

## SPOC강의 점소성 거동에 대한 실험적 연구

유호영\* · 진종태 · 김진무

### 〈요 약〉

SPOC강에 대한 점소성 거동의 특성을 Perzyna의 점소성 모형을 기준으로 실험적으로 조사하였다. 점소성 구성방정식을 미소변형 및 유한변형이론에 맞추어 표현하고, 각 경우에 대한 물질상수 및 정적항복합수를 구하였다. 여러가지 변형율속도하에서 인장시험 결과로부터 물질상수 및 정적항복합수를 결정하기 위한 자료처리 방안이 제시되었다.

---

## An Experimental Study on the Visco-Plastic Behaviors of SPOC steel

Ho-Young You · Jong-Tae Jinn · Jin-Moo Kim

### 〈Abstract〉

The characteristics of Visco-Plastic behaviors of SPOC steel are investigated empirically based on the Visco-Plastic model proposed by Perzyna. Visco-Plastic constitutive equations are expressed according to both infinitesimal and finite deformation theories, and material constants and static yield function are obtained in each case. A method of data regression is proposed for determining the material constants and static yield function from the results of tensile test under various strain-rate.

---

\* 울산대학교 대학원

## 1. 서 론

모든 재료는 다소간의 점성을 가지고 있으며, 이러한 성질은 특히 재료의 소성상태에서 더욱 뚜렷하게 나타난다. 또한 재료의 점성 및 소성의 두가지 성질들은 복합적인 양상으로 나타난다고 알려져 있으며, 이러한 재료의 모형을 특히 점소성 모형이라 한다. 이러한 점소성 모형에서 점성의 영향은 통상 응력의 변형율속도 의존성(Strain rate dependence)으로 표현된다.

재료의 점소성 거동에 대한 연구는 특히 동하중하에서 소성과굴분해 및 고온하에서의 구조물 거동의 해석등에 절실히 요구되어진다. 20세기 중반 이후 재료의 점소성 모형에 대한 여러가지 연구들이 발표되어져 왔으며, 그중 대표적으로 알려진 점소성 모형은 Perzyna(1), Bodner와 Partom(2), Hart(3), Miller(4), Krempl(5) 등이 있다.

이러한 모형들은 통상 미소변형이론(infinitesimal deformation theory)을 바탕으로 점소성 구성방정식을 표현하고 있으나, 점소성 효과의 고려는 실제 구조물의 대변형 해석등에 더욱 필요로 하고 있다. 따라서 유한변형이론(finite deformation theory)을 바탕으로 한 점소성 구성방정식의 표현 및 필요한 물질상수의 결정을 위한 실험방법의 개발에 대한 필요성을 느끼고 있으나, 아직까지도 이러한 분야의 연구는 매우 미흡한 실정이다. 아울러 일반적으로 널리 사용되는 재료들에 대해서조차 점소성 영향이 고려된 기계적성질에 관한 자료들은 알루미늄이나 일부 탄소강외에는 대외적으로 알려진 것이 거의 없는 실정이다. 본 연구에서는 승용차 차체등에 널리 사용되는 SPCC강에 대한 점소성 거동의 특성을 실험적으로 조사한다. 제2장에서는 Perzyna의 점소성 모형을 기준으로 일차원 구성방정식을 미소변형이론, Lagrangian기술 및 Eulerian기술을 사용한 유한변형이론에 맞추어 각각 표현한다. 제3장에서는 실험장치 및 방법이 설명되어 있으며 실험결과를 분석하고 있다. 또한 여러가지의 변형율속도하에서 인장시험 결과로부터 각각의 구성방정식에 필요한 물질상수 및 정적항복함수를 결정하기 위한 자료처리 방안이 제안되고 있다.

## 2. 점소성 구성방정식의 수학적 모형

### 2-1. Perzyna의 점소성 모형

Malvern(6)의 over-stress모형을 일반화시킨 Perzyna의 탄-점소성 구성방정식은 다음과 같은 텐서식으로 표현된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^e, \quad (1)$$

$$= C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2)$$

여기서  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ 는 각각 변형율 속도, 탄성변형율속도, 소성변형율속도 텐서이고,  $\sigma_{ij}$  및  $\dot{\sigma}_{kl}$ 은 응력 및 응력속도 텐서이며,  $C_{ijkl}$ 은 식(3)과 같이 정의된 탄성텐서이다.  $\gamma$ 는 재료의 점성상수,  $F$ 는 식(4)와 같이 정의된 정적항복함수(Static yield function)이다.

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \delta_{ij} \delta_{kl}), \quad (3)$$

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^p) = \frac{f(\sigma_{ij})}{K(\epsilon_{kl}^p)} - 1. \quad (4)$$

식(3)에서  $\mu$  및  $\lambda$ 는 Lamé의 상수이며  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta를 나타낸다. 식(4)에서  $F=0$  즉  $f=\kappa$ 는 정적응력-소성변형을 관계를 의미하고, 초기 항복면이라고도 하며  $\kappa$ 는 소성변형율경화(plastic strain hardening)의 정도를 나타내는 drag응력이다. 그리고  $f=0$ 는 응력공간상에서의 동적하중면(dynamic loading surface)을 의미하며,  $J_2$  유동이론 및 Mises항복이론의 적용시에는  $f$ 가 식(5)와 같이 정의된다.

$$f(\sigma_{ij}) = f(J_2) = \left[ \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

여기서  $\sigma'_{ij}$ 은  $\sigma_{ij}$ 의 편차응력성분을 나타낸다. 식(2)에서 사용된 함수  $\Phi$ 는 동하중에서 재료의 거동을 표현하는 함수로, 금속재료의 경우에는 식(6)의 지수식 형태가 널리 사용된다.

$$\Phi(F) = F^{-n}, \quad (6)$$

여기서  $n$ 은 재료의 물성을 나타내는 지수이다. 식 (2)에서 기호  $\langle \Phi(F) \rangle$  는 아래와 같이 정의된다.

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & ; F \leq 0 \text{ 일 경우,} \\ \Phi(F) & ; F > 0 \text{ 일 경우.} \end{cases}$$

이상의 탄-점소성 구성방정식에 포함되어 있는 물질상수 및 함수들은 재료의 탄성을 표현하는  $\mu, \lambda$  와 점소성을 표현하는 물질상수  $\gamma, \eta$  및 함수  $\kappa$  들로, 실험적으로 결정되어야 한다. 일축응력상태에서는 식 (2)가 아래와 같이 된다.

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + D \left\langle \Phi \left( \frac{\sigma}{\phi(\epsilon^p)} - 1 \right) \right\rangle, \quad (7)$$

여기서  $\epsilon, \sigma$  는 축방향변형을 및 응력, 첨자 “ $\cdot$ ”는 속도(rate)를 나타내며,  $E$ 는 탄성계수이고,  $\epsilon^p$ 는 변형율의 소성성분이다. 그리고

$$D = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma, \quad \phi(\epsilon^p) = \sqrt{3} \kappa(\epsilon^p). \quad (8)$$

식 (7)에서 점소성 성분을 분리하면

$$\dot{\epsilon}^p = D \left\langle \Phi \left( \frac{\sigma}{\phi(\epsilon^p)} - 1 \right) \right\rangle \quad (9)$$

함수  $\phi$ 가 식 (6)과 같이 정의된 경우 식 (9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma = \phi(\epsilon^p) \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}^p}{D} \right)^n \right]. \quad (10)$$

식 (10)에 포함된 물질상수 및 함수는  $D$ 와  $n$  및  $\phi(\epsilon^p)$ 이며  $\sigma = \phi(\epsilon^p)$ 는 단순인장하에서의 정적응력-소성변형률관계를 나타낸다. 실제 인장시험에서는 완전한 정적상태의 실험은 불가능하기 때문에 함수  $\phi$ 는 유한한 변형률속도하에서의 실험결과로부터 결정하여야 한다.

### 2-2. 유한변형이론을 적용한 점소성 구성방정식

본 절에서는 연속체역학의 유한변형이론을 이용하여 대변형 문제등의 해석에 적용되어질 수 있는 유한변형점소성 구성방정식을 유도한다. 유한변형이론의 전개는 크게 Lagrangian기술(혹은 Referential기술)과 Eulerian기술(혹은 Spatial기술)법이 이용된다.

일축인장상태에서 점소성 구성방정식 식 (10)을 Lagrangian 및 Eulerian기술법으로 변환한 형태는 각각 식 (11)과 (12)와 같다고 가정한다.

$$S = \phi(\bar{E}^p) \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\bar{E}}^p}{D} \right)^n \right], \quad (11)$$

$$\tau = \phi(\bar{\epsilon}^p) \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{D} \right)^n \right] \quad (12)$$

여기서  $\bar{E}^p, \dot{\bar{E}}^p, S$ 는 축방향 성분의 Lagrangian 소성변형율, 소성변형률속도 및 제2종 Piola-Kirchhoff응력이며,  $\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p$  및  $\tau$ 는 축방향 성분의 Eulerian 소성변형율, Eulerian 소성변형률속도 및 Kirchhoff응력을 나타낸다.

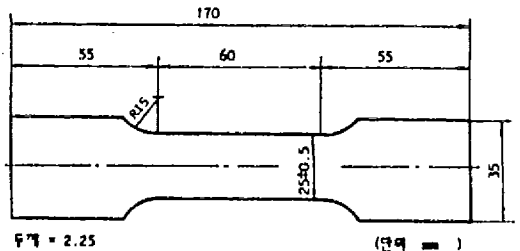


그림 1. 시험편 (KSB 0801 제5호)

그림 (1)과 같은 초기 상태에서 평행부의 크기, 두께  $\times$  폭  $\times$  길이 ( $a_0 \times b_0 \times l_0$ )인 판재 인장시험이 변형중 어떤 순간에  $a \times b \times l$ 로 변하고 이때 길이 방향의 인장량이  $\delta$  라고 하면, 식 (10), (11) 및 (12)에서 사용된 각종 응력과 변형률 및 변형

윤속도의 관계는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{f}{a_0 b_0}, \\ \varepsilon &= \frac{\delta}{l_0}, \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\delta}}{l_0}, \\ \bar{E} &= \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2, \\ \bar{e} &= \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2}{1 + \varepsilon + \varepsilon^2}, \\ \dot{\bar{E}} &= \dot{\varepsilon}(1 + \varepsilon), \\ \bar{D} &= \frac{\dot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon}, \\ S &= \frac{\sigma}{1 + \varepsilon}, \\ \tau &= \sigma(1 + \varepsilon),\end{aligned}\quad (13)$$

여기서  $f$ 는 인장하중,  $\delta$ 는 인장속도이며, 재료의 체적은 일정하다고 가정한다. 이상의 관계에서 보면, 구성방정식에서 가정한 변형율의 탄성과 소성성분의 식(1)과 같은 형태의 분리는 모든 구성방정식 식(10), (11) 및 (12)에 공통적으로 성립될 수 없다.

본 연구에서는 탄성성분의 변형율 및 변형율속도가 소성성분들에 비해 매우 적다고 가정하고 식(13)으로부터 다음의 관계식을 사용한다.

$$\begin{aligned}\bar{E}^p &\cong \varepsilon^p + \frac{1}{2}(\varepsilon^p)^2, \\ \bar{e}^p &\cong \frac{\varepsilon^p}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}, \\ \dot{\bar{E}}^p &\cong \dot{\varepsilon}^p(1 + \varepsilon), \\ \bar{D}^p &\cong \frac{\dot{\varepsilon}^p}{1 + \varepsilon}\end{aligned}\quad (14)$$

### 3. 실험방법 및 결과분석

인장시험기는 MTS사의 폐쇄회로형 high rate system(용량, 10톤)을 사용하며 stroke control 방법으로 일정한 변형율 속도하에서 실험한다. 사용한 인장시험편은 SPCC판재로 부터 길이방향(압연방향)과 폭방향을 구분하여 채취된 그림1과 같은 판재 시험편으로 KSB0801 5호 시험편의 규격으로 가공한다.

변형율속도 0.00167, 0.0167 및 0.167(strain/sec)에 대해 각 변형율속도에서 길이방향 및 폭방향 시험편들을 각각 3회씩 실험한다.

X-Y기록계로 부터 얻은 하중-변위 곡선으로부터 소성변형율  $\varepsilon^p$ 가 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.15 및 0.2일 때의 응력  $\sigma$ 와 변형율  $\varepsilon$ 을 식(15)와 같은 방법으로 반복 계산을 통해 구한다.

$$\varepsilon^i = \frac{\sigma^i - 1}{E} + \varepsilon^p, \quad (15)$$

여기서 첨자  $i$ 는 반복 횟수를 나타내며,  $\sigma^{i-1}$ 은  $\varepsilon^{i-1}$ 에 해당되는 응력값으로 응력-변형율 곡선에서 구하며  $\sigma^0$ 는  $\varepsilon^p$ 에 해당되는 응력값이다. 탄성계수  $E$ 는 실험에서 구한값 202Gpa을 사용한다. 이상의 방법으로 정리한 실험결과를 부록과 같다.

점소성 구성방정식에 요구되는 물질상수  $D$ 와  $n$  및 정적항복함수  $\phi(\varepsilon^p)$ 를 실험결과로부터 구하는 방법은 다음과 같다.

(1) 소성변형율  $\varepsilon^p$ 가 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.15 및 0.2일 때의  $\phi$ 값을 변형율속도 0.00167일 때의 해당 소성변형율에서의 응력값으로 가정한다.

(2) 변형율속도 0.0167 및 0.167일 때의 각 소성변형율에서의 응력값으로부터 식(16)과 같이 표현되는 최소자승법을 이용하여  $D$ 와  $n$ 을 구한다. 식(10)의 양변에 자연대수를 취하여 정리하면 오차의 자승  $R$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}R &= \sum_{i=1}^N [PX_i + \ln^D - Y_i]^2, \\ X_i &= \ln\left(\frac{\sigma^i - \phi(\varepsilon_i^p)}{\phi(\varepsilon_i^p)}\right),\end{aligned}$$

$$Y_i = \ln \varepsilon_i, \quad (16)$$

$$P = \frac{1}{n},$$

여기서 N은 실험결과로부터 얻은 자료의 수 (부록 참조)를 나타낸다. 최소자승법을 적용하면 미지상수 lnD와 P를 포함하는 2원2차 연립방정식이 주어진다.

$$\frac{\partial R}{\partial (\ln D)} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial P} = 0. \quad (17)$$

(3) 단계 (2)에서 구한 D와 n으로 부터 각 소성변형률에 대한  $\phi$ 값을 식(18)로 부터 구한다.

$$\phi(\varepsilon^P) = \frac{\sigma}{1 + \left(\frac{0.00167}{D}\right)^n}, \quad (18)$$

여기서  $\sigma$ 는 변형률속도 0.00167일 경우에 해당되는 소성변형률에서의 응력값이다.

(4) 변형률속도 0.00167, 0.0167, 0.167일 때의 실험결과로부터 새로운 D와 n을 식(17)을 이용하여 구하며, 식(18)을 이용하여 수정된  $\phi$ 를 구한다. 식(16)의 오차의 자승 R을 계산하여 미리 정한 한계범위 내에 도달할 때까지 단계(4)를 반복한다.

(5) 부록의 모든 실험결과를 3가지 변형률속도를 한조합으로 하여 각 조합에 대해 이상의 단계(1)-(4)를 반복하여 수정된 D와 n을 구한다.

(6) 모든 조합에 대한 D와 n값들로 부터 D 및 n의 평균치와 표준편차를 구한 후, Chauvenet조건을 적용하여 최종 D와 n을 구한다.

(7) 구성방정식 (11)과 (12)에 대해서도 이상의 단계 (1)-(6)을 수행하여 각 경우에 대한 D와 n 및 각 소성변형률에서의  $\phi$ 를 구한다.

이상의 실험결과 분석방법을 프로그래밍하여 부록의 실험결과에 적용한 결과 모든 경우에 대해 균일수렴성(uniform convergence)이 보장되었다. 각 경우에 대해 500번씩 반복 수행한 결과 얻어진 D와 n값은 표 1과 같으며 정적항복합수  $\phi$ 는 표 2와 같다.

표 1. 물질상수 D와 P(=1/n)의 결과치

(a) 길이방향

Constitutive Model \ D, n	D (sec <sup>-1</sup> )	P(=1/n)
Infinitesimal Model Eqn (10)	2005.710	5.05124
Lagrangian Model Eqn (11)	2432.079	5.05002
Eulerian Model Eqn (12)	1654.091	5.05245

(b) 폭방향

Constitutive Model \ D, n	D (sec <sup>-1</sup> )	P(=1/n)
Infinitesimal Model Eqn (10)	350.714	4.30353
Lagrangian Model Eqn (11)	424.426	4.30325
Eulerian Model Eqn (12)	289.805	4.30382

표 2. 정적항복합수  $\phi(\varepsilon^P)$

(a) 길이방향 (단위:kgf/mm<sup>2</sup>)

Constitutive Model \ $\varepsilon^P$	0.01	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
Eqn (10)	19.826	23.055	24.946	27.452	28.643	29.095
Eqn (11)	19.613	22.361	23.732	24.931	24.879	24.219
Eqn (12)	20.042	23.771	26.221	30.235	32.977	34.952

(b) 폭방향 (단위:kgf/mm<sup>2</sup>)

Constitutive Model \ $\varepsilon^P$	0.01	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
Eqn (10)	17.869	21.257	23.290	26.180	27.591	28.364
Eqn (11)	17.704	20.618	22.158	23.774	23.965	23.611
Eqn (12)	18.089	21.915	24.479	28.830	31.766	34.075

### 4. 결 론

Perzyna가 제안한 점소성 구성방정식에 필요한 물질상수들과 정적항복합수를 구하기 위한 자료 처리방법이 제시 되었다. SPCC강에 대해서 제안된 방법을 적용하여 표1과 표2와 같은 결과를 얻었다. 길이방향의 D값이 폭방향의 값보다 큰 것은 길이방향의 가공경화효과에 기인한 것이라고 볼 수 있다. 이러한 가공경화효과는 정적항복합수의 경우에도 볼 수 있다. 앞으로 계속 연구할 때 고려할 사항은 다음과 같다.

1.  $\epsilon_p$ 가 일정하게 작용할 수 있는 실험장치의 개발
2. 변형율속도가 클 경우는 펜형기록계의 응답이 늦기 때문에 적합하지 못하다. 따라서 오실로스코프등의 응답이 빠른 기록장치의 사용이 필요.
3. 유한변형이론에 입각한 탄-점소성 구성방정식의 이론적 연구의 필요 등이다.

### 〈참 고 문 헌〉

(1) Perzyna, P., 'Fundamental Problems in Viscoplasticity', Advances in Applied

Mechanics, Vol. 9, pp. 243-377, 1966.  
 (2) Bodner, S.R. and Partom, Y., 'Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Materials', ASME J. Appl. Mech., Vol. 42, pp. 385-389, 1975.  
 (3) Hart, E.W., 'Constitutive Relations for the Nonelastic Deformation of Metals', ASME J. Eng. Mat. Tech., Vol. 98, pp. 193-202, 1976.  
 (4) Miller, A., 'An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic, and Creep Deformation: Part I-Equations Development and Analytical Procedures', ASME J. Eng. Mat. Tech., Vol. 98, pp. 97-105, 1976.  
 (5) Cernocky, E.P. and Krempl, E., 'A Theory of Thermoviscoplasticity Based on Infinitesimal Total Strain', Int. J. Solids Structures, Vol. 16, pp. 723-741, 1980.  
 (6) Malvern, L.E., 'The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain-Rate Effect', ASME J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 203-208, 1951.

부록

실험결과와 정리

(a) 길이방향시험편의 실험결과

( $\sigma$  : kgf/mm<sup>2</sup>)

시험편	$\epsilon$	0.00167			0.0167			0.167		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.01	$\epsilon$	0.011019	0.010998	-	0.011084	0.011092	0.011084	0.010527	0.010521	0.010537
	$\sigma$	21.0667	20.6400	-	22.4000	22.5778	22.4000	10.8889	10.7778	11.1111
0.03	$\epsilon$	0.031185	0.031161	0.031177	0.031234	0.031238	0.031234	0.031317	0.031345	0.031338
	$\sigma$	24.4978	24.0000	24.3378	25.5111	25.6000	25.5111	27.2222	27.8000	27.6667
0.05	$\epsilon$	0.051282	0.051266	0.051275	0.051327	0.051333	0.051333	0.051392	0.051408	0.051405
	$\sigma$	26.5067	26.1600	26.3467	27.4311	27.5467	27.5556	28.7778	29.1111	29.0444
0.1	$\epsilon$	0.101411	0.101402	0.101404	0.101464	0.101469	0.101467	0.101523	0.101537	0.101532
	$\sigma$	29.1733	28.9778	29.1556	30.2667	30.3644	30.3289	31.4889	31.7780	31.6667
0.15	$\epsilon$	0.151472	0.151464	0.151466	0.151531	0.151531	0.151529	0.151589	0.151595	0.151592
	$\sigma$	30.4356	30.2578	30.644	31.6444	31.6530	31.6089	32.8444	32.9778	32.9111
0.2	$\epsilon$	0.201496	0.201487	0.201553	0.201553	0.201550	0.201549	0.201613	0.201618	0.201615
	$\sigma$	30.9156	30.7467	30.1067	32.1067	32.0365	32.0267	33.3444	33.4444	33.3778

(b) 폭방향시편의 실험결과

( $\sigma$  : kgf/mm<sup>2</sup>)

$\epsilon^p$	$\epsilon$ 시편면 $\epsilon, \sigma$	0.00167		0.0167			0.167		
		1	2	3	4	5	6	7	8
		0.01	$\epsilon$	0.010916	0.010933	0.010982	0.011000	0.011017	0.010538
	$\sigma$	18.9333	19.2890	20.3020	20.6670	21.0310	11.1110	11.1110	10.3330
0.03	$\epsilon$	0.031088	0.031102	0.031132	0.031157	0.031165	0.031252	0.031259	0.031267
	$\sigma$	22.4890	22.7730	23.3960	23.9110	24.0890	25.8890	26.0330	26.1890
0.05	$\epsilon$	0.051192	0.051205	0.051235	0.051256	0.051264	0.051341	0.051334	0.051338
	$\sigma$	24.6400	24.9070	25.5290	25.9560	26.1330	27.7110	27.5780	27.6670
0.1	$\epsilon$	0.101340	0.101351	0.101393	0.101410	0.101412	0.101479	0.101473	0.101481
	$\sigma$	27.6980	27.9290	28.7910	29.1560	29.1910	30.5780	30.4440	30.6220
0.15	$\epsilon$	0.151412	0.151420	0.151472	0.151483	0.151488	0.151549	0.151543	0.151552
	$\sigma$	29.1910	29.3510	30.4360	30.6490	30.7560	32.0220	31.8890	32.0890
0.2	$\epsilon$	0.201452	0.201449	0.201509	0.201514	0.201519	0.201580	0.201582	0.201582
	$\sigma$	30.0090	29.9560	31.2000	31.2890	31.3960	32.6670	32.7110	32.7110