

Ring으로 補剛된 圓筒形 Shell에 대한 流體 靜水壓의 follower force effect를 고려한 挫屈解析

朴 稚 模
造船 및 海洋工學科
(1985. 4. 30 접수)

〈要 約〉

Ring으로 補剛된 圓筒形 Shell의 挫屈解析을 線形 Bifurcation 挫屈理論을 利用한 有限要素法에 依하여 수행하였다.

Shell의 바깥 쪽에서 作用하는 流體 靜水壓은 Follower Force로 취급하였으며, 좌굴 Mode로서는 General Buckling과 Interframe Buckling을 고려하여 그들 각각에 대한 좌굴壓力과 Mode Shape을 決定하였다.

한편, Ring 補剛材를 Shell의 안 쪽에 붙이는 경우와 바깥 쪽에 붙이는 경우에 대한 좌굴강도를 비교하였다.

Stability Analysis of Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shells taking the Follower Force Effect of Hydrostatic Pressure into account

Park, Chi-Mo

Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering

(Received April 30, 1985)

〈Abstract〉

A finite-element formulation is presented for the stability analysis of ring-stiffened circular cylindrical shells using linear bifurcation buckling theory.

External hydrostatic pressure is treated as a follower force.

Critical pressure and mode shape in both general buckling mode and interframe buckling mode have been obtained using this formulation.

Critical pressures for cylinder with internal and external stiffener are compared.

I. 序 論

圓筒形 Shell 構造物은 膜應力(membrane stress)에 대한 剛性을 가장 효과적으로 갖는 것으로, 補剛하는 目的은 이 구조물에 嵩힘剛性을 주어 挫屈強度를 向上시키기 위함이다.

本 研究에서는 線形 bifurcation 挫屈이론에 有限

要素法을 적용하여, 嵩수한 선각의 기본을 이루는 ring으로 補剛된 圓筒形 Shell에 外壓(특히, 流體 靜水壓)이 作用하는 경우에 대한 挫屈해석을 수행하였다.

補剛된 회전 Shell의 붕괴양식은 다음의 세 가지로 생각할 수 있다.

- Interframe Shell buckling (Fig. 1a)
- General buckling (Fig. 1b)

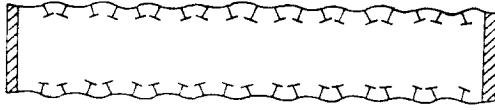


Fig. 1a Interframe buckling mode

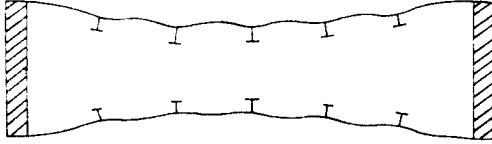


Fig. 1b General buckling mode

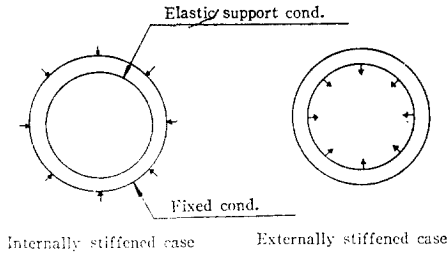


Fig. 1c Ring stiffener에 작용하는 힘

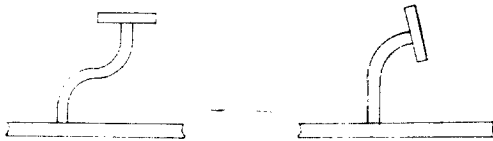


Fig. 1d Ring stiffener의 lateral buckling (Internally stiffening의 경우)

• Ring 補剛材의 Lateral buckling (Fig. 1d)

이들 중 제1번 變形 mode는 ring이 Shell의 안쪽에 붙은 경우에만 해당되는 것으로서(Fig. 1c), 本 論文에서는 고려되지 않았다.

圓筒形 Shell 양단의 경계조건으로서는 다음의 두 가지를 택하였다.

- 단순지지 경계조건
- 고정 경계조건

또한, 靜水壓의 Follower force effect를 고려하여 좌굴에 대한 그 영향을 고찰하였다.

한편, Ring 補剛材를 Shell의 안쪽에 붙이는 경우와 바깥쪽에 붙이는 경우, 각각에 대한 좌굴압력을 계산하여 비교하였다.

II. 問題의 定式化

1. 概 要

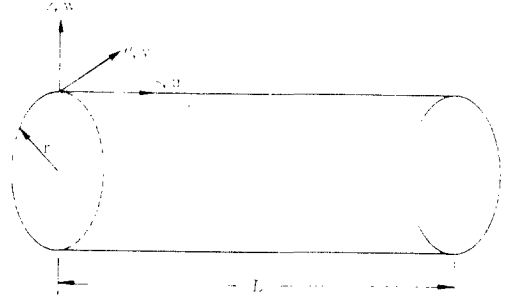


Fig. 2 Coordinate system of cylindrical shell

축대칭 Shell의 表面과 兩端에 축대칭 하중이 작용할 때 좌굴 前 상태(*e*-상태)에서의 變位는, 원주 방향의 變位 $v=0$ 이므로, $\vec{u}^{(e)} = (u^{(e)}, w^{(e)})$ 로, 좌굴 mode에 대하여 微小교란된 상태(*p*-상태)에 대한 變位는, $\vec{u}^{(p)} = (u^{(p)}, v^{(p)}, w^{(p)})$ 로 표현할 수 있다.

여기서, *e*-상태와 *p*-상태에서 모두 평형이 이루어지기 위한 조건은, 가상일의 原理와 Stationary Potential 에너지 原理로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta^{(1)}[U^{(2)}; \Omega^{(2)}] = 0 \tag{1}$$

여기서, $U^{(2)}$: 變形에너지의 $\vec{u}^{(p)}$ 에 대한 2次項

$\Omega^{(2)}$: 外力에 의한 Potential의 $\vec{u}^{(p)}$ 에 대한 2次項

2. Shell의 變形에너지

thin shell에 대한 變形에너지는 다음과 같이 표현된다. ⁽¹⁾⁽²⁾

$$U_{sh} = U_m + U_b = \frac{1}{2} \iint [C\{\epsilon_{\alpha\beta}^2 + \epsilon_{\alpha\beta}^2 + 2\nu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + 2(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta}^2\} + D\{k_{\alpha\beta}^2 + k_{\alpha\beta}^2 + 2\nu k_{\alpha\beta}k_{\alpha\beta} + 2(1-\nu)k_{\alpha\beta}^2\}] r d\theta ds \tag{2}$$

여기서, U_m : membrane 變形에너지

U_b : 굽힘 變形에너지

$\epsilon_{\alpha\beta}$: membrane strain

$k_{\alpha\beta}$: curvature change

(bending strain)

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

교란된(perturbed) 상태에서의 全變形度는 다음과 같다.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + \epsilon_{\alpha\beta}^{(1)} + \epsilon_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (3)$$

$$k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}^{(0)} + k_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (4)$$

(3), (4)式을 (2)式에 代入하고, 2次項을 가려 쓰고, 다음과 같이 두 부분으로 나누어 쓴다.

$$U_{ii}^{(2)} = U_{iii}^{(2)} + U_{iis}^{(2)} \quad (5)$$

여기서, $U_{iii}^{(2)}$; $\epsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$ 와 $k_{\alpha\beta}^{(1)}$ 만으로 이루어지는 부분 (剛性 matrix 에 기여)

$U_{iis}^{(2)}$; $\epsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ 와 $\epsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$ 만으로 이루어지는 부분 (기하학적 강성 matrix 에 기여)

即,

$$U_{iii}^{(2)} = \frac{1}{2} \iint [C\{(\epsilon_{\theta\theta}^{(1)})^2 + (\epsilon_{\theta\theta}^{(1)})^2 + 2\nu\epsilon_{\theta\theta}^{(1)}\epsilon_{\theta\theta}^{(1)} + 2(1-\nu)(\epsilon_{\theta\theta}^{(1)})^2 + D\{(k_{\theta\theta}^{(1)})^2 + (k_{\theta\theta}^{(1)})^2 + 2\nu k_{\theta\theta}^{(1)}k_{\theta\theta}^{(1)} + 2(1-\nu)(k_{\theta\theta}^{(1)})^2\}] r d\theta ds \quad (6)$$

$$U_{iis}^{(2)} = \frac{1}{2} \iint 2C\{\epsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\epsilon_{\theta\theta}^{(1)} + \nu\epsilon_{\theta\theta}^{(1)}) + \epsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\epsilon_{\theta\theta}^{(0)} + \nu\epsilon_{\theta\theta}^{(1)}) + 2(1-\nu)\epsilon_{\theta\theta}^{(0)}\epsilon_{\theta\theta}^{(1)}\} r d\theta ds \quad (7)$$

3. Ring 補剛材의 變形에 너지

Ring 補剛材의 變形에 너지는 다음과 같이 표현된다. (1) (3)

$$U_{ii} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int E\{A_i \epsilon_{\theta\theta}^2 + I_i k_{\theta\theta}^2\} r_i d\theta \quad (8)$$

여기서,

- N ; ring-補剛材의 數
- ϵ_{θ} ; ring-補剛材의 extensional strain
- k_{θ} ; ring-補剛材의 curvature strain
- r_i ; ring-補剛材 斷面의 圓心에서의 곡률半徑
- A_i ; ring-補剛材의 斷面積
- I_i ; ring-補剛材 斷面의 2次 moment

Ring 補剛材의 變形度 ϵ_{θ} , k_{θ} 를 Shell 中央面에서의 變形度 $\epsilon_{\theta\theta}$, $k_{\theta\theta}$ 의 項으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\epsilon_{\theta} = \epsilon_{\theta\theta} \times \frac{r}{r_s} + Z k_{\theta\theta} \quad (9)$$

$$k_{\theta} = k_{\theta\theta} \quad (10)$$

여기서,

Z ; Shell 中央面과 補剛材 斷面의 圓心사이의 거리

(9), (10)式을 (8)式에 代入하고, 여기에 (3), (4)式을 代入하고, 2次項만을 가려서, Shell의 경우와 마찬가지로, 다음과 같이 두 부분으로 나누어 쓸 수 있다.

$$U_{ii}^{(2)} = U_{iii}^{(2)} + U_{iis}^{(2)} \quad (11)$$

여기서,

$$U_{iii}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int E\{A_i \left(\epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \cdot \frac{r}{r_s}\right)^2 + 2A_i Z \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \frac{r}{r_s} k_{\theta\theta}^{(1)} + (A_i Z^2 + I_i)(k_{\theta\theta}^{(1)})^2\} r_i d\theta \quad (12)$$

$$U_{iis}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \int E A_i \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} \frac{r}{r_s} \left(\epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \cdot \frac{r}{r_s} + Z k_{\theta\theta}^{(1)}\right) r_i d\theta \quad (13)$$

4. Potential due to Circumferential Pressure load with follower force effect

Shell 表面에 作用하는 流體 靜水壓은 항상 면에 수직하게 作用하므로 Shell이 變形함에 따라 그 크기와 方向이 變化하는데 이것을 follower force effect라 한다.

Follower force effect가 없는 保存力이 作用할 경우, 外力에 의한 Potential은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega = - \int_A \bar{p} \cdot \bar{u} dA \quad (14)$$

이 때, (14)式에 $\bar{u} = \bar{u}^{(1)} + \bar{u}^{(2)}$ 를 代入하면 $\bar{u}^{(2)}$ 에 대한 2次項은 存在하지 않는다.

그러나, Follower force type의 하중일 경우, (14)式은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\Omega = - \int_A \int_V \bar{p} dA \cdot d\bar{u} \quad (15)$$

여기서,

\bar{p} ; 單位 面積當 壓力荷重

Fig.2에서, 變形前 (s, θ, r)로 표시되는 점의 變形後의 위치 Vector \bar{R} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{R} = (s+u, v, r+w) = (s+u)\bar{e}_s + v\bar{e}_{\theta} + (r+w)\bar{e}_r$$

여기서, $\bar{e}_s, \bar{e}_{\theta}, \bar{e}_r$ 는 각각 s, θ, z 方向의 單位 Vector.

變形後의 微小面積의 크기와 法線方向을 갖는 Vector $d\bar{A}$ 는

$$d\bar{A} = (\bar{R}_s \times \bar{R}_{\theta}) d\theta ds \quad (17)$$

變位 Vector의 變分 $d\bar{u}$ 는,

$$d\bar{u} = (du, dv, dw) \quad (18)$$

로 쓸 수 있다.

따라서, (16), (17), (18)式을 (15)式에 代入하고, 變位 u, v, w 가 연속적이고 같은 비율로 발생한다는 假定 下에 積分을 수행한 다음, 그 결과에 $\bar{u} = \bar{u}^{(1)} + \bar{u}^{(2)}$ 를 代入하고 $\bar{u}^{(2)}$ 에 대한 2次項을 모으면, 다음과 같다.

$$\Omega^{(2)} = \frac{1}{2} \bar{p} \iint \{ (w^{(2)})^2 + w^{(2)} v^{(2)} \delta^{\theta\theta} + r w^{(2)} u^{(2)} \delta^{\theta\theta} + (v^{(2)})^2 - v^{(2)} w^{(2)} \delta^{\theta\theta} - r u^{(2)} w^{(2)} \delta^{\theta\theta} \} d\theta ds \quad (19)$$

Ⅲ. 有限要素의 定式化

1. 變位函數의 假定

원통形 Shell 을 각 절점에서 4개의 自由度(u, v, w, β)를 갖는 離散化하고, 각 요소 內의 變位함수를 다음과 같이 가정한다. (Fig. 3)

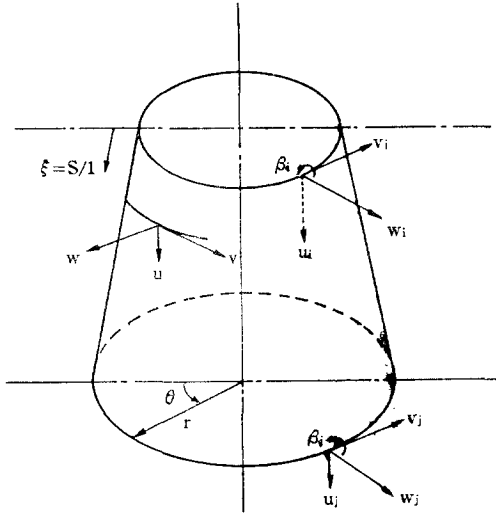


Fig. 3. Element geometry with displacement degrees of freedom

$$\begin{aligned} u &= (\alpha_1 + \alpha_2 \xi) \cos j\theta \\ v &= (\alpha_3 + \alpha_4 \xi) \sin j\theta \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} w &= (\alpha_5 + \alpha_6 \xi + \alpha_7 \xi^2 + \alpha_8 \xi^3) \cos j\theta \\ \beta &= \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{l} (\alpha_6 + 2\alpha_7 \xi + 3\alpha_8 \xi^2) \cos j\theta \end{aligned}$$

여기서,

$$\xi = \frac{s}{l}, \quad l \text{ 는 요소의 길이}$$

(20)式에서,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta \end{Bmatrix}_{\xi=0} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta \end{Bmatrix}_{\xi=1} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \text{ 이므로,}$$

{ α }를 소개하고, 要素內 變位를 절점 變位로 나타내면,

$$\begin{aligned} u &= [(1-\xi)u_i + \xi u_j] \cos j\theta \\ v &= [(1-\xi)v_i + \xi v_j] \sin j\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= [(1-3\xi^2+2\xi^3)w_i + l(\xi-2\xi^2+\xi^3)\beta_i \\ &\quad + (3\xi^3-2\xi^2)w_j + l(-\xi^2+\xi^3)\beta_j] \cos j\theta \\ \beta &= \left[-\frac{6}{l}(\xi-\xi^2)w_i + (1-4\xi+3\xi^2)\beta_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{l}(\xi-\xi^2)w_j + (-2\xi+3\xi^2)\beta_j \right] \cos j\theta \end{aligned} \quad (21)$$

2. 變形度—變位關係

變形度—變位 關係式 (3)을 강성 matrix를 구성하게 될 1次項과 기하학적 강성 matrix를 구성하게 될 2次項으로 나누어 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{rs} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{s\theta} \\ k_{rs} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{s\theta} \end{Bmatrix} \{ \epsilon \} = \{ \epsilon^{(1)} \} + \{ \epsilon^{(2)} \}$$

$$= \begin{Bmatrix} u_{,s} \\ v_{,s} - \frac{u}{r} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{,\theta}}{r} + v_{,s} \right) \\ -w_{,ss} \\ -\frac{w_{,s\theta}}{r^2} + \frac{v_{,\theta}}{r^2} \\ \frac{v_s}{2r} - \frac{w_{,s\theta}}{r} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} (w_{,s})^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{v}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r} \right)^2 \\ \frac{1}{2r} w_{,s} w_{,\theta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

(21)式을 (22)式의 { $\epsilon^{(1)}$ }에 代入하고, { $\epsilon^{(1)}$ }을 matrix 형태로 쓰면,

$$\{ \epsilon^{(1)} \} = [B] \{ \delta \} \quad (23)$$

여기서, { δ }는 요소의 절점변위를 나타내는 column matrix.

[B]는 요소의 절점변위와 변형도의 1次項과의 關係를 나타내는 matrix.

(22)式의 { $\epsilon^{(2)}$ }中에서,

$$\phi_s = w_{,s}, \quad \phi_\theta = \frac{v}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r} \quad (24)$$

로 놓으면,

$$\epsilon_{ss}^{(2)} = \frac{1}{2} \phi_s^2, \quad \epsilon_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{1}{2} \phi_\theta^2 \quad (25)$$

으로 쓸 수 있다.

(24)式에 (21)式을 代入하고 定理하면,

$$\{ \phi \} = \begin{Bmatrix} \phi_s \\ \phi_\theta \end{Bmatrix} = [G] \{ \delta \} \quad (26)$$

여기서,

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{6}{l} - (\xi + \xi^2)\cos j\theta & (1 - 4\xi + 3\xi^2)\cos j\theta \\ 0 & \frac{1}{r}(1 - \xi)\sin j\theta & \frac{j}{r}(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\sin j\theta & \frac{lj}{r}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\sin j\theta \\ 0 & 0 & \frac{6}{l}(\xi - \xi^2)\cos j\theta & (-2\xi + 3\xi^2)\cos j\theta \\ 0 & \frac{\xi}{r}\sin j\theta & \frac{j}{r}(3\xi^2 - 2\xi^3)\sin j\theta & \frac{jl}{r}(-\xi^2 + \xi^3)\sin j\theta \end{bmatrix}$$

3. 應力-變形度 관계式

(6)式의 $U_{22}^{(2)}$ 는 應力-變形度 관계를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\epsilon^{(i)}\}^T [D_{,i}] \{\epsilon^{(i)}\} r d\theta ds \quad (27)$$

여기서,

$$[D_{,i}] = \begin{bmatrix} c & \nu c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu c & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu)c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu)D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{:Shell의} \\ \text{Stress-} \\ \text{Strain} \\ \text{matrix} \end{array}$$

(12)式의 $U_{22}^{(2)}$ 는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\epsilon^{(i)}\}^T [D_{,i}] \{\epsilon^{(i)}\} r d\theta \quad (28)$$

여기서,

$$[D_{,i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA_r \frac{r}{r_i} & 0 & 0 & EA_r Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA_r Z & 0 & 0 & E(A_r Z^2 + I_r) \frac{r_i}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{:Stiffener의 Stress-Strain matrix} \end{array}$$

4. 要素의 剛性 matrix

(27)式에 (23)式을 代入하면,

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_0^{2\pi} [B]^T [D_{,i}] [B] r d\theta ds \{\delta\} \\ = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{,i}] \{\delta\} \quad (29)$$

여기서, $[k_{,i}]$ 는 Shell 요소의 剛性 matrix이다.

(28)式에 (23)式을 代入하면,

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_0^{2\pi} [B]^T [D_{,i}] [B] r d\theta \cdot \{\delta\} \\ = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{,i}] \{\delta\} \quad (30)$$

여기서, $[k_{,i}]$ 는 Ring 補剛材의 剛性 matrix이다.

한편, 挫屈 前 平衡상태에서의 變形度와 힘의 세기(Force Intensity)사이의 관계는 다음과 같다.⁽³⁾

$$N_i^{(c)} = C(\epsilon_{ii}^{(c)} + \nu \epsilon_{\theta\theta}^{(c)}) \\ N_{\theta\theta}^{(c)} = C(\epsilon_{\theta\theta}^{(c)} + \nu \epsilon_{ii}^{(c)}) \quad (31) \\ N_{\theta\theta}^{(c)} = C \frac{(1-\nu)}{2} \epsilon_{\theta\theta}^{(c)}$$

(31)式을 (7)式의 $U_{22}^{(2)}$ 에 代入하고, $N_{\theta\theta}^{(c)}=0$ 임을 고려하면,

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^{NELEM} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ N_i^{(c)} \cdot \frac{1}{2} \phi_i^2 + N_{\theta\theta}^{(c)} \cdot \frac{1}{2} \phi_{\theta}^2 \right\} r d\theta ds \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NELEM} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\phi\}^T [N_{,i}] \{\phi\} r d\theta ds$$

여기서,

$$[N_{,i}] = \begin{bmatrix} N_i^{(c)} & 0 \\ 0 & N_{\theta\theta}^{(c)} \end{bmatrix}$$

여기에, (26)式($\{\phi\} = [G]\{\delta\}$)을 代入하면,

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [G]^T [N_{,i}] [G] r d\theta ds \{\delta\} \\ = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{ii}^c] \{\delta\} \quad (32)$$

여기서, $[k_{ii}^c]$ 는 Shell 요소의 기하학적 강성 matrix이다.

한편, Ring 補剛材의 경우, $N_i^{(c)} = EA_r \cdot \epsilon_{ii}^{(c)} \cdot \frac{r}{r_i}$ 로 놓고, $k_{\theta\theta}^{(c)}=0$ 임을 고려하면, (13)式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} N_i^{(c)} \cdot \epsilon_{ii}^{(c)} \cdot r d\theta = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} N_i^{(c)} \cdot (\phi_{\theta})^2 r d\theta \\ = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\phi\}^T [N_{,i}] \{\phi\} r d\theta \quad (33)$$

여기서,

$$[N_{,i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_i^{(c)} \end{bmatrix}$$

$N_i^{(c)}$: ring 보강재 단면에 걸리는 extensional force.

(33)式에 (26)式을 代入하면,

$$U_{22}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_0^{2\pi} [G]^T [N_{,i}] [G] r d\theta \cdot \{\delta\} \\ = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{ii}^c] \{\delta\} \quad (34)$$

여기서, [k_{ii}^o]는 Ring 보강재의 기하학적 강성 matrix 이다.

5. Pressure Stiffness [or Load Stiffness]

(19)식의 Ω⁽²⁾를 matrix 로 다음과 같이 쓸 수 있다.

Ω⁽²⁾ = ∫ ∫ {d}^T [p] {d} dθ ds (35)

여기서,

{d} = [u, u,, v, v,, w, w,, w,, 0, 0, 0, 0, 0]^T
[p] = [0, r/2, 0, 1/2, 1, -r/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T (36)

(21)식과 (36)식으로부터, {d} = [Q]{δ} (37)
(37)식을 (35)식에 대입하면, Ω⁽²⁾ = Σ {δ}^T * ∫ ∫ [Q]^T [p] [Q] dθ ds * {δ} (38)

여기서 [k_{ij}^o]는 流体 靜水壓의 Follower force effect 에 의한 것으로 이것을 'pressure stiffness' 라 하며, 기하학적 강성 matrix 에 추가되는 것으로 생각할 수 있다.

6. 固有值 問題

(29), (30), (32), (34), (38)식을 (1)식에 대입하면, 다음과 같다.

([K_{ss}] + [K_{ii}] + [K_{ss}^o] + [K_{ii}^o] + [K_{ij}^o]){Δ} = 0 (39)

여기서,

[K_{ss}] = Σ [k_{ss}]; Shell 의 전체 강성 matrix
[K_{ii}] = Σ [k_{ii}]; 補剛材의 전체 강성 matrix
{Δ} = Σ {δ}; 전체 결점 自由度

(39)식에서, [K] = [K_{ss}] + [K_{ii}], [K_c] = [K_{ss}^o] + [K_{ii}^o] + [K_{ij}^o]로 놓으면,

([K] + [K_c]){Δ} = 0 (40)

여기서, [K_c]는 壓力 p 를 포함하고 있으므로 λ = p(1-ν²) / E * r / t (無次元量)로 놓고 [K_c] = λ [K_c^o]로 대치하면, (40)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

([K] + λ [K_c^o]){Δ} = 0 (41)

(41)식이 nontrivial solution 을 찾기 위한 조건은 다음과 같다.

| [K] + λ [K_c^o] | = 0 (42)

(42)식은 λ 값을 찾는 固有值 問題이며, 이 식을 만족시키는 λ 값, 即, λ_i, 로 부터 좌굴 압력을 결정할 수 있다.

II. 數值解 및 考察

1. 프로그램의 構成

Subroutine INPUT 에서 Shell 과 Ring 補剛材의 기하학적 특성과 경계조건을 읽어 드리고 Subroutine STRESS 에서 撻屈 前 상태에 대한 應力을 계산한 뒤, Subroutine STIFF 에서 [K]와 [K_c]를 구하고, Subroutine SSPACE 에서 Subspace Iteration Method 에 의해 고유치 문제를 풀이 좌굴압력을 구하도록 하였다.

특히, 프로그램상에서, 원주방향의 Lobe 의 수를 2개에서 14개까지 변화시키면서, 각각의 Lobe 수에 대한 좌굴압력과 좌굴 mode 을 찾아보았다.

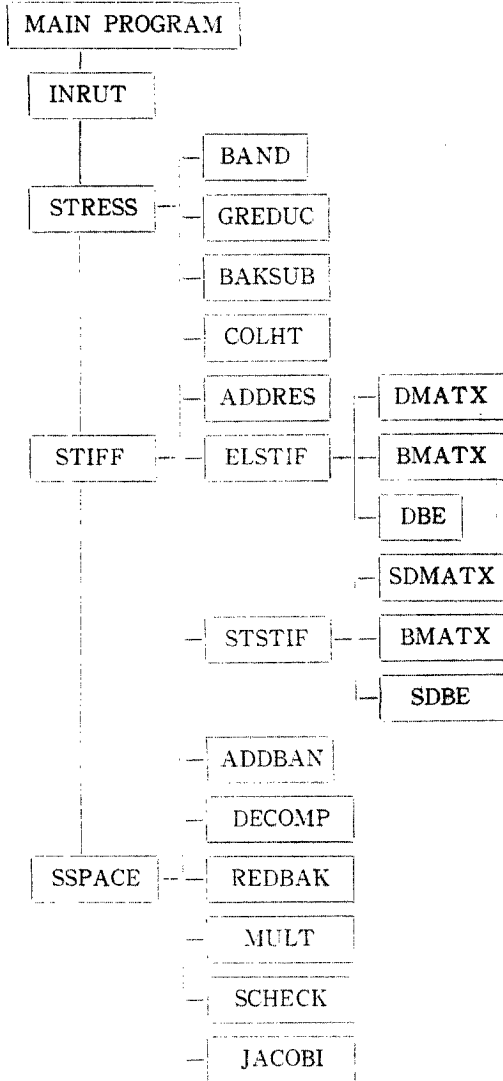
Flow Chart 는 다음과 같다.

2. 計算例 및 考察

Model 로서는 軸 方向과 Lateral 方向의 靜水壓을 받는 T-形 斷面의 Ring 으로 補剛된 鎔延鋁를 택하였다. [Fig. 4]

Fig. 4의 MODEL 에 대하여 Shell 전체를 길이 방향으로 60等分하여 계산하였으며 보강재가 Shell 의 안 쪽에 붙은 경우와 바깥 쪽에 붙은 경우 두 가지에 대하여 계산하였다.

경계조건 으로서는 다음의 두 가지를 고려하였다.



Flow Chart

a) 단순지지 조건

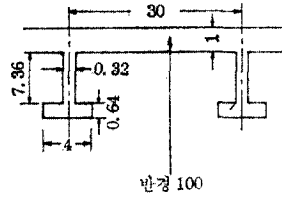
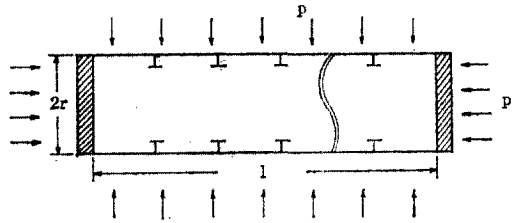
$$u \neq 0, v = 0, w = 0, \beta \neq 0 \text{ at both ends.}$$

b) 고정조건

$$u \neq 0, v = 0, w = 0, \beta = 0 \text{ at both ends.}$$

또한, 길이 방향의 강제운동을 구속하기 위하여 길이의 중앙점에서 $u=0$ 로 하였다.

(Table 1)에는 보강재를 안쪽에 붙인 경우와 바깥쪽에 붙인 경우, 각각 두 가지 경계 조건에서 의 좌굴壓力을 표시하였다.



$E=10^7 \text{ psi}$
 $\nu=0.3$
 $A_r=4.9152 \text{ (in)}^2$
 $Z=6.2633 \text{ in}$
 $I_r=30.3457 \text{ (in)}^4$
 9 Stiffeners at equal distances

Fig.4 Model

(Table 2)에는 Follower force effect를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 좌굴壓力값들을 표시하였다.

<Fig.5>에는 General buckling에 대한 좌굴 Mode를 표시하였다.

<Fig.6>에는 Interframe Buckling에 대한 좌굴 Mode를 표시하였다.

이상의 해석 결과를 고찰하여 보면 다음과 같다.

1) 本 論文의 계산결과와 Subbiah⁽¹⁾의 계산결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 약간의 차이는 본 논문에서는 Shell과 Ring보강재의 반경의 차이를 고려 하였다는 사실에 기인된 것으로 생각된다.

2) Ring보강재 자체의 lateral buckling<Fig.1d>이 좌굴을 지배하지 않는다는 假定下에서는, 두 가지 경계조건에서 모두 보강재를 안쪽에 붙이는 경우가 바깥쪽에 붙이는 경우 보다 좌굴壓力이 더 큰 것으로 나타났다.

3) Follower force effect를 고려한 경우, 그렇지 않은 경우보다, 일반적으로, 좌굴하중이 감소하는 것으로 나타났고, Interframe buckling의 경우 보다 General buckling의 경우 더 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

본 논문에서 택한 Model의 경우 10% 이상의 감소를 보였다.

4) 경계조건의 영향은 General buckling의 경우 보다 Interframe Buckling에서 더 크게 나타난다.

(Table 1) Bubkling Pressure ($\lambda \times 10^3$)

$$\lambda = \frac{p(1-\nu^2)}{E} \frac{r}{t}, \quad \frac{1}{r} = 3.0$$

Type of Stiffening	Inner-Stiffener		Outer-Stiffener	
B.C.	Simple B.C.	Clamped B.C.	Simple B.C.	Clamped B.C.
No. of Lobe				
2	11.127(11.212)	11.160(11.275)	11.260	11.349
3	5.491*(5.980)	5.511*(6.002)	4.590*(4.357)	4.627*(4.395)
4	8.290 (9.005)	8.302 (9.019)	5.466	5.489
5	9.121 (9.178)	9.169 (9.220)	6.187	6.203
6	7.841 (7.849)	7.878 (7.970)	6.362	6.361
7	6.482 (6.481)	6.519 (6.635)	5.968	5.985
8	5.438 (5.440)	5.473 (5.609)	5.365	5.409
9	4.697 (4.706)	4.747 (4.883)	4.676	4.712
10	4.211 (4.221)	4.268 (4.397)	4.195	4.234
11	3.919 (3.928)	3.980 (4.099)	3.903	3.951
12	3.776 (3.782)	3.838 (3.945)	3.759	3.812
13	3.746*(3.747)	3.807*(3.903)	3.728*(3.741)	3.781*(3.883)
14	3.801 (3.798)	3.860 (3.946)	3.783	3.836

* ()안은 Subbiah [1]의 값

* Follower force effect 고려

* $r=100$ inch

(Table 2) Follower Force Effect of Hydrostatic Pressure

Buckling Mode	B.C.	Simple B.C.			Clamped B.C.		
		$\lambda_1 \times 10^3$	$\lambda_2 \times 10^3$	λ_2/λ_1	$\lambda_1 \times 10^3$	$\lambda_2 \times 10^3$	λ_2/λ_1
General Instability		4.590 (3)	5.066 (3)	1.104	4.627 (3)	5.106 (3)	1.104
Interframe Buckling		3.728(13)	3.746(13)	1.005	3.781(13)	3.800(13)	1.005

* Cylinders are externally stiffened

* λ_1 =buckling pressure with follower force effect* λ_2 =buckling pressure without follower force effect

* ()안은 No. of Circumferential Lobe

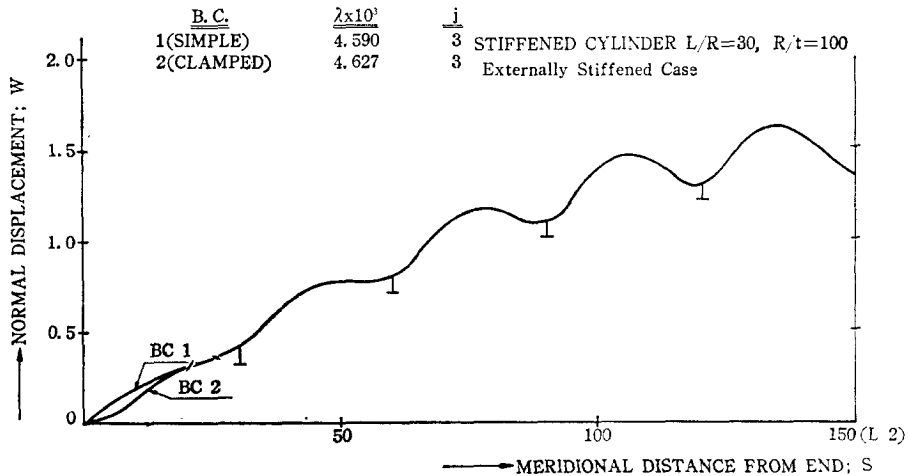


Fig.5 Mode shape-general buckling

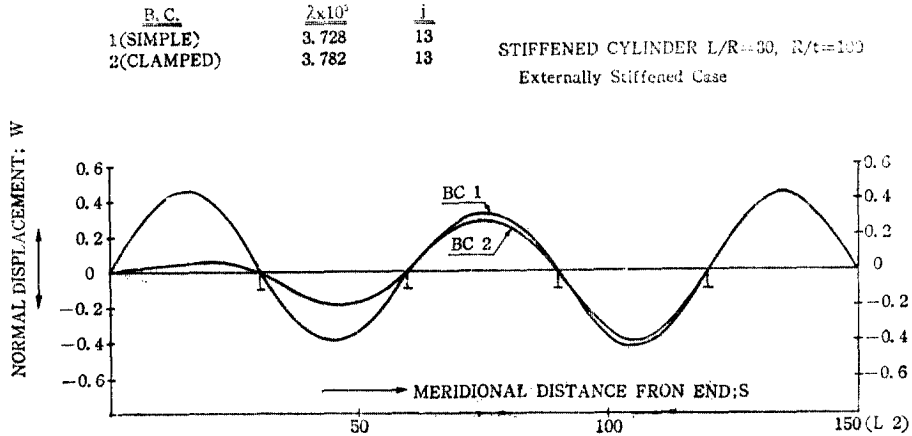


Fig. 6 Mode shape—interframe buckling

V. 結 論

참 고 문 헌

이상의 해석 결과물 종합하여 다음과 같은 결론을 얻어낼 수 있다.

1. 본 논문에 제시된 정식화는 ring으로 보강된 원통 Shell의 좌굴하중을 결정하는 정확한 방법을 주고 있으며, 종래의 방법과는 달리, General buckling과 Interframe buckling에 대한 좌굴하중을 한 프로그램 내에서 동시에 구할 수 있도록 하였다.

2. 靜水壓의 Follower force effect는 좌굴하중을 감소시키는 요인으로서 안정성의 견지에서 볼 때 반드시 고려되어야 한다.

3. 보강재를 Shell의 안 쪽에 붙이는 경우와 바깥 쪽에 붙이는 경우를 비교해 볼 때 보강재 자체의 Lateral 좌굴이 전체 구조물의 좌굴을 지배하지 않는 경우는 보강재를 Shell의 안 쪽에 붙이는 것이 유리하나, 본 논문에서는 보강재 자체의 Lateral 좌굴은 고려되지 않았다.

4. 얇은 Shell 구조물의 좌굴 하중은 초기 결함에 민감하며, 이것이 이론과 실험이 잘 일치하지 않는 주된 요인이다. 따라서 초기 결함을 갖는 비선형 대변형 문제로 Shell 구조물을 해석하는 것이 요망된다.

- (1) J. Subbiah and R. Natarajan. "Stability Analysis of Ring-Stiffened Shells of Revolution". J. of Ship Research. Vol.26, No.2, 1982, pp.125—134.
- (2) D.O. Choi. "Stability Analysis of Ring-Stiffened Shells of Revolution" SNU. MA. Thesis, 1984.
- (3) Don. O. Brush and Bo. O. Almroth" Buckling of Bars, Plates and Shells" McGraw-Hill, 1975.
- (4) C.M. Park. "Stress Analysis of Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shells" UIT Report. 1984.
- (5) S.Kendrick "The Buckling Under External Pressure of Ring-Stiffend Circular Cylinders" RINA Trans. Vol.107, No.1, Jan. 1965.
- (6) Hibbit, J. "Some Follower Forces and Load Stiffness," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, No.6, 1979.
- (7) J.H. Yoon, "Stability Analysis of Shells of Revolution" SNU. MA. Thesis. 1983.