UOU Report Vol. 17. No. 1. pp. 53~57. 1986 연구논문집 제17권 제 1 호 pp. 53~57. 1986.

3次元 Parametric Spline의 延長

주 상 윤
산 업 공 학 과
(1985. 9. 25. 접수)

〈要 約〉

本 論文은 內部 變形 에너지가 最小되도록 Ferguson parametric spline을 延長시키는 방법을 提案하고 있다.

또한 이 原理를 end condition을 選定하는데 適用하였는 바, Q-spline 방법이 가장 自然스런 形態의 spline을 形成할 수 있었다.

Extending of Cubic Parametric Splines

Ju, Sang-Yoon
Dept. of Industrial Engineering
(Received September 25, 1985)

〈**Abstract**〉

This paper suggests that Ferguson parametric splines are extended by the way such that their internal strain energies keep minimum.

Also with employing this way, it is found that Q-spline method can get the spline to be extended most naturally among several end-condition methods for constructing splines.

I. 緖 論

자동차, 비행기, 선박 등이나 日常生活에서 取扱하는 生活用品 중에 많은 부분들은 單一한 解析函數(Analytic function)로 표현되지 않으므로, 이와 같이 복잡한 形狀을 나타내기 위하여 自由曲面(Sculptured surface or Free formed surface)이 이용된다. 이들 自由曲面은 특수한 機能을 수행하거나 혹은 美觀上의 목적에서 만들어진다.

自由曲面은 새로운 曲面을 設計하거나 旣存의 曲面을 fitting 하기위해 사용되고 있는데, 後者의 경우에는 우선 曲面 上에 存在하는 位置點들을 3次元 測定機를 이용하여 測定하고 그후에 이들 測定된 入力點들을 圓滑히 지나는 曲面을 形成하게 된다. 그러나 이같은 方式으로 自由曲面을 얻으려 할 때 여러가지 이유로 因하여 入力點이 不充分하게 提供되는 경우가 빈번히 발생하게 되는 바, 이를 補完하기 위해서는 自由曲面을 構成하는 patch를 延長해야 하고, patch의 延長은 patch를 構成하는 segment가 包含된 spline을 延長시킴으로 가능하게 된다.

spline을 延長시키기 위하여 대부분의 CAD/CAM 시스템에서는 延長이 필요한 部位의 가장자리 segment를 表現하는 母數多項式(Parametric polynomial)에서 母數를 許容區間 [0, 1] 밖으로 벗어나게 하는 방법이 사용되고 있다. 그러나 이 방법은 曲線 延長에 따른 妥當性을 立證할 수 있는 理論的 根據가 貧弱할 뿐 만 아니라 延長되는 曲線의 길이가 길어지게 되면 豫期하지 않은 방향으로 曲線이 자주 벗어나므로 보다 一貫性 있고 信賴할 수 있는 spline의 延長技法이 요구되고 있다.

이를 위하여 本 論文에서는 物理的 spline의 경우, 內部 變形 에너지(Internal strain energy)가 最小의 크기를 가질 때 spline이 가장 自然스럽고 부드러운 形態를 取하게 된다는 原理를 parametric spline에 적용시킴으로 延長되는 曲線이 旣存의 spline에 가장 自然스럽게 連結되도록 하는 方法을 提示한다. 즉, 延長되는 曲線의 連結點(Knot point)에서 內部 變形 에너지가 최소값을 가지도록 하면 그 延長되는 segment는 가장 부드럽고 자연스럽게 旣存의 spline에서 延長 될 수 있을 것이다. 또한 이 原理를 spline의 end condition을 결정할 때 이용하면 가장 자연스러운 spline을 가져오는 양 끝점에서의 接線 벡터를 얻을 수 있다.

Ⅱ. 母數를 이용한 自由曲面의 概要

自由曲面은 2次元 母數式의 自由曲線으로 表現되며 이들 自由曲線은 母數式의 單一한 解析 函數로 表現되는 segment들이 圓滑히 連結된 것으로 複合曲線(Composite curve) 혹은 parametric spline이라 불린다.

自由曲線式을 表現하는 방법에 관한 연구는 다수 이루어져 왔으며, 이들 가운데에서도 특히 Ferguson과 Bezier 방식이 널리 사용되고 있는 바, 前者의 방식은 曲面 fitting 시스템에 주로 이용되고 있는 반면 後者는 曲面 設計 시스템에 導入되고 있다. 그러나 이 두 방법들은 曲面 表示 데이터를 相互 間에 轉換시킬 수 있으므로 數學的으로 同一한 방법이라 할 수 있다.[7]

本 연구에서는 Ferguson 曲線式을 이용하고 있다. 그 이유는 自由曲線의 延長을 필요로 하는 거의 대부분의 狀況이 曲面 fitting時 나타나기 때문이다. 또한 式이 簡便하고 計算이 容易한 이유로 3次 母數 多恒式을 이용하고 있는 바, 現場에서 活用되고 있는 大多數 CAD/CAM 시스템에서도 3次式이 採擇되고 있다.

Ferguson spline을 이루는 segment들은 아래와 같은 母數 多恒式 形態를 지니고 있다.

$$\boldsymbol{r}(u)=\boldsymbol{r}_i(1-3u^2+2u^3)+\boldsymbol{r}_{i+1}(3u^2-2u^3)$$
$$+\dot{\boldsymbol{r}}_i(u-2u^2+u^3)+\dot{\boldsymbol{r}}_{i+1}(-u^2+u^3) \quad (1)$$

여기서

$\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_{i+1}$: i번째 segment 양 끝의 位置點

$\dot{\boldsymbol{r}}_i$, $\dot{\boldsymbol{r}}_{i+1}$: i번째 segment 양 끝의 位置點에서의 接線 벡터

$0 \leq u \leq 1$

즉 Ferguson spline 內의 segment들은 양 끝점과 그 곳에서의 接線 벡터만 주어지면 唯一하게 결정될 수 있다.

위와 같은 函數式을 갖는 segment들은 連結點에서 1次 微分 $\dot{\boldsymbol{r}}$와 2次 微分 $\ddot{\boldsymbol{r}}$이 連續되도록 連結하면 Ferguson parametric spline이 된다. 이와같은 Ferguson spline을 唯一하게 결정하려면 位置點 데이터 以外에 이들 位置點들 중 가장자리에 位置한 양 끝점에서의 接線 벡터 즉 end condition이 주어져야 한다.

spline이 經由하는 位置點 들은 fitting하고자 하는 旣存의 曲面으로 부터 어느 한 방향을 따라가며 測定되는 데 이때 測定이 이루어지는 방향을 母數 u 방향이라 하면 이로 부터 얻어지는 spline을 fore and aft curve라고 부른다.[1] 한편 Ferguson 曲面은 空間 上의 測定點 들을 u, v 두 방향으로 連結하여 이루어지는 多數의 patch들로 表現되므로 母數 v 방향으로의 spline을 결정해야 한다.(그림 1 參照)

그러나 母數 v 방향에서는 母數 u 방향과 달리 測定된 位置點 들이 規則的인 방향을 따르고 있지 않을 뿐만 아니라, fore and aft curve 上에 存在하는 位置點 들의 數도 大部分의 경우 同一하지 않으므로 測定된 位置點 들을 fore and aft curve 上에서 再 排列하는 remeshing 過程이 필요하게 된다.[8] 이 過程은 interpolation과 약간의 extrapolation을 통하여 이루어지며, 그림 2에서는 remeshing 以前과 以後의 狀態를 보여주고 있다. 이 같은 過程을 통하여 얻게 되는 母數 v 방향의 spline을 transverse curve라고 부른다.[1]

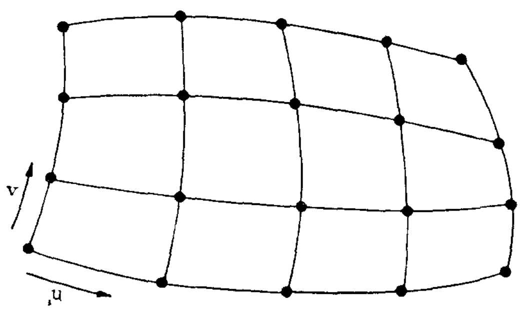


그림 1. 12개의 patch로 이루어진 Ferguson 曲面

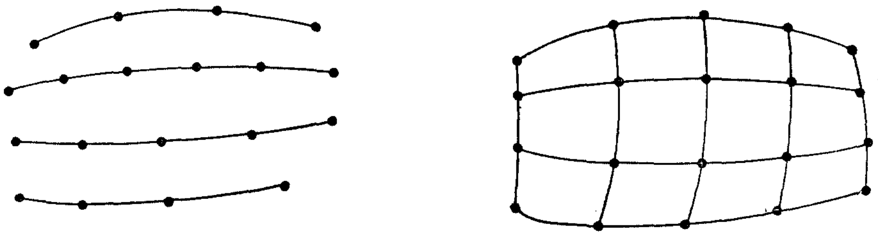


그림 2. remeshing 以前(a)과 以後(b)의 狀態

이제 母數 u 방향과 母數 v 방향으로의 Ferguson spline이 결정되면 이들로 부터 構成되는 多數의 patch들을 이용하여 Ferguson 曲面을 얻게 된다.

Ⅲ. 内部 變形 에너지를 最小로 하는 spline의 延長

fitting하고자 하는 自由曲面의 位置點 들을 測定함에 있어서 願하는 曲面이 완전히 表現될 수 있을 만큼 충분한 데이터를 얻지 못하는 경우가 많이 발생한다. 특히 自由曲面과 解析曲面(Analytic surface)이 結合되어 있는 경우, 解析曲面 上의 入力點은 測定되지 않고 오직 自由曲面 上에서의 位置點 만을 測定하게 되는데, 이때 두 曲面이 接하는 部位에서는 두 曲面의 境界線에서 自由曲面 안 쪽으로 位置點을 測定하고 두 曲面이 부드럽게 filleting 되도록 注文하는 것이 일반적이다. 이같은 경우 自由曲面의 가장자리를 가지런히 하기 위해서 自由曲面 内의 spline을 延長시켜야 한다. 그 外에도 remeshing할 경우 transverse curve들 중에서 양 끝에 存在하는 spline 들은 fore and aft curve를 延長 시켜야 얻을 수 있으므로 自由曲面을 形成하는 過程에서는 spline의 延長이 항상 필요하다. spline을 延長시키기 위하여 지금까지는 延長이 필요한 segment 内의 母數값을 許容 區間 [0, 1] 밖으로 벗어나게 하는 방법을 通常的으로 사용하여 왔다. 그러나 이미 前述한 바와 같이 이같은 방법을 通하여 얻게 되는 spline의 延長線이 自然스런 形態를 지니게 될 것이라는 理論的인 根據를 갖고 있지 못하므로 本 論文에서는 spline을 가장 自然스럽게 延長할 수 있는 理論的 基礎를 먼저 提示한 후 그에 따라 spline을 延長시키고자 한다.

먼저 parametric spline과 物理的 spline의 差異를 言及해 보자.

parametric spline은 物理的 spline이 발전된 形態로써 座標 軸에 從屬되지 않는 점이나 loop 形態의 曲線을 나타낼 수 있는 등, 母數的 函數(parametric function)의 特徵을 지니고 있다. 또한 parametric spline은 各 segment 間의 連結點에서 1次 및 2次 微分 값이 連續이므로 曲線은 부드러운 形態를 가지게 된다. 그러나 한편으로 parametric spline은 物理的 spline과 달리 内部變形 에너지를 最小로 維持하지 못하는 弱點을 갖고 있다.(6)

이 같은 두 종류 spline의 성질로 미루어 볼 때에 内部 變形 에너지가 最小되도록 parametric spline을 延長시킬 수 있다면 母數를 이용하는 既存의 방법보다 더욱 自然스럽게 延長된 曲線을 얻을 수 있을 것은 분명하다.

物理的 spline에서의 内部 變形 에너지 W는 다음과 같이 定義된다.

$$W = K \int \frac{y''^2}{(1+y')^{5/3}}\, dx \tag{2}$$

단, K: 상수

식(2)와 같은 物理的 spline의 内部 變形 에너지는 spline에 作用하는 shear force에 比例하며, 또한 shear force는 spline 内의 連結點 양 쪽에서 3次 微分한 값 差에 比例 됨이 증명되어 있다.(2)

Ferguson spline의 첫번째 segment를 延長시키고자 할때 결정되어야 할 延長曲線의 位置點과 接線 벡터를 각기 r_0, $\dot{r}_0$라고 하자. (그림 3 參照)

이 때 延長되는 segment를 位置點 r_1에서 shear force가 제로값을 갖도록 連結 시키는 경우 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\dddot{r}^{[0]}_{(1)} = \dddot{r}^{[1]}_{(0)} \tag{3}$$

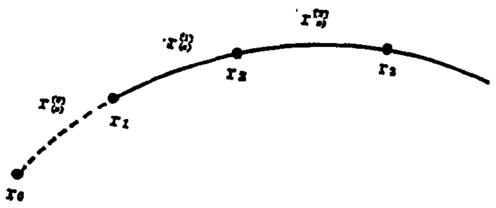


그림 3. spline 으로 부터 延長된 segment

식(1)을 이용하여 식(3)을 整理하면 아래의 관계식을 얻게 된다.

$$r_0=2r_1-r_2+\frac{1}{2}(\dot{r}_2-\dot{r}_0) \qquad (4)$$

그런데 延長되는 segment 는 既存의 spline 과 連結點 r_1 에서 2次 微分값이 連續되어야 하므로

$$\ddot{r}^{[0]}_{(1)}=\ddot{r}^{[1]}_{(0)}$$

혹은, $\dot{r}_0+4\dot{r}_1+\dot{r}_2=3(r_2-r_0)$ (5)

의 관계식을 얻을 수 있다.

그러므로 식(4)와 식(5)를 聯立하여 풀면 未知 벡터 r_0 와 $\dot{r}_0$ 를 결정할 수 있다.

$$r_0=-4r_1+5r_2-4\dot{r}_1-2\dot{r}_2 \qquad (6)$$

$$\dot{r}_0=3(r_2-r_0)-4\dot{r}_1-\dot{r}_2 \qquad (7)$$

Ferguson spline 의 마지막 segment 를 延長시키고자 한 경우, 連結點 r_n 에서 shear force 가 제로값을 갖는 조건식은 아래와 같다.

$$\dddot{r}^{[n-1]}_{(1)}=\dddot{r}^{[n]}_{(0)} \qquad (8)$$

첫번째 segment 와 同一한 過程을 反復하면 두 未知 벡터 r_{n+1} 와 $\dot{r}_{n+1}$ 은 아래의 式과 같이 결정된다.

$$r_{n+1}=-4r_n+5r_{n-1}+4\dot{r}_n+2\dot{r}_{n-1} \qquad (9)$$

$$\dot{r}_{n+1}=3(r_{n+1}-r_{n-1})-4\dot{r}_n-\dot{r}_{n-1} \qquad (10)$$

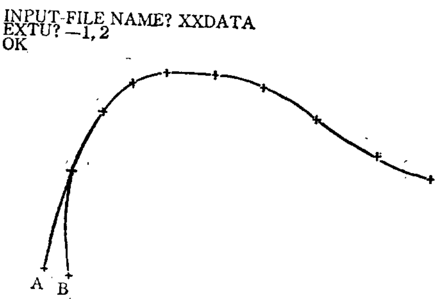
만일 식 (6), (7)이나 식 (9), (10)으로 부터 얻게 되는 segment 의 길이가 願하는 延長 크기에 미치지 못할 경우, 反復的으로 이들 式을 적용함으로 願하는 길이만큼 spline 을 延長시킬 수 있다.

마지막으로 2次元 上에 存在하는 spline 에 대하여 이제까지 記述한 本 연구 방법과 從來의 방법을 이용하여 延長되는 두 segment 들을 함께 圖示해 보면 그림 4와 같은 差異를 발견하게 된다.

Ⅳ. end condition 의 選擇

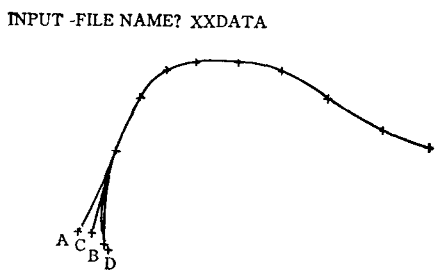
spline 이 결정되기 위해서는 測定된 位置點 데이터와 양 끝 入力點에서 接線 벡터를 定하는 end condition 이 주어져야 한다. end condition 에는 曲率을 제로로 만드는 natural spline, 가장 자리에 存在하는 segment 上의 入力點에서 曲率을 同一하게 만드는 P-spline, 가장자리에 存在하는 마지막 두 segment 上의 세 入力點에서 曲率의 變化量을 一定하게 만드는 Q-spline, 그리고 任意의 接線 벡터로 定하는 방법 등이 있다.[5] 最近에는 spline 의 가장자리에 位置한 3개의 入力點을 지나는 圓을 求하여 그로부터 接線 벡터의 방향을 결정하는 방법이 발표되었다.[8] 이 때 接線의 크기는 마지막 segment 上의 位置點을 連結한 絃의 길이로 대신한다.

測定된 位置點 데이터로 부터 spline 을 결정할 때 어떠한 end condition 을 사용하느냐에 따라 spline 의 形態, 特히 兩 가장자리에서의 segment 가 크게 影響받게 될 것은 분명하다. 더우기 spline



A: 本 연구 방법 B: 從來 연구 방법

그림 4. 本 연구 방법과 從來 방법의 비교



A: natural spline B: P-spline
C: Q-spline D: JUN[8]의 방법

그림 5. end condition 의 선택에 따라 延長된 segment 의 形態

을 延長하는 경우에는 end condition의 選擇이 延長되는 segment의 形態를 결정적으로 左右하게 되므로 end condition을 愼重히 選擇하는 일은 極히 중요하다. (그림 5 參照)

이제 本 論文에서는 end condition을 결정하기 위하여 spline을 延長할 때와 同一한 原理를 이용하고자 한다. 즉, 兩 끝 位置點 $\boldsymbol{r}_j(j=1, n)$ 上의 接線 벡터 $\dot{\boldsymbol{r}}_j(j=1, n)$를 결정하기 위하여 兩 끝에서 두번째 位置點 $\boldsymbol{r}_j(j=2, n-1)$의 shear force를 最小되게 한다면(即, shear force가 제로값을 갖게 함) 內部 變形 에너지를 最小로 하는 end condition을 결정할 수 있으므로 spline의 形態는 가장 自然스럽게 維持될 수 있게 된다.

이 같은 原理를 따라 兩 끝點에서의 接線 벡터 $\dot{\boldsymbol{r}}_j(j=1, n)$을 求하면 아래 式과 같다.

$$\dddot{\boldsymbol{r}}^{[1]}_{(1)}=\dddot{\boldsymbol{r}}^{[2]}_{(0)}$$

즉, $$\dot{\boldsymbol{r}}_1=\dot{\boldsymbol{r}}_3-2(\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1-2\boldsymbol{r}_2) \qquad (11)$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}^{[n-1]}_{(1)}=\dddot{\boldsymbol{r}}^{[n]}_{(0)}$$

즉, $$\dot{\boldsymbol{r}}_n=\dot{\boldsymbol{r}}_{n-2}+2(\boldsymbol{r}_n+\boldsymbol{r}_{n-2}-2\boldsymbol{r}_{n-1}) \qquad (12)$$

式(11)과 式(12)는 end condition을 결정하는 여러 방법들 중 Q-spline과 同一하므로, 特定한 事由가 없는 한 spline을 延長할 때의 end condition으로 Q-spline을 사용하는 것이 가장 바람직 하다고 斷定할 수 있다.

V. 結 論

本 論文에서는 內部 變形 에너지가 最小될 때 物理的 spline이 가장 自然스런 形態를 取한다는 原理를 이용하여 內部 變形 에너지가 最小되도록 Ferguson parametric spline을 延長시키는 방법을 提示하였다.

또한 이 原理를 parametric spline의 end condition을 選定하는 데에 적용 함으로, Q-spline이 內部 變形 에너지를 最小로 하는 방법 임을 보여주고 있다.

參 考 文 獻

1. Faux, I. D. and Pratt, M. J., Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood Ltd., 1981.
2. Kjellander, J. A. P., "Smoothing of Cubic Parametric Splines", Computer-Aided Design, Vol. 15, No. 3. 1983, pp. 175—179.
3. Kjellander, J. A. P., "Smoothing of Bicubic Parametric Surfaces", Computer-Aided Design, Vol. 15, No. 5. 1983, pp. 288—293.
4. Mehlum, E., "Nonlinear Splines", In Computer-Aided Geometric Design, Academic Press, 1974, pp. 173—207.
5. Nutbourne A. W., and Morris R. B., "A Cubic Spline Package, PART 1-The User's Guide", Computer-Aided Design, Vol. 4, No. 5. 1972, pp. 223—228.
6. Pressman, R. S. and Williams, J. E., Numerical Control & Computer Aided Manufacturing, John Wiley & Sons Inc., 1977.
7. Sadeghi, M. M., and Gould, S. S., "A Comparison of Two Parametric Surface Patch Methods", Computer-Aided Design, Vol. 6, No. 4, 1974, pp. 217—220.
8. 全次秀, "3次元 測定 데이터로부터 自由曲面의 NC 加工", MS Thesis, KAIST, 1985.