연구논문집 제 2 권 제 1 호 p. 37—39~1971

Unbalance에 의한 Impressed Force를 받는 System의 진동

이 동 기
기계 공학과

〈요 약〉

System 내부의 회전체의 회전에 의하여 진동하게 되는 System의 진동에 관하여 고찰했다. 진동은 1차원으로 한정해서 생각했고 초기의 Transient Vibration 보다는 Steady-state에 도달한 후의 진동에 주의하여 System과 그 내부 회전체의 Circular Frequency가 일치함을 밝혔다. damping이 적을때는 자유진동수 근처 에서의 속도가 위험하나 속도가 클때에는 damping에 관계없이 진폭은 일정한 값에 가까워짐을 밝혔다.

The Vibration of a System Excited by Acceleration Due to Unbalance

Lee, Dong Kee
Dept. of Mechanical Engineering

<abstract>

The vibration of a system which has single degree of freedom and is excited by the rotation of its member with unbalance is discussed. This note is concerned mainly with steady-state vibration rather than transient one. The circular frequency of the system is showed to be same as rotating member after a definite interval of time has passed. When the amount of damping is small, the speed near natural frequency is dangerous, but if the rotating speed be high, the amplitude of system approaches a constant value independently of damping.

—기호해설—

m_1 : Rotating Member의 질량

m : System의 질량

c : Damping 계수

k : Spring 계수

ε : Rotating Member의 중심(重心)과 회전중심(中心) 사이의 거리

ω : Rotating Member의 Circular Frequency

t : 시간

X : System의 Amplitude

ω_n : Natural Circular Frequency, $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

β : Circular Frequency비, ω/ω_n

c_c : 임계 Damping 계수, $c_c=2\sqrt{mk}$

ζ : damping 계수비, c/c_c

A_1, A_2 : 적분상수

I. 서 론

회전축을 가진 기계의 진동은 회전체의 Balance 여부에 밀접한 영향을 받는다. 기계가 운전중 어떠한 Shock—힘, Impulse, 또는 지지상태의 갑작스

된 변동하중을 받는다고 할때 이후에 나타나는 진동은 자유 진동과 강제진동의 두 가지가 중첩된 것으로 생각할 수 있다.

자유진동은 System의 고유한 감쇠에 지배를 받고 일반적으로 진동이 시작한후 짧은 시간 내에 소멸되는 경향을 보인다. 한편 강제진동은 이 경우 회전축의 Unbalance로 인한 원심력에 의하여 일어나므로 회전축의 각속도, 질량, 편심거리 등에 영향을 받고 회전이 멈출 때까지 계속하게 된다. 그러므로 우리가 주의를 기울이게 되는것은 강제진동에 대하여서이고, 이 진동이 어떤 제한치를 초과하지 않도록 제한할 필요가 있다. 그러나 이 System 또는 System의 Support의 강도에 대하여 고려를 할때는 최대 진폭이 자유진동과 강제진동의 중첩에 의하여 일어나므로 자유진동을 무시 할수는 없다.

여기서는 먼저 주어진 System에 관해서 미분방정식을 만들고 그해를 구하여 이 System중에포함되는 여러가지 Factor가 진동에 미치는 영향을 구명히 보고자 한다.

Ⅱ. 본 론

그림 1과 같은 System에서 상하방향만의 진동을 고려하여 1자유도계로 생각하면 질량이 m_1이고 편심거리가 ε인 부품이 회전할때 이 System에 가해지는 원심력은 $m_1\varepsilon\omega^2$ 이다.

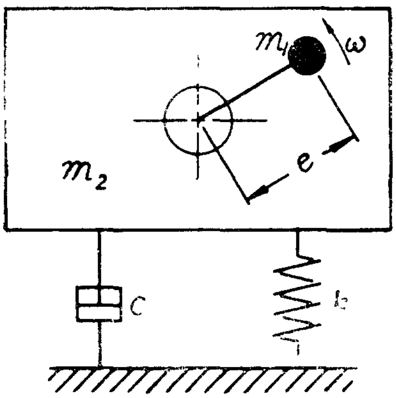

그림 1

이 System의 전질량 m은 $m=m_1+m_2$이고 $\frac{m_1}{m}=\mu$라고 놓으면 $m_1=\mu m$.

원심력의 수직 분력은 $m_1\varepsilon\omega^2\cos\omega t=\mu m\varepsilon\omega^2\cos\omega t$ 이므로 이 System에 관한 미분 방정식은

$$m\ddot{x}=-c\dot{x}-kx+\mu m\varepsilon\omega^2\cos\omega t$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\mu m\varepsilon\omega^2\cos\omega t \tag{1}$$

이고 해는

$$x=e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A_1e^{\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}+A_2e^{-\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}\right)+\mu m\varepsilon\omega^2\frac{c\omega\sin\omega t+(k-m\omega^2)\cos\omega t}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}$$

$$=e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A_1e^{\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}+A_2e^{-\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}\right)+\frac{\mu m\varepsilon\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\cos(\omega t-\theta) \tag{2}$$

단 $\tan\theta=\dfrac{c\omega}{k-m\omega^2}$

여기서 첫 항은 Free Vibration에 관한 항이고 일반으로 damping 계수 c가 아주 작은 값이 아닌 한 수초 이후에는 무시할수 있을 정도로 소멸된다.

두번째 항은 원심력으로 인한 강제진동에 관한 항이고 축이 회전하는 동안에는 지속된다. 자유진동에 관한 항을 제외하고 이 System에 작용하는 힘들을 Rotating Vector로 표시하면 그림 2와 같다.

먼저 이 System의 최대변위를 X라 할때 어떤 순간에서의 변위는 Rotating Vector X를 수직 축상에 사상한 길이 x가 되고 이때 Spring Force는 변위의 반대 방향이므로 그림에서 kX를 수직사상한 길이 kx가 된다. Damping Force는 $c\dot{x}$로 표시되고 이 값은 Spring Force보다 90° 앞선 Vector 이고 크기는 $c\omega X$로 표시된다. Inertia Force는 $m\ddot{x}$로서 Spring Force보다 180° 앞선 Vector이고 크기는 $m\omega^2X$ 이다

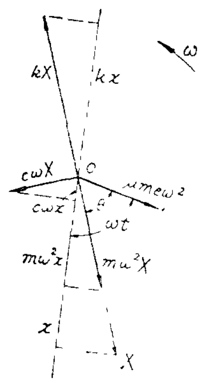

그림 2

Amplitude (최대변위) X는 다음과 같다.
식 (2)로 부터

$$X=\frac{\mu m\varepsilon\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \tag{3}$$

Dimensionless Expression 으로는 $\mu\varepsilon$을 이항하고 분모 분자를 k로 나누어

$$\frac{X}{\mu\varepsilon}=\frac{\omega^2\, m/k}{\sqrt{\left(1-\frac{m}{k}\omega^2\right)^2+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}$$

$$= \frac{\omega^2 \cdot \frac{1}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{c_c}\frac{c_c\omega}{k}\right)^2}}$$

$$= \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \tag{4}$$

주어진 System에서 μ, ε, c, ω_n의 값들은 정해져있으므로 식 (4)는 결국 회전축의 회전속도와 진폭사이의 관계식이라고 볼 수 있다. 여러가지 ζ 값에 대하여 $\frac{X}{\mu\varepsilon}$ 와 β사이의 그림표를 그리면 그림 3과 같다.

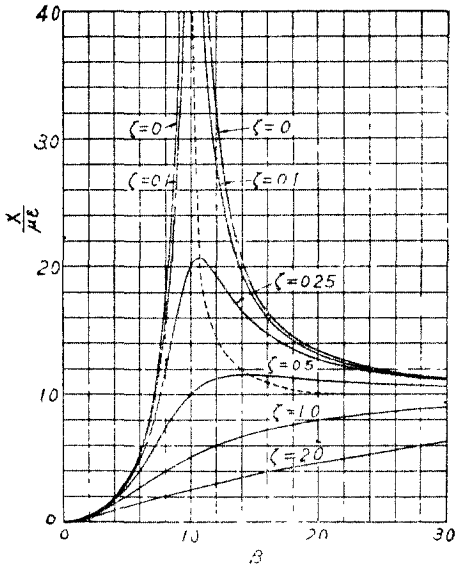

그림 3

III. 결 론

최대 진폭은 식 (4)에서 $\frac{X}{\mu\varepsilon}$ 를 β에 관하여 미분해서 결과를 0으로 놓으면

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{X}{\mu\varepsilon}\right) = \frac{2\beta(1-\beta^2+2\zeta^2\beta^2)}{\{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2\}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$\beta=0$일때는 최소 이므로

$1+2\zeta^2\beta^2-\beta^2=0$일때 최대이고 이때 β는

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

이다. 최대 진폭을 그림으로 표시하면 그림 3의 점선과 같다. 이 결과 특히 Damping 계수가 적을때는 Natural Frequency 근처에서의 운전은 위험함을 알수있다. 회전속도가 빨라지면 Damping 계수의 크기에 관계없이 일반적으로 $\frac{X}{\mu\varepsilon}$ 값은 1에 접근한다.

또 식 (2)로 부터 회전체의 System의 Circular Frequency는 동일한것을 알수있으며 θ는 회전체와 System 사이의 Phase Angle을 표시하고 회전이 빨라짐에 따라 증가하여 Natural Frequency에 이르렀을때 90°가 되고 더욱 빨라지면 180°에 가까워진다.

참 고 문 헌

1. TIMOSHENKO, S. and YOUNG, D.H., Vibration Problems in Engineering, 3e, D. VAN NOSTRAND pp. 76—86.
2. CHURCH, A.H., Mechanical Vibration, 2e, Wiley-Toppan pp. 60—128.
3. MABIE, Hamilton H. and OCVIRK, Fred W., Mechanics and Dynamics of Machinery, 2e, Wiley International Edition, pp. 461—480.