

중첩법을 이용한 외팔형 직사각형평판의 횡진동해석

안시영 · 엄성민
수송시스템공학부 조선공학전공

<요약>

평판에 있어 면에 수직한 방향의 횡진동해석에 대하여 네 변이 모두 단순지지인 경우와 어느 한 맞변이 단순지지인 경우를 제외한 기타의 경계조건의 경우에는 고유진동수 및 진동파형을 구하는 일이 일반적으로 용이하지 않다.

본 논문에서는 평판의 모든 경계조건에 걸쳐 정확히 지배방정식을 만족시키고, 수렴이 빠르고, 원하는 정확한 급수해를 얻을 수 있는 중첩법을 이용하여, 외팔형 직사각형평판에 관한 정밀진동해석을 수행하였고, 그 계산결과를 국내, 국외에서 제공된 주요 종횡비에 대한 자료와 비교 검토해 본 결과 잘 일치하고 있음을 확인 하였고, 또한 충격가진을 이용한 실험결과값과 이론값을 비교, 검토한 결과 잘 일치함을 확인하였다. 종횡비($a/2b$) 1/3~3의 범위에서 주요한 값 11개의 값에 대한 무차원화된 고유값을 9차까지 구하여 정리하여 표로 정리하였다.

Lateral Vibration Analysis of Cantilever Rectangular Plates by the Method of Superposition

Si Young Ahn · Sung Min Um
School of Transportation Systems Engineering

<Abstract>

It is well known that some difficulties have been encountered when attempting to analyze the vibration of plates that do not have at least one pair of opposite edges simply supported. But the Superposition Method provides solutions which satisfy the governing equation exactly throughout the entire domain of the plate.

In this paper, the superposition method is utilized to analyze the free vibration frequencies of cantilever rectangular plates. The method is found to work extremely well and excellent agreement is obtained when comparison is made between computed results and earlier reliable published data. And, it is well agreement between theory and experiment. Accurate eigenvalues are tabulated for a wide range of plate geometries(value of aspect ratio vary from 1/3 to 3).

1. 서론

평판은 항공기, 잠수함, 선박, 자동차 등 수 많은 분야에 응용되는 구조물로 선체를 형성하는 경우에는 대부분 문제가 발생하는 영역은 박판이론이 적용됨이 타당하다[1]. 이러한 문제가 발생하는 영역에 대해 다양한 종횡비와 경계조건에 따른 평판의 고유진동수를 차수별로 도표화한 자료는 공진문제의 해결에 있어 대단히 긴요하게 사용된다.

균질, 등방성이고 얇은 균일두께 직사각형 평판에 있어 면에 수직한 방향의 횡진동해석에 대하여 4변이 모두 단순지지이거나, 어느 한 맞변이 단순지지일 경우에는 이론적 염밀해를 쉽게 구할 수 있다. 그러나, 기타 경계조건의 경우에는 고유진동수 및 진동파형을 구하는 일이 일반적으로 용이하지 않기 때문에 평판 전 영역, 모든 경계조건에 걸쳐 정확히 지배방정식을 만족시키는 해를 찾기 위하여, Gorman[2]은 일반적인 보 특성함수들에 의해 만족하지 않는 경계조건에 대하여 최초로 직사각평판의 자유진동해석에 중첩법(Superposition Method)을 도입하였으며, 정확한 해를 구할 수 있는 방법임을 확인하였다.

김극천[3] 등이 다룬, 단순보의 고유함수를 이용한 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 근사 계산으로, 직사각 평판의 진동해석에서는 첫째, 한 맞변이 단순지지이고 다른 맞변이 고정인 경우에 대하여 12가지 종횡비에 대한 진동수를 계산하였고, 둘째, 두 개의 맞변이 각각(고정-자유, 고정-고정), (고정-단순지지, 고정-고정), (고정-단순지지, 고정-단순지지), (고정-자유, 고정-자유)의 경우에 대하여 12가지 종횡비에 따른 6차까지의 근사계산을 하였다.

이와 같이 국내에서는 제한된 경계조건과 몇 가지의 종횡비에 관한 평판에 대해서 흔히 사용되는 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 근사해석과 중첩법을 사용한 정밀해석이 다루어졌는데, 특히 중첩법에 의한 정밀해석은 이낙주[4]등이 세 변이 고정이고 나머지 한변이 자유인 경계조건과 안시영[13]등이 네변이 고정인 경계조건 만을 다루었다. 또한 외국에서도 제한된 종횡비를 가진 평판에 대한 고유값 계산결과를 제공하고 있다.

본 논문에서는 중첩법을 이용하여 한변이 고정된 직사각 평판에서 유도된 지배방정식 및 경계조건을 무차원화 하고, 해를 Levy의 급수해로 가정한 후, 급수 전개항을 수렴 확인을 통하여 충분히 크게 정하였다. 이를 중첩될 각 경계조건에 대입하여 미지의 계수들을 구하였고, 선형미분방정식에서 해의 중첩원리를 이용하는 방식으로, 무차원 고유값을 구하였다. 여기서는 종횡비를 1/3에서 3.0까지의 범위에서 무차원 고유값을 계산하여 정리하였고, 각각 9차까지를 테이블로 만들어 직접계산에 활용할 수 있게 하였다.

해석을 위한 프로그래밍은 MATLAB을 이용하여 코딩하였으며, 각 종횡비에 따른 정확한 고유값을 구하였다. 네가지의 종횡비($a/2b$) 2/3, 1, 1.5, 2.5에 대해서 계산된 염밀해의 문헌자료 및 ANSYS를 사용한 유한요소법에 의한 결과를 서로 비교함으로써 이 기법의

정확성을 검토하였다. 그리고, 실험을 통해 얻은 결과값과의 비교검토에서도 비교적 정확하게 일치함을 확인하였다. 그리하여 중첩법을 사용한 해석은 가정한 해가 정확히 경계조건을 만족하고, 컴퓨터를 이용한 계산에서는 수렴이 매우 빠르며, 원하는 정확도의 급수해를 얻을 수 있다는 장점을 확인하였다.

2. 중첩법 이론에 관한 고찰

2.1 지배미분방정식 및 경계조건의 무차원화

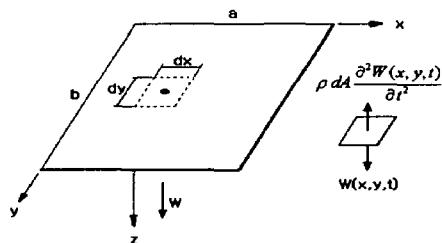


Fig.2.1 Rectangular plate showing a typical coordinate system and a differential plate element subjected to an inertial force.

본 논문에서는 Fig.2.1에서와 같은 전단변형 및 회전관성을 무시한 일반적 평판 굽힘자유진동에 관한 지배 미분방정식을 이용하여 변위함수 $W(x, y, t)$ 를 공간과 시간에 관한 함수로 변수분리한 후, 원식에 대입하여 미분방정식을 얻었는데, 그 식은 다음과 같다.[5-7]

$$\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} - \frac{\omega^2 \rho}{D} W(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

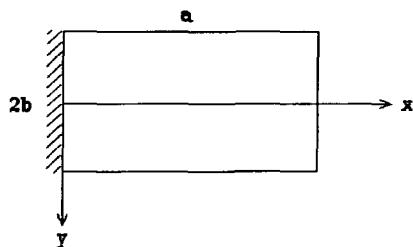


Fig.2.2 The cantilever plate

Fig.2.2에서 보이는 바와 같이 x축에 대하여 대칭이 되도록 판을 1/2로 나누고, 평판의 치수는 a, b라 하면 x, y 방향의 무차원화 좌표는 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ 라 정의한다. 이를 식(2.1)에 대입하여 무차원화 하면 아래 식(2.2)과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} - \phi^4 \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (2.2)$$

여기서, ϕ : 평판의 종횡비(aspect ratio), $\phi = a/2b$

λ : 무차원고유값, $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$

ω : 각진동수(rad/s)

ρ : 단위면적당 평판밀도(kg/m^2)

D : 평판의 굽힘강성. $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

E : 영률(N/m^2)

h : 평판의 두께(m)

ν : 포아송비($=0.333$)

한편, 고정단에 적용되는 경계조건을 일반 직각좌표계를 표현하면 다음과 같다.

$$W(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = 0 \mid_{x=0}$$

이를 무차원화 시켜 다시 쓰면 아래와 같다.

$$W(\xi, \eta) = \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 \mid_{\xi=0}$$

그리고, 자유단에 적용되는 경계조건을 일반 직각좌표계를 표현하면 다음과 같다.

$$\text{edge } x=a : \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = 0 \mid_{x=a}$$

$$\frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial x^3} + \nu^* \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial y^3} = 0 \mid_{x=a}$$

$$\text{edge } y=b : \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} = 0 \mid_{y=b}$$

$$\frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial y^3} + \nu^* \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial x^3} = 0 \mid_{y=b}$$

이를 무차원화 시켜 다시 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{edge } \xi=1 : \quad & \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0 \mid_{\xi=1} \\ & \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} = 0 \mid_{\xi=1} \\ \text{edge } \eta=1 : \quad & \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} = 0 \mid_{\eta=1} \\ & \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} = 0 \mid_{\eta=1} \end{aligned}$$

$$\text{여기서, } \nu^* = (2 - \nu)$$

또한, 구성블록에 적용되는 굽힘모멘트(distributed bending moment)와 수직반력(vertical edge reaction)은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\ V_x &= -D \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \nu^* \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \quad V_y = -D \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \nu^* \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right), \end{aligned}$$

이를 다시 무차원화 시켜 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{M_\xi a}{D} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right],$$

$$\frac{M_\eta \phi b}{D} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right]$$

$$\frac{V_\xi a^2}{D} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right],$$

$$\frac{V_\eta \phi b^2}{D} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]$$

2.2 지배방정식의 해

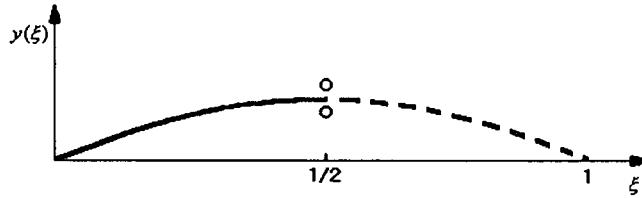


Fig.2.3 Curve $y(\xi)$ with symmetric distribution about $\xi=1/2$

본 논문에서는 프랑스의 수학자 Levy[6]가 제안한 단일 삼각함수 급수해를 사용하여 모드별로 변수 ξ, η 각 방향, 두 구성블록에 대하여 해석을 수행하였는데, Fig.2.3에서와 같이 $\xi=1/2$ 를 중심으로 좌우 대칭인 모드에서 식(2.3)이 $\xi=0$ 과 $\xi=1/2$ 에서 정확히 경계조건을 만족함을 앞으로 나오는 식들을 통해서 알 수 있을 것이다.

변위함수 $W(\xi, \eta)$ 를 가정함에 있어 다음 식(2.3)과 같이 쓸 수 있고 이는 $\xi=0$ 과 $\xi=1$ 을 대입하면 정확히 경계조건을 만족함을 알 수 있다.

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m(\eta) \frac{\sin m\pi\xi}{2} \quad (2.3)$$

식(2.3)을 식(2.2)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d^4 Y_m(\eta)}{d\eta^4} - 2\phi^2 \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \frac{d^2 Y_m(\eta)}{d\eta^2} + \phi^4 \left[\left(\frac{m\pi}{2} \right)^4 - \lambda^4 \right] Y_m(\eta) = 0 \quad (2.4)$$

식(2.4)에서 특성방정식을 사용하고, 근의 공식으로 풀면, $(m\pi/2)^2$ 의 부호에 따라 $Y_m(\eta)$ 를 얻을 수 있고, 이들을 식(2.3)에 대입한 후, 선형미분방정식에서 해의 중첩원리를 이용하여 첫 번째 구성블록에 대한 해를 다시 쓰면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) &= \sum_{m=1,3,5}^{k^*} (A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta \\ &\quad + C_m \sin \gamma_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \\ &\quad + \sum_{m=k^*+2}^{\infty} (A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta \\ &\quad + C_m \sinh \gamma_m \eta + D_m \cosh \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{여기서, } \beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi/2)^2}$$

$$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi/2)^2} \quad \text{또는} \quad \gamma_m = \phi \sqrt{(m\pi/2)^2 - \lambda^2}$$

2.3 고유값행렬의 구성

Fig.2.2에서와 같이 외팔형 사각평판에서 나올 수 있는 진동형은 두가지로 구분될 수 있다. 그 첫 번째는, ξ 축 및 η 축에 모두 대칭인 경우, 둘째는, ξ 축 및 η 축에 모두 비대칭인 경우이다. 이 두 경우를 각각 분리하여 해석을 수행 하였다.

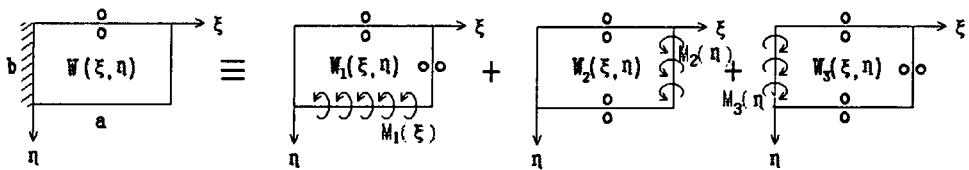


Fig.2.4 Building block for analyzing the symmetric modes of cantilever plate

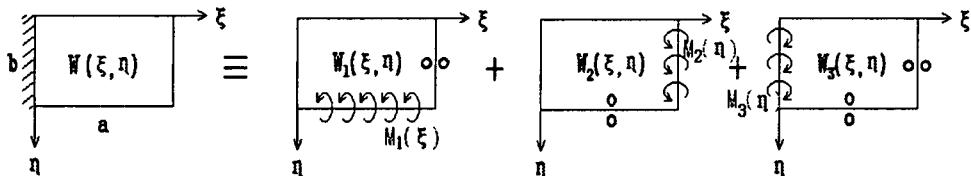


Fig.2.5 Building block for analyzing the antisymmetric modes of cantilever plate

고유값행렬의 생성은 앞에서 언급한 두 개의 모드에 따라 각각 따로 행렬을 생성하여 해석을 수행하여야 하는데, 그 방법이 동일하므로 본 논문에서는 Fig.2.3에서 보이는 구성블록을 이용하여 ξ 축에 대칭인 경우만을 다루었다. Fig.2.3에서 분할된 평판의 경계에 표시된 마주하는 두 원이 위치하는 경계를 슬립전단조건(slip-shear condition)이라 정의하자[13]. 이는 대칭인 모드에 사용되며 끝 단면에 법선방향으로 기울기가 0이며, 변에서 연직반력 또한 작용하지 않음을 나타낸다. 이로써 앞에서 언급한 두 가지 경계조건과 더불어 세가지 경계조건이 구성되었음을 알 수 있다. 네 번째 경계조건은 $\eta=1$ 을 따라 분포하는 조화굽힘 모멘트를 포함하는데, 진동문제에서는 이를 가정한 급수해와 같은 형태의 급수를 취해야 함을 알 수 있고, 미지의 계수를 포함하는 형태이다.

첫 번째 모드형에 대하여 급수전개함으로 살펴보면 아래와 같이 표현할 수 있다.

지배미분 방정식에 경계조건 $\xi=1$, $\eta=0$ 에서 slip shear condition을 적용하여 풀면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1,2,3}^k (A_m \cosh \beta_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} + \sum_{m=k+2}^{\infty} (A_m \cosh \beta_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \quad (2.6)$$

$$\text{여기서, } \beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi/2)^2}$$

$$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi/2)^2} \quad \text{또는} \quad \gamma_m = \phi \sqrt{(m\pi/2)^2 - \lambda^2}$$

위의 식은 $\lambda^2 > (m\pi/2)^2$ 일 경우와 아닐 경우 두 가지의 형태의 식으로 나타나게 된다.

먼저, $\lambda^2 > (m\pi/2)^2$ 일 경우에 대하여 살펴보면, $\eta=1$ 에서 vertical edge reaction이 0이라는 조건을 대입하면 아래의 경계조건식을 얻게 된다.

$$\frac{V_\eta \phi b^2}{D} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (2.7)$$

식(2.6)에서 미지 계수 A_m 과 D_m 을 소거하기 위해서 (2.7)식을 풀면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \left[(A_m \cosh \beta_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \right] \\ & + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta \partial \xi^2} \left[(A_m \cosh \beta_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \right]_{\eta=1} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8)식을 정리하여 풀면 아래의 식으로 나타내 진다.

$$\begin{aligned} & A_m \{ \beta_m [\beta_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2] \} \sinh \beta_m \\ & + D_m \{ \gamma_m [\gamma_m^2 + \nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2] \} \sin \gamma_m = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$\lambda^2 < (m\pi/2)^2$ 일 경우도 위와 마찬가지로 풀면 아래의 식으로 나타내 진다.

$$\begin{aligned} & A_m \{ \beta_m [\beta_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2] \} \sinh \beta_m \\ & + D_m \{ \gamma_m [\gamma_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2] \} \sinh \gamma_m = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

식 (2.9)와 (2.10)에 경계조건을 적용하기 위해 (2.6)의 형태로 바꿔주면

$$Y_m(\eta) = A_m (\cosh \beta_m \eta + \theta_{1m} \cos \gamma_m \eta) \quad (2.11)$$

$$\text{또는 } Y_m(\eta) = A_m (\cosh \beta_m \eta + \theta_{2m} \cosh \gamma_m \eta)$$

$$\text{여기서, } \theta_{1m} = \frac{\beta_m [\nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2] \sinh \beta_m}{\gamma_m [\nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2 + \gamma_m^2] \sin \gamma_m}$$

$$\text{또는 } \theta_{2m} = \frac{\beta_m [\nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2] \sinh \beta_m}{\gamma_m [\gamma_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2] \sinh \gamma_m}$$

다음으로는 무차원화된 굽힘모멘트식을 아래의 급수 전개항으로 표현할 수 있다.

$$\frac{b^2 M_1(\xi)}{aD} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi\xi}{2} \quad (2.12)$$

무차원화된 굽힘모멘트식과 식(2.12)의 우변을 같다고 두고 다시 정리하여 표현하면 아래의 식과 같이 구성이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[Y_m(\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \right] + \nu \phi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[Y_m(\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \right]_{n=1} \\ = -E_m \sin \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

식(2.11)에 대입하여 풀면 E_m 의 값을 구할 수 있다.

$\lambda^2 > (m\pi/2)^2$ 일 경우

$$E_m = -A_m \{ [\beta_m^2 - \nu \phi^2 (m\pi/2)^2] \cosh \beta_m - \theta_{1m} [\gamma_m^2 + \nu \phi^2 (m\pi/2)^2] \cos \gamma_m \}$$

$\lambda^2 < (m\pi/2)^2$ 일 경우

$$E_m = -A_m \{ [\beta_m^2 - \nu \phi^2 (m\pi/2)^2] \cosh \beta_m + \theta_{2m} [\gamma_m^2 - \nu \phi^2 (m\pi/2)^2] \cosh \gamma_m \} \quad (2.14)$$

위의 과정에서 미지계수 A_m 은 소거가 되고, 미지계수는 모멘트식에 관련된 E_m 만이 남게 되고 식(2.11)은 최종적으로 다음과 같은 형태로 정리된다.

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) = & \sum_{m=1,2,3}^k \frac{E_m}{\theta_{11m}} (\cosh \beta_m \eta + \theta_{1m} \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \\ & + \sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{E_m}{\theta_{22m}} (\cosh \beta_m \eta + \theta_{2m} \cosh \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

여기서,

$$\theta_{11m} = [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2] \cosh \beta_m + \theta_{1m} [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 + \gamma_m^2] \cos \gamma_m$$

$$\theta_{22m} = [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2] \cosh \beta_m + \theta_{2m} [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 - \gamma_m^2] \cosh \gamma_m$$

두 번째 및 세 번째 구성블록에 관해서도 첫 번째와 동일한 방식으로 해를 구할 수 있다.

이상으로 위의 세 가지 구성블럭에 대한 각각의 선형미분방정식의 해를 구하였다.

위에서 구한 선형미분 방정식의 해 $W_1(\xi, \eta)$, $W_2(\xi, \eta)$ 와 $W_3(\xi, \eta)$ 는 정확히 지배 방정식을 만족하므로 세 해를 중첩한 해 $W(\xi, \eta)$ 역시 지배방정식을 만족시킨다.[6]
마지막으로 컴퓨터 프로그램을 이용한 고유값 및 모드형을 구하기 위한 고유값 행렬은

중첩해 $W(\xi, \eta)$ 가 각각의 구성블력을 경계조건에 따라 중첩했을 때도 정확하게 해가 일치한다는 사실로 구할 수 있다.

사용되는 경계조건은 $\xi=0$ 일 때 법선방향 기울기가 0인 경우와, $\xi=1$, $\eta=1$ 일 때 무차원화된 굽힘모멘트가 0이라는 두 가지 경우이다.

먼저, $\xi=0$ 일 경우를 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mid_{\xi=0} + \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mid_{\xi=0} + \frac{\partial W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mid_{\xi=0} = 0 \quad (2.16)$$

여기서 각 항을 전개하여 표현하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mid_{\xi=0} &= \frac{E_m(m\pi/2)}{\theta_{11m}} (\cosh \beta_m \eta + \theta_{1m} \cosh \gamma_m \eta) \\ \text{or} \quad &= \frac{E_m(m\pi/2)}{\theta_{22m}} (\cosh \beta_m \eta + \theta_{2m} \cosh \gamma_m \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mid_{\xi=0} &= \frac{E_n(m\pi/2)}{\theta_{11n}} (\beta_n + \theta_{1n} \gamma_n) \cos n\pi\eta \\ \text{or} \quad &= \frac{E_n(m\pi/2)}{\theta_{22n}} (\beta_n + \theta_{2n} \gamma_n) \cos n\pi\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mid_{\xi=0} &= \frac{-E_p}{(\gamma_p^2 + \beta_p^2) \cos \gamma_p} (\gamma_p \sin \gamma_p + \frac{\beta_p \cos \gamma_p}{\cosh \beta_p} \sinh \beta_p) \cos p\pi\eta \\ \text{or} \quad &= \frac{E_p}{(\gamma_p^2 - \beta_p^2) \cos \gamma_p} (-\gamma_p \sin \gamma_p + \frac{\beta_p \cosh \gamma_p}{\cosh \beta_p} \sinh \beta_p) \cos p\pi\eta \end{aligned}$$

가 된다.

다음으로, $\xi=1$, $\eta=1$ 일 때 무차원화된 굽힘모멘트가 0 일 경우를 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\frac{b^2 M_1(\xi)}{aD} \mid_{\eta=1} + \frac{b^2 M_2(\xi)}{aD} \mid_{\eta=1} + \frac{b^2 M_3(\xi)}{aD} \mid_{\eta=1} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{M_1(\eta)a}{D} \mid_{\xi=1} + \frac{M_2(\eta)a}{D} \mid_{\xi=1} + \frac{M_3(\eta)a}{D} \mid_{\xi=1} = 0 \quad (2.18)$$

위의 세가지 형태의 경계조건을 이용하여 해를 중첩하게 된다.

위의 해를 중첩하면 각각의 경계조건에 따라 3개의 연립방정식이 만들어 지며, 총 9개의 연립방정식을 만들 수 있으며, 9개의 미지수를 포함하고 있는 형태이다. 이는 일반 선형체차연립방정식 해법으로 계수 E_m , E_n , E_p 를 구할 수 있다. 이는 고유값 λ^2 값을 찾은 후에 계산한다.

E_m	E_n	E_p
$m=1$	$n=0$	$p=0$
3	1 2	1 2
0 0	— — —	— — —
0 0	— — —	— — —
0 0	— — —	— — —
— — —	0 0	— 0 0
— — —	0 0	0 — 0
— — —	0 0	0 0 —
— — —	— 0 0	— 0 0
— — —	0 — 0	0 — 0
— — —	0 0 —	0 0 —

Fig.2.6 Format of the coefficient matrix used in the analysis of the symmetric modes of the cantilever plate.

Fig.2.6의 고유값행렬을 $A(m,n)$ 이라 두면, $m=n=9$ 가 되며 E_m , E_n , E_p 앞 각 항들이 서로 종속하는 성질을 이용하여 행렬식에 포함된 무차원 고유값 λ^2 값을 찾을 수 있다. 즉, 행렬식의 값이 0이 되게 하는 λ^2 값이 바로 고유값이다.

고유값을 찾기 위한 단계를 요약하면 다음과 같다.

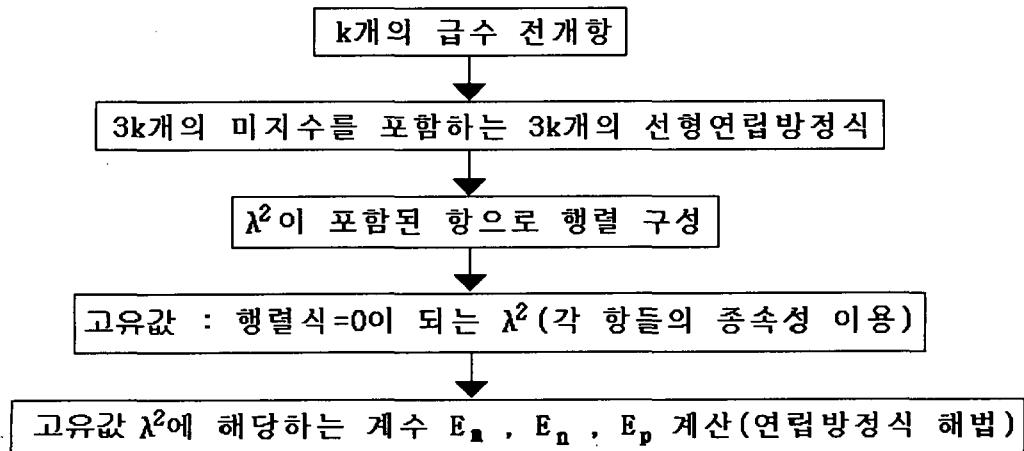


Fig. 2.7 Flow chart for eignvalue calculation

3. 실험

3.1 실험 모델

실험을 통한 고유진동수는 아래에 보이는 Fig.3.1과 Fig.3.2와 같이 종횡비(a/b) 2.5, 1.5, 1, 2/3의 네 종류에 대해 수행하였다.

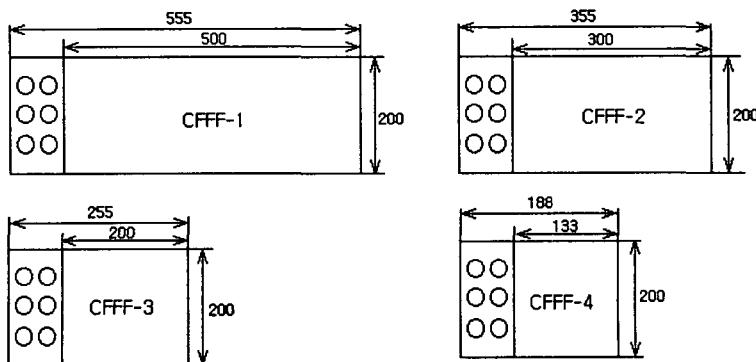


Fig.3.1 Rectangular plates and dimension(mm)

Table 3.1 Geometry and material property of vibration test model

Model	Whole Size (mm × mm)	Test Size (mm × mm)	Thickness (mm)	Young's Modulus (N/mm ²)
CFFF-1	555 × 200	500 × 200	5	210000
CFFF-2	355 × 200	300 × 200	5	210000
CFFF-3	255 × 200	200 × 200	5	210000
CFFF-4	188 × 200	133 × 200	5	210000

Table 3.1은 실험에 사용된 4가지 평판의 치수 및 재료의 특성을 나타내고 있으며, 고정판은 총 6개의 볼트로 구속할 수 있도록 제작되었으며 판의 치수는 200mm × 55mm이다.

3.2 실험장치

실험장치는 실험 모델과 진동분석장치로 구성되어 있다. 실험모델은 위에서 살펴본 시편들을 Fig.3.2와 같이 한변을 고정용판을 이용하여 구속하는 형태로 구성되어 있다. 판의 고정을 위해 직경이 10mm인 6개의 암나사를 사용한다.

진동분석장치는 주파수분석기, 충격해머, 가속도계로 구성되며, 실험에 사용한 주파수

분석기는 B&K사의 Signal Analyzer 3550 type을 이용하였다. Fig.3.2은 실험준비 세팅이 완료된 상태를 나타내고 있다

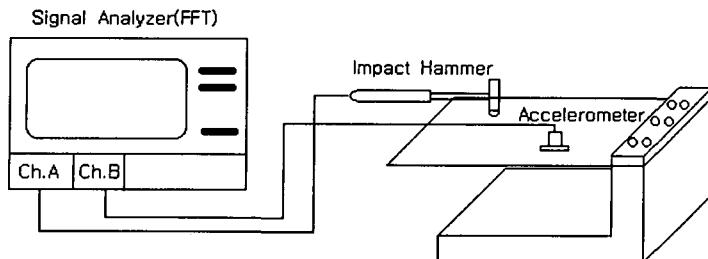


Fig.3.2 Experimental set-up

3.3 실험결과

4가지 종횡비에 관하여 외팔형평판의 충격가진을 이용한 모달해석을 수행한 결과는 Table 3.2와 같다

Table 3.2 Experimental results of the plate modal analysis

Mode	Model			
	CFFF-1(Hz)	CFFF-2(Hz)	CFFF-3(Hz)	CFFF-4(Hz)
1	16	46	100	214
2	80	150	238	398
3	100	282	620	920
4	260	520	800	1395
5	288	684	882	1610

4. 계산결과에 관한 고찰

컴퓨터를 이용한 계산에 있어, 포트란 언어보다 많은 내장함수를 포함하고 있는 MATLAB 언어로 코딩하여 계산을 수행하였다[8][9].

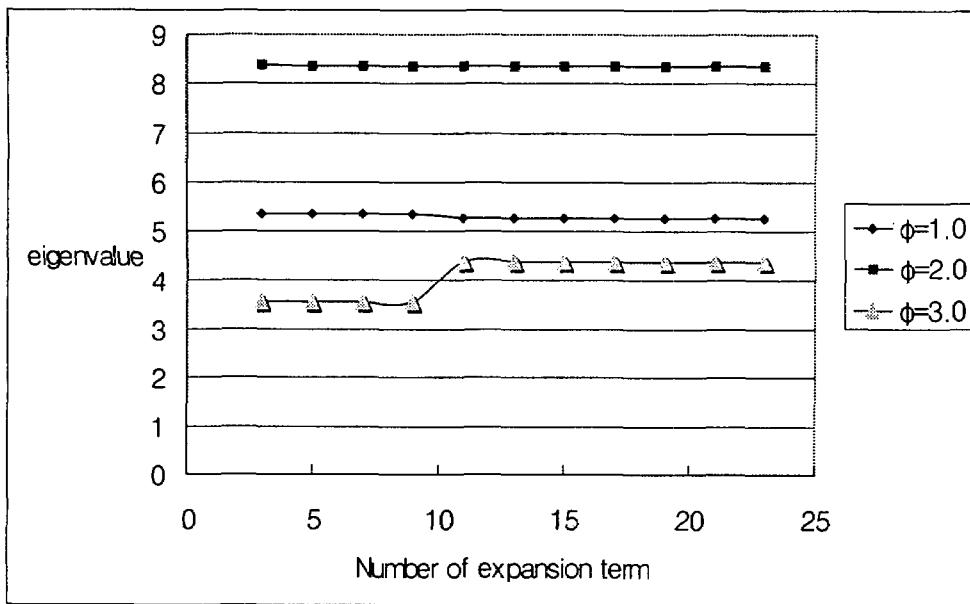


Fig.4.1 Eigenvalue versus the number of terms in expansions

Fig.4.1는 수렴을 확인하는 그림으로 $\phi = 1, 2, 3$ 에 대하여 수행하였다.

그 결과 전개항의 개수 k 는 대략 9이상부터는 모든 값이 수렴하였으나, 더욱 더 정밀한 결과를 구하기 위해 $k=15$ 로 결정하여 프로그램상에서의 전개항의 개수를 결정하였다.

4.1 고유진동수

Table.4.1은 종횡비 2/3, 1, 1.5, 2.5에 대하여 계산한 고유진동수를 Gorman[2]의 해와 ANSYS(유한요소법)에 의한 수치해, 실험결과를 무차원화하여 고유진동수 5차 까지를 서로 비교 검토하였다. s 는 ξ 축에 대하여 대칭임을 의미하여 a 는 ξ 축에 대하여 비대칭임을 의미한다. 여기서 $v=0.333$ 으로 두고 계산하였다.

Table 4.1 각 종횡비에 따른 무차원 고유값 λ^2 의 비교, $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$

종횡비($a/2b$), $\phi = 2.5$					
차수	계산결과	실험결과	Gorman	ANSYS	모드형
1	3.407	3.31	3.406	3.41	s
2	17.58	16.52	17.58	17.62	a
3	21.24	20.66	21.24	21.28	s
4	56.13	53.72	56.14	56.19	a
5	59.71	59.50	59.72	59.75	s

Table 4.1 (continued)

$\phi = 1.5$					
차수	계산결과	실험결과	Gorman	ANSYS	모드형
1	3.437	3.42	3.438	3.440	s
2	11.43	11.15	11.43	11.49	a
3	21.32	20.98	21.32	21.38	s
4	38.71	38.68	38.70	38.76	a
5	53.07	50.88	53.06	53.10	s

$\phi = 1.0$					
차수	계산결과	실험결과	Gorman	ANSYS	모드형
1	3.46	3.305	3.459	3.463	s
2	8.356	7.87	8.356	8.359	a
3	21.12	20.42	21.09	21.12	s
4	27.08	26.45	27.06	27.07	s
5	30.54	29.15	30.55	30.56	a

$\phi = 2/3$					
차수	계산결과	실험결과	Gorman	ANSYS	모드형
1	3.477	3.14	3.477	3.478	s
2	6.287	5.786	6.288	6.292	a
3	14.26	13.51	14.26	14.30	s
4	21.85	20.48	21.88	21.91	s
5	25.54	23.64	25.59	25.62	a

Table 4.1에서 알 수 있듯이 각 종횡비에 따른 무차원 고유값을 비교한 결과 계산결과와 Gorman이 제공하는 결과값 그리고 ANSYS에 의한 수치해의 결과는 1%미만의 오차를 보이고 있어, 서로 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 실험결과와 비교한 결과는 $\phi = 2/3$ 에서는 약 5.3~9.7%사이의 오차를 가지며 평균 7%의 오차를 보이고 있고, $\phi = 1.0$ 에서는 약 2.3~5.9%사이의 오차와 평균 4%의 오차를 보인다. $\phi = 1.5$ 에서는 평균 2%정도의 적은 오차를 보이며 $\phi = 2.5$ 에서는 평균 4%정도의 오차를 보이고 있다. 이러한 실험결과의 오차의 원인을 살펴보면, 경계조건에 있어 볼트로 고정된 경계의 구속의 불완전성, 제작된 평판의 가공시 변형 및 재료두께의 영향등을 그 원인으로 생각할 수 있다. 여기서 accelerometer의 부가질량효과는 판의 무게에 비해 1/100 미만의 값을 가지므로 부가질량의 효과는 무시할 수 있다.

Table 4.2 Calculated eigenvalues for cantilever rectangular plate

Aspect ratio (a/2b), $\phi = 3$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.394	s
2	20.68	a
3	21.22	s
4	59.61	s
5	65.10	a
6	117.4	s
7	118.1	a
8	183.8	a
9	192.0	s

$\phi = 2.5$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.407	s
2	17.58	a
3	21.24	s
4	56.13	a
5	59.71	s
6	104.3	a
7	117.0	s
8	143.5	s
9	166.8	a

$\phi = 2$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.421	s
2	14.49	a
3	21.29	s
4	47.32	a
5	59.77	s
6	91.23	a
7	92.68	s
8	117.8	s
9	151.3	a

$\phi = 1.5$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.437	s
2	11.43	a
3	21.32	s
4	38.71	a
5	53.07	s
6	61.55	s
7	79.29	a
8	84.50	s
9	135.5	a

$\phi = 1.25$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.449	s
2	9.896	a
3	21.33	s
4	34.54	a
5	38.95	s
6	61.03	s
7	68.23	s
8	73.69	a
9	99.04	a

$\phi = 1$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.46	s
2	8.356	a
3	21.12	s
4	27.08	s
5	30.54	a
6	53.55	s
7	61.14	s
8	63.62	a
9	70.65	a

(continued)

Table 4.2 (continued)

$\phi = 1/1.25$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.471	s
2	7.115	a
3	18.18	s
4	22.23	s
5	27.59	a
6	42.78	a
7	43.82	s
8	60.94	s
9	66.08	a

$\phi = 2/3$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.477	s
2	6.287	a
3	14.26	s
4	21.58	s
5	25.54	a
6	31.30	a
7	37.96	s
8	56.04	s
9	56.15	a

$\phi = 1/2$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.486	s
2	5.278	a
3	10.01	s
4	18.84	a
5	21.79	s
6	24.56	a
7	31.08	s
8	31.88	s
9	42.67	a

$\phi = 1/2.5$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.494	s
2	4.711	a
3	7.948	s
4	13.65	a
5	21.36	s
6	22.95	s
7	23.45	a
8	28.54	s
9	34.37	a

$\phi = 1/3$		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	3.497	s
2	4.369	a
3	6.738	s
4	10.74	a
5	16.74	s
6	21.93	s
7	22.68	a
8	25.43	a
9	26.53	s

Table.4.2는 1/3에서 3까지의 주요 11개의 종횡비에 따라 eigenvalue와 모우드형상을 정리하였다. 그 결과 모든 종횡비의 영역에서 계산값이 Gorman의 값과 1%미만의 오차를 보이는 정확한 결과값을 얻을 수 있었다. 즉, 대칭인 모드와 비대칭인 모드 모두 정확한 값을 보이고 있다. 테이블로 정리된 주요 11개의 종횡비에 따른 무차원 고유값은 직접계산시 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

5. 결론

본 논문에서는 중첩법을 이용하여 한변고정 직사각형 평판의 진동해석을 수행하였다. 4 가지의 종횡비에 따른 계산결과와 Gorman[2], ANSYS에 의한 계산결과와 실험을 통한 실험결과와 비교하였고, 해석과정 및 결과에서 중첩법의 장점을 확인하였다. 이들을 종합하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 중첩법에 의해 계산된 무차원 고유진동수들은 타 문헌자료 및 유한요소해석에 의한 값과 비교한 결과, 전반적으로 1%미만의 차이로 좋은 일치를 보였다. 따라서 이 해석 방법은 직사각형 평판의 진동해석에 있어 유용한 방법임을 확인하였다.

(2) 컴퓨터를 이용한 수치계산에서 무차원해는 급수전개항이 15개 이상부터 수렴을 하였으며, 다른 모드형에서도 마찬가지 결과를 보였다. 이를 통해서 살펴본 결과, 본 연구에서 사용한 중첩법을 이용하고, 컴퓨터를 사용하여 계산하면 수렴이 빠르고, 급수항의 개수에 따라 정밀해에 매우 근접할 수 있는 정밀해석법으로 그 유용함을 확인하였으며, 일반적인 모든 평판의 경계조건에 적용이 가능한 장점이 있음을 확인하였다.

(3) 실험결과와 계산값의 오차는 대략 2~10%정도를 보였으며 평균적으로는 약 5% 정도의 오차를 보였다. 이는 실험모델의 불완전한 경계조건의 구성 및 실험시편의 제작시의 오차 등이 그 원인이 된다고 생각된다. 고정볼트의 개수를 늘리고, 좀더 세밀한 시편을 제작하면 그 오차는 많이 줄여들 것으로 생각된다.

결론적으로, 위의 중첩법을 이용한 등방성평판의 연구를 토대로 더 나아가 이방성평판의 진동해석을 수행하는데 기초가 될 것으로 사료된다.

참고문헌

1. 한국선급, 선박 진동소음 제어지침, 한국선급, pp.191~192, 1997.
2. Gorman, D. J., A Comprehensive to the Free Vibration Analysis of Rectangular Plates by Use of the Method of Superposition, Journal of Sound and Vibration 47, pp.126~128, 1979.
3. 金極天, 丁泰榮, 直四角形板의 振動解析, 大韓造船學會誌 第14卷 第1號, pp.1~10, 1977.
4. Nack Joo Lee and Chan Hong Yum, Free Vibration Analysis of a Rectangular Plate Clamped on Three Edges and Free on the Fourth Edge, 韓國航空宇宙學會誌 第9卷 第2號, pp.9~12, 1981.12.
5. Timoshenko, S. P. and Woinowsky K. S., Theory of Plates and Shells : second edition, McGraw-Hill, 1959.
6. Rudolph Szilard, Theory and Analysis of Plates : Classical and Numerical Methods, Prentice-Hall, 1974.
7. Troitsky, M. S., Stiffened Plates : Bending, Stability and Vibrations, Elsevier Scientific Publishing Company, 1976.
8. Halvorson, W. G. and Brown, D. L., Impulse Technique for Structural Frequency Response Testing, Sound and Vibration, November, pp. 8~21, 1977.
9. Duane Hanselman and Bruce Littlefield, Mastering MATLAB 5 : A Comprehensive Tutorial and Reference, Prentice-Hall, 1998.
10. Chapman, S. J., MATLAB : Programming for Engineers, Brooks/Cole, 2000.
11. Korn, G. A. and Korn, T. M. Mathematical Handbook ; For Scientists and Enigneers, McGraw-Hill, 1968.
12. Gorman, D. J., Accurate Free Vibration Analysis of Point Supported Mindlin Plates by The Superposition Method, Journal of Sound and Vibration 47, pp.265~277, 1999.
13. 안시영·임홍일 “중첩법을 이용한 네변고정 직사각형평판의 횡진동해석”, 울산대학교 공학 연구논문집 제32권 제1호, pp.127~146, 2001