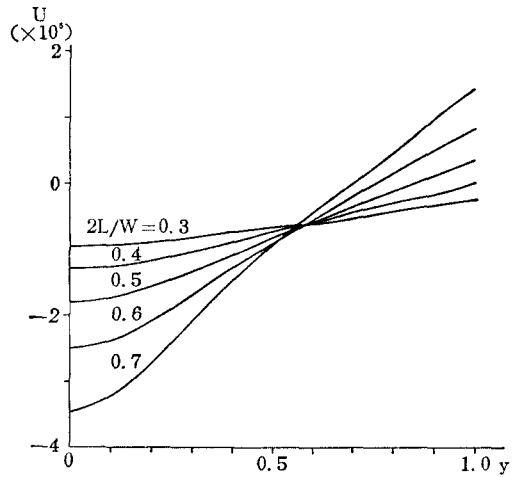
$x = \frac{W}{2}$ 에서의 x 방향 변위는 그림(7)에 보듯이 평판이 y 방향의 인장응력만 받음에도 불구하고, 균열 길이 $2L/W$ 가 0.4보다 큰 경우에는 평판 상하단의 폭이 오히려 늘어나는 현상이 생기는데 이는 평판 상하단 중앙부에서 x 방향 인장응력값이 크기 때문으로 생각된다.



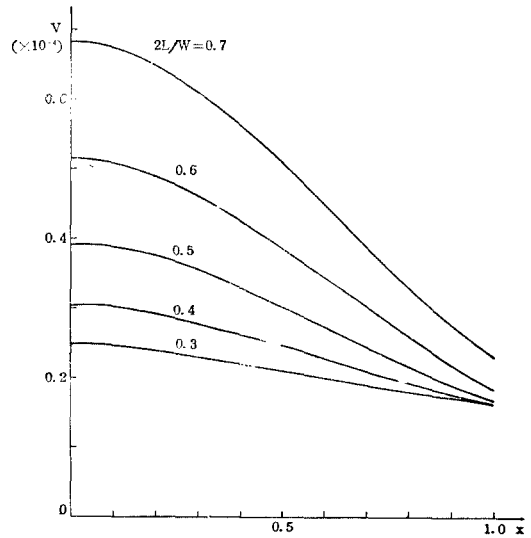
(그림 5) $y = \frac{H}{2}$ 에서의 σ_x 분포



(그림 6) $x = \frac{W}{2}$ 에서의 σ_x 분포



(그림 7) $x = \frac{W}{2}$ 에서의 x 방향 변위



(그림 8) $y = \frac{H}{2}$ 에서 y 방향 변위

IV. 결 론

1. 유한평판의 높이와 폭의 비가 작을수록 응력 확대수정계수는 증가한다.
2. 유한평판내의 원공의 크기가 커질수록 응력 확대수정계수는 증가한다.
3. $y = \frac{H}{2}$ 에서 σ_x 값은 균열이 커질수록 변화가 심해지고 $2L/W=0.7$ 일 때 그 값은 균일응력 σ_0 의 2.6배까지 증가한다.

4. $x = \frac{W}{2}$ 에서의 σ , 값은 균열이 클수록 심한 변화를 보인다. .
5. 균열길이 $2L/W$ 가 0.4이상인 경우 평판 상하단의 폭이 넓어진다.

참 고 문 헌

1. N. I. Muskhelishvili: Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity P. Noordhoff, Groningen (1963)
2. O. L. Bowie and D. M. Neal: Int. J. of Fracture Mech. 62 pp.199~206 (1970)
3. O. L. Bowie and C. E. Freese: Int. J. of Fracture Mech. Vol. 8. No. 1. pp.49~58. (1972)
4. G. C. Sih, P. C. Paris and F. Erdogan: J. of Appl. Mech. Vol. 29, pp.306~312 (1962)
5. G. C. Sih: Mechanics of Fracture I. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems Noordhoff Int. Publishing, Leyden pp.1~55. (1973).
6. H. H. Lee: M.S. Thesis, KAIST (1981).