

Force Balance Method에 의해求한上界解에關한研究

金 鎮 武

機 械 工 學 科

(1985. 9. 25 접수)

〈要 約〉

平面變形加工에서 force balance method에 의해求한上界解와 動的容速度場으로부터求한上界解를相互比較檢討하였다. 그結果幾何學的으로變形 model이同一한 경우 2가지方法으로求한上界解들은 같은結果를 얻었다.

本論文에는 notch가 있는棒의塑性굽힘, 密閉型鍛造, 四角形 block의壓縮等에關한上界解를求해서 2가지方法으로求한上界解가同一함을 밝혔다.

A Study on the Upper-Bound Solutions by Force Balance Method

Kim, Jin-Moo

Dept. of Mechanical Engineering

(Recived September 25, 1985)

〈Abstract〉

Two upper bound solutions, by the force balance method and by kinematically admissible velocity field, are compared for the metal forming problems in plane strain. It is concluded that these two approaches always give identical results when the geometrical configuration of the deforming model remains the same. By detailed derivations for plastic bending of a notched bar, closed die forging and compression of a rectangular block, the identity of both appaches is verified.

I. 論 序

金屬을 成形加工할 때 決定해야할 重要한 것 中의 하나는 素材를 變形시켜서 願하는 形狀으로 만드는 데 要하는 外力을 求하는 것이다. 그러나 外力을 正確히 求하는 것이 어려운 경우가 많다. 그래서 適當한 假定을 하여 外力을 近似的으로 求하는 여러가지 方法들이 提案되어 있다.

Westwood와 Wallace⁽¹⁾는 上界解를 求하는 方法으로 force balance method를 導入하여 die와 素材사이에 Coulomb 摩擦이 作用한다는 假定下에

여러가지 成形加工問題에 對하여 上界解를 求했다. 그리고 그들은 摩擦이 作用하지 않는 경우 同一한 變形 model에 對하여 動的容速度場에서 求한 上界解와 force balance method에 依해서 求한 上界解를 相互比較하여 2가지 方法에 依한 解析의 結果가 同一함을 立證하였다. 最近 B. Avitzur와 J.C. Choi⁽²⁾ B. Avitzur, J.C. Choi와 B.M. Kim⁽³⁾ 등이 die와 素材사이에 一定한 摩擦力이 作用한다고 假定하여 金屬成形加工問題를 force balance method에 依하여 上界解를 求한 研究가 있다. 著者は 그 以外의 平面變形加工問題에 對하여 亦是 die와 素材사이에 一定한 摩擦力이 作用한다

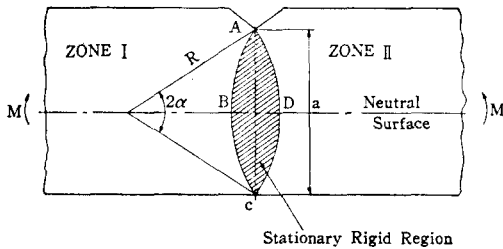
는 假定下에 動的 可容速度場에서 求한 上界解가 同一한 變形 model을 使用하여 force balance method에 依해서 求한 上界解와 同一한 結果를 얻었다.

本 論文에서는 notch가 있는 棒의 塑性 굽힘, 密閉 型 鍛造, 4角形 block의 壓縮等의 成形加工問題에 對하여 2가지 接近法으로 求한 上界解들을 相互 比較하여 同一함을 밝혔다.

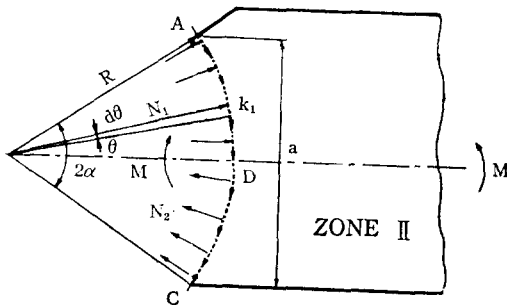
II. 本 論

1. Notch가 있는 棒의 塑性 굽힘

單一 notch가 있는 Fig. 1(a)에 나타낸 棒이 初期降伏이 일어나도록 순수 굽힘 moment를 作用한다. 棒의 最小두께는 a이고 棒의 幅이 크므로 棒은 平面變形狀態로 굽혀지고 있다. 棒의 剛性領域 I과 II는 靜止된 剛性領域 ABCDA의 周圍를 角速



a) Pattern of velocity discontinuities.



b) Force balance: one half of complete pattern.

Fig. 1. Plane strain bending of a notched bar.

度 w 로 廻轉하며 ABC와 ADC인 2個의 圓弧를 따라서 材料는 剪斷에 依하여 降伏이 일어난다는 假定下에 求한 上界解가 參考文獻(4)에 실려있다. fo-

orce balance method에 依해서 上界解를 求할 때에도 Fig. 1(b)와 같이 同一한 變形 model을 使用한다. Fig. 1(b)에서 圓弧 ADC에는 剪斷應力과 垂直應力이 各各 作用한다. 領域 II에서 D點을 지나고 紙面에 垂直한 軸에 關한 moment 합과 水平 및 垂直한 分力들의 合은 各各 0이다. 그래서

$$M - \int_0^\alpha N_1 R^2 \sin\theta d\theta - \int_0^\alpha N_2 R^2 \sin\theta d\theta - 2 \int_0^\alpha k_1 R^2 (1 - \cos\theta) d\theta = 0 \quad (1)$$

$$\int_0^\alpha N_1 R \cos\theta d\theta - \int_0^\alpha N_2 R \cos\theta d\theta + \int_0^\alpha k_1 R \sin\theta d\theta - \int_0^\alpha k_1 R \sin\theta d\theta = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^\alpha N_1 R \sin\theta d\theta + \int_0^\alpha N_2 R \sin\theta d\theta - 2 \int_0^\alpha k_1 R \cos\theta d\theta = 0 \quad (3)$$

여기서 圓弧 ADC의 曲率半徑은 R이고 中心角은 2α 이다. 式(2)를 풀면 $N_1 = N_2$ 로 되고 이 關係式을 式(3)에 代入하면

$$N_1 = N_2 = \frac{k_1 \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} \quad (4)$$

를 얻는다. 式(4)를 式(1)에 代入하면 M은 다음式으로 주어진다.

$$M = 2k_1 R^2 \alpha \quad (5)$$

幾何學的인 關係로 부터 $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ 이고 이 式을 式(5)에 代入하면

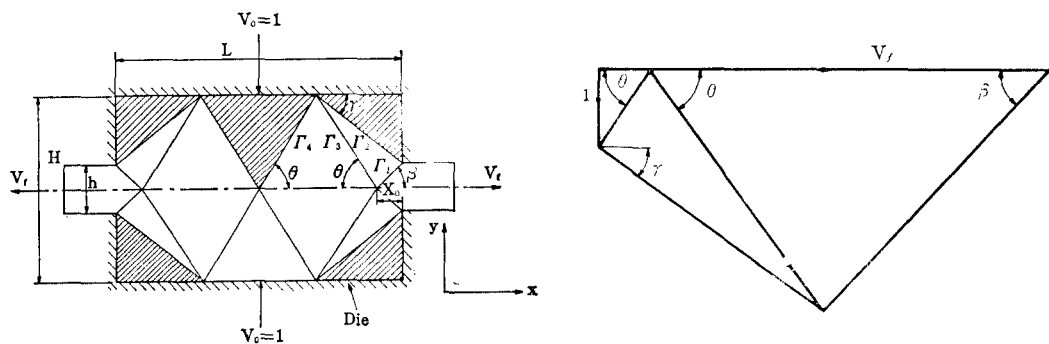
$$M = \frac{k_1 a^2 \alpha}{2\sin^2\alpha} \quad (k_1 = k: \text{순수 항복 전단 응력}) \quad (6)$$

으로 된다. 式(6)은 動的 可容速度場으로부터 誘導된 參考文獻(4)의 上界解와 同一한 式이다.

2. 密閉 型 鍛造

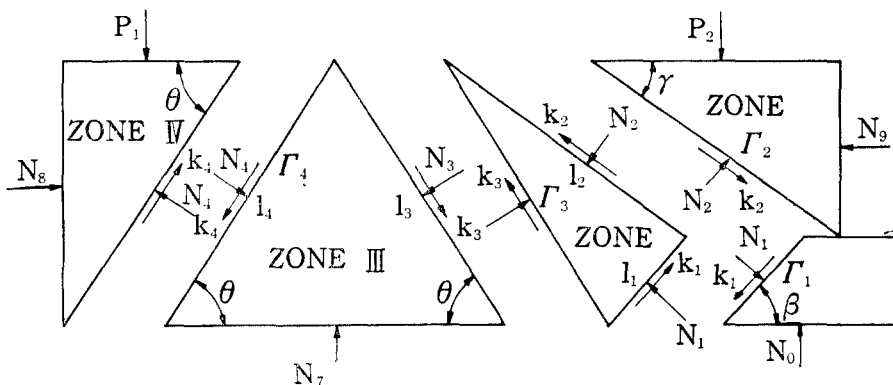
Fig. 2(a)는 四角形 block의 鍛造를 나타낸 것으로 길이 L인 한 雙의 die가 垂直方向으로 相對速度 2로 相互 壓縮하여 四角形 block을 側方向으로 밀어내고 있다. 빗금친 部分은 dead metal zone이다. Fig. 2(a)와 2(b)인 變形 model과 hodograph(4)를 使用하여 密閉 型 鍛造에 關하여 W. Johnson이 上界解를 求했다. 그 上界解는 다음式과 같이 求해진다.

$$D = \frac{2k}{L} \left[-\frac{H}{2\sin^2\theta} + \frac{H\sin(\theta+\gamma)}{2\sin^2\theta\sin(\theta-\gamma)} + \frac{(H-h)\cos\theta}{\sin\gamma\sin(\theta-\gamma)} + \frac{h\sin(\theta+\gamma)}{2\sin^2\theta\sin(\theta-\gamma)} \right]$$

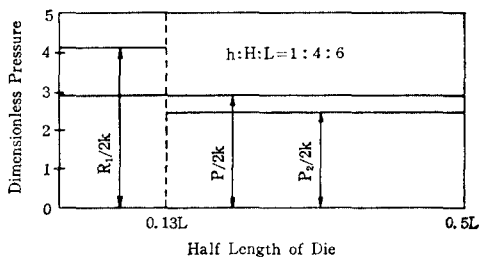


a) Pattern of velocity discontinuities.

b) Hodograph for a): one quarter of complete pattern.



c) Force balance: one quarter of complete pattern.



d) Comparison of P_1 and P_2 with P

Fig. 2. Closed die forging of a rectangular bar

$$= \frac{2k}{L \sin(\theta - \gamma)} \left[\frac{h \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \beta} + \frac{(H-h) \cos \theta}{\sin \gamma} + \frac{H \cos \gamma}{\sin \theta} \right] \quad (7)$$

同一한 變形 model 을 Fig. 2(c)와 같이 force balance method 에 의한 上界解를 求하기 爲하여 擇한다. 剛性領域 I 에서 水平分力의 合은 0이다.

그래서

$$N_1 l_1 \sin \beta - k_1 l_1 \cos \beta = 0 \quad (8)$$

여기서 $l_1 = h / (2 \sin \beta)$ 이다. 式(8)로 부터

$$N_1 = k_1 \cot \beta \quad (9)$$

로 된다. 領域 II에서 垂直 및 水平分力의 合은 0이다.

$$N_1 l_1 \cos \beta + k_1 l_1 \sin \beta - N_2 l_2 \cos \gamma + k_2 l_2 \sin \gamma + N_3 l_3 \cos \theta + k_3 l_3 \sin \theta = 0 \quad (10)$$

$$-N_1 l_1 \sin \beta + k_1 l_1 \cos \beta - N_2 l_2 \sin \gamma - k_2 l_2 \cos \gamma + N_3 l_3 \sin \theta - k_3 l_3 \cos \theta = 0 \quad (11)$$

여기서 $l_2 = (H-h)/(2 \sin \gamma)$ 이고 $l_3 = H/(2 \sin \theta)$ 이다. 式(9)을 式(10)과 (11)에 代入하고 2個의 式으로부터 N_2 와 N_3 를 求하면

$$N_2 = \left[k_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right) \frac{\sin \theta}{\sin \beta} + k_2 \cos(\theta - \gamma) + k_3 \left(\frac{l_3}{l_2} \right) \right] / \sin(\theta - \gamma) \quad (12)$$

$$N_3 = \left[k_1 \left(\frac{l_1}{l_3} \right) \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + k_2 \left(\frac{l_2}{l_3} \right) + k_3 \cos(\theta - \gamma) \right] / \sin(\theta - \gamma) \quad (13)$$

로 된다. 剛性領域 III, IV 및 V에서 힘의 平衡方程은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0, \quad (\text{領域 III}) \\ -N_3 l_3 \sin \theta + k_3 l_3 \cos \theta + N_4 l_4 \sin \theta - k_4 l_4 \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0, \quad (\text{領域 IV}) \\ N_4 l_4 \cos \theta + k_4 l_4 \sin \theta - P_1 H \cot \theta &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \quad (\text{領域 V}) \\ N_2 l_2 \cos \gamma - k_2 l_2 \sin \gamma - P_2 (H-h) \cot \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $l_4 = H/(2 \sin \theta)$ 이고 P_1 과 P_2 는 各各 領域 IV 와 領域 V 의 die 위에 均一하게 作用하는 壓力이다. 式(13)을 式(14)에 代入하여 N_4 를 求하면

$$N_4 = \left[k_1 \frac{l_1}{l_3} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + k_2 \frac{l_2}{l_3} + k_3 \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} + k_4 \cot \theta \sin(\theta - \gamma) \right] / \sin(\theta - \gamma) \quad (17)$$

로 된다. 式(17)을 式(15)에 代入하고 式(12)를 式(16)에 代入하여 P_1 과 P_2 를 求하면

$$P_1 = \frac{\sin \theta}{H \sin(\theta - \gamma)} \left[k_1 l_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + k_2 l_2 + k_3 l_3 \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} + k_4 l_4 \frac{2 \sin(\theta - \gamma)}{\sin 2\theta} \right] \quad (18)$$

$$P_2 = \frac{\sin \gamma}{(H-h) \sin(\theta - \gamma)} \left[k_1 l_1 \frac{\sin \theta}{\sin \beta} + k_2 l_2 \frac{\cos \theta}{\cot \gamma} + k_3 l_3 \right] \quad (19)$$

로 된다. die 위에 作用하는 平均壓力 P 는 式(18)과 式(19)로부터

$$\begin{aligned} P &= [P_1 H \cot \theta + P_2 (H-h) \cot \gamma] / \left(\frac{L}{2} \right) \\ &= \frac{2}{L \sin(\theta - \gamma)} \left[\frac{k_1 h \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \beta} + \frac{k_2 (H-h) \cos \theta}{\sin \gamma} + \frac{k_3 H \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \theta} + \frac{k_4 H \sin(\theta - \gamma)}{2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

로 얻어진다. 非硬化性材料에 對해서는 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ 이므로 式(20)은 式(21)로 된다.

$$P = \frac{2}{L \sin(\theta - \gamma)} \left[\frac{h \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \beta} + \frac{(H-h) \cos \theta}{\sin \gamma} + \frac{H \cos \gamma}{\sin \theta} \right] \quad (21)$$

式(21)은 同一한 變形 model 을 使用해서 動的 可容速度場으로부터 求한 上界解인 式(7)과 같다.

式(21)에 角變數에 幾何學的 關係式을 代入하면 式(22)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{P}{2k} &= \frac{1}{4hL[(2H-h)X_0 + hL]} \left\{ 2(4X_0^2 + h^2)[2hX_0 + L(2H-h)] + h(L-2X_0)[(L+2X_0)^2 + 4(H-h)^2] + h(L+2X_0)[(L-2X_0)^2 + 4H^2] \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

die에 作用하는 壓力 P 를 最小로 하는 X_0 의 最適值 $(X_0)_{opt}$ 는 $\frac{\partial}{\partial X_0} \left(\frac{P}{2k} \right) = 0$ 에서

$$(X_0)_{opt} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \frac{\lambda}{3} \quad (23)$$

로 얻는다. 여기서

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2),$$

$$b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r),$$

$$p = \frac{L(4H^2 - 6hH + 5h^2)}{4h(2H-h)},$$

$$q = \frac{L^2(H-h)}{2(2H-h)},$$

$$r = \frac{L(8hH^2 + hL^2 - 2HL^2 - 8H^3)}{16(2H-h)}$$

$$\text{및 } \cos \lambda = \left(-\frac{b}{2} \right) / \sqrt{-\frac{a^3}{27}}$$

이다. 例로 $h:H:L=1:4:6$ 일 때 $(X_0)_{opt}=1.44h$ 이고 이 값을 式(22), (18) 및 (19)에 代入하면

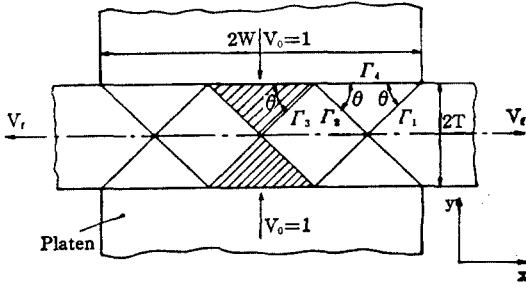
$$P/2k \approx 2.94, \quad P_1/2k \approx 4.16, \quad P_2/2k \approx 2.50$$

을 얻는다. Fig. 2(d)에 P_1 과 P_2 값을 P 값과 比較하여 表示했다. 動的 可容速度場으로부터 求한 上界解는 die에 作用하는 壓力 P 만 얻어지지만 force balance method에 依하면 P 以外에 局部

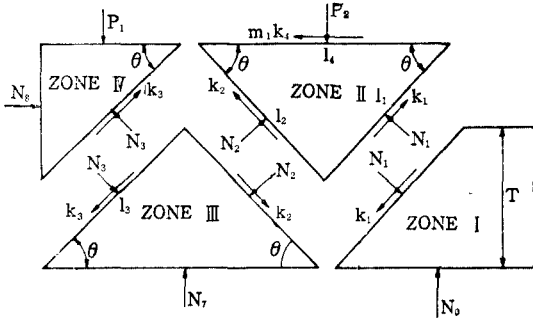
的으로 die 위에 作用하는 壓力 P_1 과 P_2 도 求할수 있다는 利點이 있다.

3. 四角形 block 의 壓縮

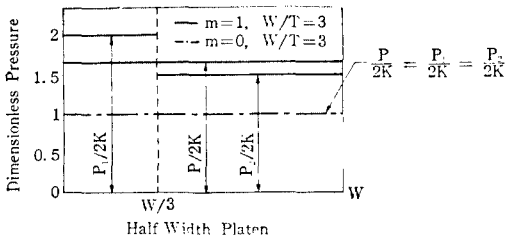
Fig. 3(a)는 두께가 $2T$ 인 四角形 block 을 幅이 $2W$ 인 punch 로 壓縮하는 것을 나타낸 것이다. punch 의 양쪽 側面으로 突出되어 나온 部分은 剛體로 假定하고 빚금친 部分은 dead metal zone 이다. 素材内部의 交叉線들은 速度不連續線들로서



a) Pattern of velocity discontinuities.



b) Force balance: one quarter of complete pattern.



c) Comparison of P_1 and P_2 with P .
Fig. 3. Compression of a rectangular section block.

punch 와 共히 2θ 의 角을 이루고 있다. punch 와 素材사이에 一定한 摩擦力이 作用한다는 假定下에 動的의 可容速度場으로 부터 上界解를 求하면 다음과 같다.

$$P = 2k \left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{2}{3} m_1 \cot\theta \right) \quad (24)$$

Fig. 3(b)는 force balance method 에 依한 上界解를 求하기 爲하여 式(24)의 上界解를 求할 때 使用한 것과 同一한 變形 model 이다. 剛性領域 I 에서 水平分力의 合은 0이므로

$$N_1 l_1 \sin\theta - k_1 l_1 \cos\theta = 0 \quad (25)$$

로 되고 式(25)에서 N_1 을 求하면

$$N_1 = k_1 \cot\theta \quad (26)$$

로 된다. 여기서 $l_1 = \frac{W}{3} \sec\theta$ 이다. 平面 Γ_4 위에 一定한 摩擦力이 作用한다고 假定하면 領域 II에서 힘의 平衡方程式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ N_1 l_1 \cos\theta + k_1 l_1 \sin\theta + N_2 l_2 \cos\theta + k_2 l_2 \sin\theta \\ - P_2 l_4 &= 0 \quad m_1: \text{friction factor} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ -N_1 l_1 \sin\theta + k_1 l_1 \cos\theta + N_2 l_2 \sin\theta - k_2 l_2 \cos\theta \\ - m_1 k_1 l_4 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 $l_2 = \frac{W}{3} \sec\theta$, $l_4 = \frac{2W}{3}$, 및 P_2 는 平面 Γ_4 위에 作用하는 壓力이다. 式(26)을 式(28)에 代入하여 풀면 N_2 는

$$N_2 = (k_2 + 2m_1 k_1) \cot\theta \quad (29)$$

로 얻고 式(26)과 (29)를 式(27)에 代入하여 P_2 를 求하면

$$P_2 = \frac{k_1 + k_2}{\sin 2\theta} + m_1 k_1 \cot\theta \quad (30)$$

로 된다. 剛性領域 III과 IV에서 힘의 平衡方程式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \quad (\text{領域 III}) \\ -N_2 l_2 \sin\theta + k_2 l_2 \cos\theta + N_3 l_3 \sin\theta \\ - k_3 l_3 \cos\theta &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \quad (\text{領域 IV}) \\ N_3 l_3 \cos\theta + k_3 l_3 \sin\theta - P_1 \frac{W}{3} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 $l_3 = \frac{W}{3} \sec\theta$ 이고 P_1 은 dead metal zone 위에 作用하는 壓力이다. 式(29)를 式(31)에 代入하여 N_3 를 구하면

$$N_3 = (k_3 + 2m_1 k_1) \cot\theta \quad (33)$$

로 된다. 式(33)을 式(32)에 代入하여 P_1 을 求하면

$$P_1 = \frac{2k_3}{\sin 2\theta} + 2m_1 k_4 \cot \theta \quad (34)$$

로 주어진다. punch 위에 작용하는 평균壓力 P 는 식(30)과 (34)를 利用하여 다음 式으로 얻어진다.

$$P = \left(\frac{2(k_1 + k_2 + k_3)}{3\sin 2\theta} + \frac{4}{3} m_1 k_4 \cot \theta \right) \quad (35)$$

非硬化性材料인 경우는 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ 이므로 식(35)는 式(36)으로 된다.

$$P = 2k \left(\frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{2}{3} m_1 \cot \theta \right) \quad (36)$$

式(36)은 punch 와 素材사이에 一定한 摩擦력이 作用한다는 假定下에 動的 可容速度場으로 부터 求한 上界解인 式(24)와 같다. 摩擦력이 作用하지 않는다고 하면 式(36)은

$$P = \frac{2k}{\sin 2\theta} \quad (37)$$

로 되고 式(37)은 參考文獻⁽⁵⁾에 실려있는 上界解와 같다.

式(36)에 $T = (W \tan \theta) / 3$ 인 關係를 代入하여 無次元平均壓力($P/2k$)을 求하면

$$\frac{P}{2k} = \frac{1}{2} \left[\frac{r}{9} (3 + 4m_1) + \frac{3}{r} \right] \quad (38)$$

로 되고 여기서 $r = W/T$ 이다. 例로 $r = 3$ 일 때 P , P_1 및 P_2 를 求해보면 Table 1의 값과 같다.

Table 1 P , P_1 및 P_2 의 값

m_1	0	0.5	1
$P/2k$	1	1.33	1.67
$P_1/2k$	1	1.50	2.0
$P_2/2k$	1	1.25	1.50

Fig. 3(c)는 P_1 과 P_2 의 값을 P 의 값과 比較하여 表示한 것이다.

III. 結 論

本 論文에는 notch 가 있는 棒의 塑性균형, 密閉型鍛造, 四角形 block 의 壓縮, 等 平面變形 成形加工問題에서 一定한 摩擦力이 die 와 素材 또는 punch 와 素材사이에 作用한다는 假定下에 force balance method 에 依해 求한 上界解가 同一한 變形 model 에 對해 動的 可容速度場에서 求한 上界解와 同一함을 밝혔다. force balance method 에 依해 上界解를 求하는 方法은 基礎的인 塑性에 關한 知識을 必要로 하고, die 또는 punch 위에 作用하는 平均壓力 以外에 局部的인 壓力도 얻어진다는 利點이 있다.

參 考 文 獻

- (1) D. Westwood, J.F. Wallace, "Upper Bound Values for the Loads on a Rigid-Plastic Body in Plane Strain," J. of Mechanical Engineering Science, Vol. 2, No. 3, 1960, pp.178~187.
- (2) B. Avitz, J.C. Choi, "Compatibility of the Upper Bound Approach and the Balance of Forces for the Treatment of Metal Forming Processes," Journal of Mechanical working Technology 0378-3804/86.
- (3) B. Avitzur, J.C. Choi and B.M. Kim, "Upper Bound Solutions for Several Metal Forming Processes," to be published in NAMRC XIV Conference Proceeding (1986, May).
- (4) W. Johnson, P.B. Mellor, 1978, "Engineering, Plasticity," pp.422~423, pp.432~440, Van Nostrand Reinhold Company, London.
- (5) R.A.C. Slater, 1977, "Engineering Plasticity," pp.365~366, Macmillan Press, London.