

MATRIX 法에 의한 格子構造物의 彈塑性解析

이 종 석
토 목 공 학
(1985. 4. 30 접수)

〈要 約〉

格子構造物은 소성힌지 구성시 휨모멘트와 비틀내력에 의해 이루어진다. 따라서 格子構造物의 彈塑性 解析은 그 소성힌지가 휨모멘트와 축방향력의 크기만에 의해 결정되는 平面 Frame의 彈塑性 解析보다 복잡하다고 할 수 있다.

본 논문에서는 格子構造物의 각 부재의 양쪽단에 Bending spring과 Torsional spring을 달아 새로운 강도 매트릭스를 구성하고 格子構造物의 彈塑性解析을 할 수 있는 program을 만들었다.

Elasto-Plastic Analysis of Grid structures by Matrix Method

Lee, Jong-Seok
Dept. of Civil Eng.
(Received April 30, 1985)

〈Abstract〉

Plastic hinges of the grid structures are caused by both normal and tangential Stresses Therefore, elasto-plastic analysis of the grid structure is much more complicated than of the plane framed structures whose plastic hinges are determined by normal stresses alone.

This work proposes a new method for assembling the stiffness matrix of the grid structures by attaching bending and torsional springs at each end of the element. And a related computer program for elasto-plastic analysis on grid structures is also developed.

I. 序 言

土木工學의 分野에 있어서長大하고 가벼운 近代의 橋梁이나 核反應爐 혹은 海洋開發을 위한 海洋構造物 등에서 보듯이 構造物들이 그 規模가 커지면서 형태가 복잡하게 되어가고 있는 경향이 있다. 따라서 이와같은 構造物에 대한 보다 정밀한 解析方法이 요구된다.

그러하여 전자 계산기의 현저한 발달과 이에 따른 構造解析法의 비약적 진보는 이와 같은 거대하고 복잡한 構造物의 非彈塑性解析을 가능케 하였으며 이와같은 경향은 앞으로 계속 가속화 될 추세에 있다.

塑性理論의 기본이 되는 金屬材料의 塑性에 관한 科學的인 研究는 Tresca(1864) 및 Saint-Venant (1870) Von Mises 등에서 시작하여 以後 1940년까지는 주로 塑性學의 第一의 課題인 降伏條件과 應力變形率方程式에 관해서, 先驅的인 그리고 요사이 까지도 一般성을 잃지않는 基本法則이 公式化되었다. 이것에 연속하여 1950년대에 Hill, R¹⁾, Sokolovskiy²⁾, Prager와 Hodge³⁾에 의하여 剛塑性體의 應力場과 速度場에 있어서의 不連續의 일반화, 또는 基本的인 變分原理가 적용되어 주로 差分法에 의한 解析이었으나 數值解析枝法도 도입되기 시작하였다.

그러하여 1950—1960年代에는 기계나 구조물 설계에 있어서 보다 복잡한 塑性 혹은 彈塑性 문제를

태결하는 한 가지 방법으로 Limit Analysis(剛塑性 해석)와 Stability Analysis^{9),4)}의 방법이 개발되었다. 이 수법을 요약해 보면 極限荷重狀態에 도달하기까지의 過程을 해석하거나 알지는 못해도 極限荷重狀態에서의 여러가지 力學的 조건에 맞추어 그 塑性體의 力學的 상태를 추측할 수 있다는 이른바 붕괴기구(중극적 거동)을 미리 예측한다고도 할 수 있는 해석기법¹⁾이다. 하지만 이 방법은 特殊한 知識이나 練習 또는 우수한 두뇌가 필요하다는 불평함이 있었다.

더러운 1960年代 이후의 전자계산기의 과중부담과 더불어 非彈性解析方法도 점점 고도화, 세분화, 대중화되어 有限要素法的인 개념이나 최적 설계의 개념이 도입되었다.^{14),16)}

한편 구조물은 이루는 한 부분(Element 또는 Member)의 材料的 非彈性舉動을 다루는 다소 정동적인 개념의 塑性學도 1960年代 이후 많은 발달을 보았다. 즉 理論의 應用分野는 2次元에서 3次元 問題로, 또 組合應力을 받는 棒, 板 혹은 Shell 등의 中극적인 거동을 구명하는데 Tensor의 개념을 도입하거나 變形硬化를 고려한다든지, 剛塑性體의 降伏點荷重 혹은 彈塑性體의 Limit Analysis에 관한 정리와 그 응용, 金屬多結晶體와 單結晶의 塑性的인 거동의 關連性, 더우기 최근에는 그 解의 唯一性에 관한 연구등도 활발하다.^{6),7)}

또한 塑性舉動을 일으키는 대상이 되는 材料로서는 Steel에서 Concrete⁸⁾ 및 흙(Soil) 등으로 확대되어 나가고 있다.

II. 뼈대 구조물의 非彈性解析에 관한 여러가지 方法

여기에서 뼈대 구조물(frame)의 非彈性解析에 관한 여러가지 方法을 살펴보면

a) 運動學의 方法(Kinematical Method)이라고 불리우며 塑性解析의 上限定理(Upper Bound Theorem)를 이용하여 崩壞機構의 條件을 理想計劃法의 問題로서 푸는 방법^{9),10),11),12),13)}

b) 靜力學의 方法(statical method)이라고 불리우며 塑性解析의 下限定理(Lower Bound)를 이용하는 方法 즉, 構造物이 靜力學的인 平衡條件을 만족하고 그 内力 분포가 어떤 點(Joint)에 있어서도 全塑性内力를 초과하지 않는다고 할 때, 이와 같

은 상태를 構性條件을 만족하는 靜的 許容범위(Statically admissible Field) 안에 들어 있다고 말하며 이 조건을 만족하도록 構造物의 破壞荷重을 결정하는 방법^{9),10),11),12),13)}

c) 上界定理의 下界定理를 모두한 것으로는 방법^{9),10)}

d) Matrix 的인 方法 등이 있다.^{14),16)}

a)의 방법은 파괴하중 즉 중극내력을 과대평가할 우려가 있으며 구조물이 비교적 간단해야 하는 등 제약조건이 많다. 특히 格子桁에 관해서는 a)와 유사한 방법을 사용하여, 一定比例의 非탄성성이 간유 모멘트의 존재를 유발하여 어떤 하중상태($P_r \leq P_s \leq P_r$, Shake down load = P_s)에 도달하면 그 構造物은 Shakedown(deflector stabilization) 상태가 된다는 理論과 實驗도 나온 바 있다.^{17),18),19),20)}

붕괴기구를 미리 예측한다는 점에서 Shaw의 Relaxation Method⁴⁾도 이 범주에 속한다고 보여진다.

b)의 方法은 構造物의 중극내력을 실제보다 과소평가할 우려가 있으며 a)의 方法보다는 더 자유스럽게 전산기를 이용할 수 있다는 장점이 있다. 하지만 어떤 특수한 가정이나 제약조건이 추가되는 불편함이 있다.

d)의 방법은 처음에는 A. Jennigs²¹⁾, K. Majid¹⁴⁾ R. K. Livesley¹⁵⁾ 등에 의하여 彈性한 鋼의 發生에 의한 Frame의 剛性低下를 考慮한 탄소강접합방법이 제시되었다. 이 방법에 의하면 荷重點荷重을 받는 構造物의 최소의 塑性한계 變형에서부터 最終崩壞에 이르기까지의 全過程의 變형의 追跡할 수 있을 뿐 아니라 이에 따르는 構造物의 最後強度(중극내력)도 알 수 있다. 하지만 이 방법은 강도 매트릭스를 만드는 데 소성변위가 발생할 때마다 매트릭스의 元數가 증가하며, Unloading을 고려하기가 곤란하고 하중을 한꺼번에 작용시키지 못하고 조금씩 증가시켜야 한다던지 구조물이 수렴될지던 그 方法의 적용이 곤란하다는 등의 단점이 있었다.

본 研究에서는 d)의 文法을 變형 變位法에 의한 강도 매트릭스에 소성변위가 발생할 때를 대비한 탄소강스프링(탄소강 connection)과 接합을 도입하여^{24),23)} 格子桁(Grid)의 탄소강재료만을 할 수 있는 새로운 강도 매트릭스를 만들었다. 이 방법을 幾何的 非線形解析에도 적용할 수 있고, 확대 적용하면 梁체 Frame의 非線形解析이나, 動的 解析시

필요한 塑性學說의 규명에도 쓰여질 수가 있을 것으로 생각한다.

III. 本理論展開 및 매트릭스 구성에 있어서의 假定과 條件

本理論의 展開 및 매트릭스 구성에 있어서 다음과 같은 가정 및 조건을 설정했다.

- 1) 材料(鋼材)는 理想的인 彈塑性的 性質을 가지며 變形硬化(Strain hardening)는 무시하였다.
- 2) 材料의 Bauschinger effect 는 무시하였다.²⁰⁾
- 3) 構造物의 한 요소(Member)는 材質이 均一한 直線部材로 되어있다.

4) Bending 과 Torsion 에 의해 이루어지는 降伏條件 즉 소성현지를 발생시키는 조건에는 Shear 의 영향을 고려하지 않았다.¹¹⁾

5) 變形硬化는 무시하므로 일단 소성현지가 만들어지면 그 소성현지에서의 Torsion 과 Moment 의 미가 소성현지가 처음 만들어질 때의 상태를 그대로 유지한다.

6) 기하학적인 비선형성은 고려하지 않는다.

7) 국부적인 파굴은 일어나지 않는다.

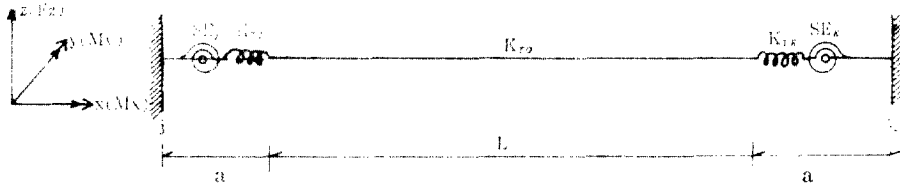
8) 소성현지는 부재양단에에서만 구성된다.

단 1)의 조건중 Computer 프로그램 작성시 Unloading 을 고려하기 위하여 應力경화율을 거의 0이라고 보아도 좋은 0.00001이라고 가정하였다.

IV. 강도 매트릭스의 유도

格子構造物의 한 부재(Member)의 양단에 각각 단성 Bending spring(Connection)과 단성 Torsional spring(Connection)이 있을 때의 새로운 강도 매트릭스 유도하여 보았다.

먼저 부재 강도 매트릭스를 求하기 위해 유인도 매트릭스를 구해보면, 원부재에 길이가 0인 Bending spring 과 Torsional spring 이 달려있는 경우의 그림은 다음과 같다.



- L: 부재 길이
- a: 0
- SE_L, SE_R: 원모멘트를 받는 spring 의 탄성계수
- K_{TL}, K_{TR}: 비틀림을 받는 spring 의 탄성계수
- K_{TO}: 원부재의 비틀림탄성계수

(그림 1)

위와 같은 부재에서 먼저 k 단에서 단위힘을 미는 (M₁=1, M₂=1, F₁=1) 구해보면,

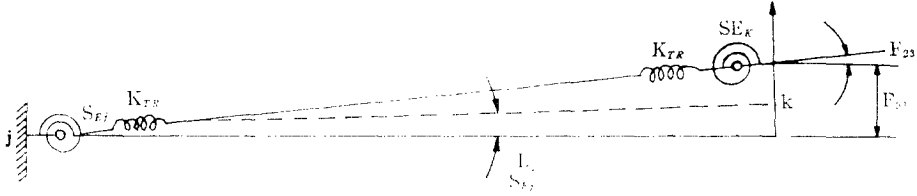
1) M₁=1의 힘만 줄때의 유인도 즉 변위량은 (1)식과 같이 되고



(그림 2)

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= \frac{L}{K_{TO}} \cdot \frac{1}{K_{TL}} \cdot \frac{1}{K_{TR}} \cdot \frac{L \cdot K_{TL} \cdot K_{TR} + K_{TO} \cdot K_{TR} + K_{TO} \cdot K_{TL}}{K_{TO} \cdot K_{TL} \cdot K_{TR}} \\
 F_{21} &= 0 \\
 F_{31} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

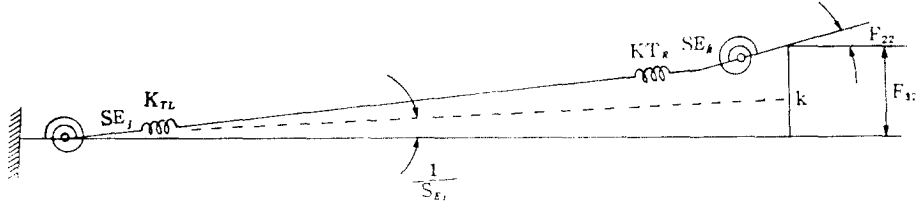
2) $F_1=1$ 의 힘만 작용할 때의 유연도 즉 변위량은 (2)식과 같이 되고



(그림 3)

$$\left. \begin{aligned} F_{33} &= \frac{L^3}{3EI_y} + \frac{L^2}{SE_j} \\ F_{23} &= \frac{L^2}{2EI_y} + \frac{L}{SE_j} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3) $M_j=1$ 의 힘만 작용할 때의 유연도 즉 변위량은 (3)식과 같이 된다.



(그림 4)

$$\left. \begin{aligned} F_{22} &= \frac{L}{EI_y} + \frac{1}{SE_j} + \frac{1}{SE_k} \\ F_{32} &= \frac{L^2}{2EI_y} + \frac{L}{SE_j} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

따라서 k 단의 유연도 매트릭스 F_{Mkk} 는 (4)식과 같이 구성되므로

$$F_{Mkk} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & F_{23} \\ 0 & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L \cdot K_{TL} \cdot K_{TO} + K_{TO} \cdot K_{TR} + K_{TO} \cdot K_{TL}}{K_{TO} \cdot K_{TL} \cdot K_{TR}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{EI_y} + \frac{1}{SE_j} + \frac{1}{SE_k} & \frac{L^2}{2EI_y} + \frac{L}{SE_j} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI_y} + \frac{L}{SE_j} & \frac{L^3}{3EI_y} + \frac{L^2}{SE_j} \end{bmatrix} \quad (4)$$

이 매트릭스를 Inverse 시키면 (5)식이 나오므로

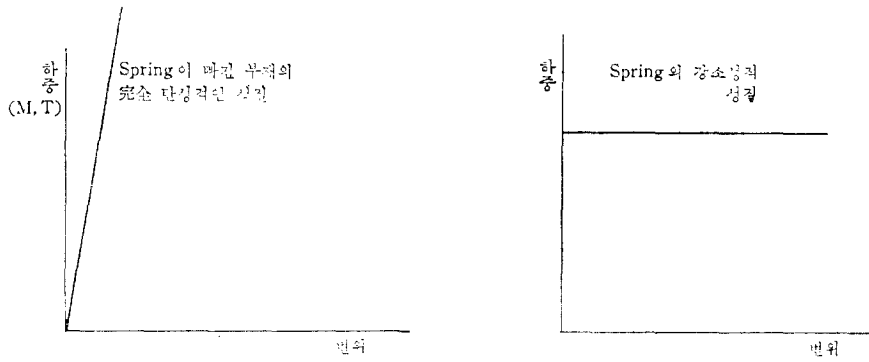
$$S_{Mkk} = \frac{EI}{E^* L^3} \begin{bmatrix} K_T^* & 0 & 0 \\ 0 & 4(3SE_j + 1)L^2 & 6(2SE_j - 1)L \\ 0 & 6(2SE_j + 1)L^2 & 12(SE_j + SE_k + 1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

이때 E^* , K_T^* 는 각각 (6)식에서 보듯이 표현된다.

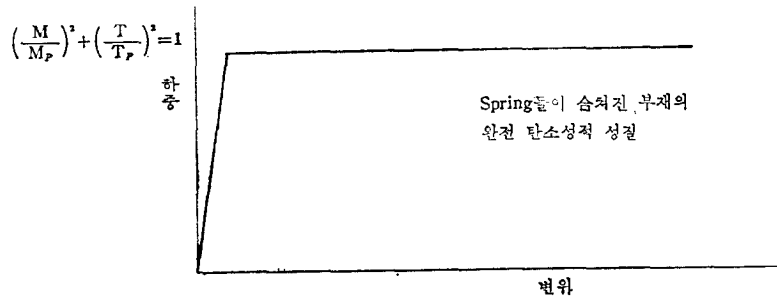
$$\begin{aligned} E^* &= 12SE_j SE_k + 4(SE_j + SE_k) + 1 \\ K_T^* &= \left[\frac{L \cdot K_{TL} \cdot K_{TO} \cdot K_{TR}}{K_{TL} \cdot K_{TO} + K_{TO} \cdot K_{TR} + K_{TL} \cdot K_{TR}} \right] \cdot \frac{E^* L^3}{EI} \end{aligned} \quad (6)$$

이와 같은 방법으로 부재 전체의 강도 매트릭스를 구할 수 있다.

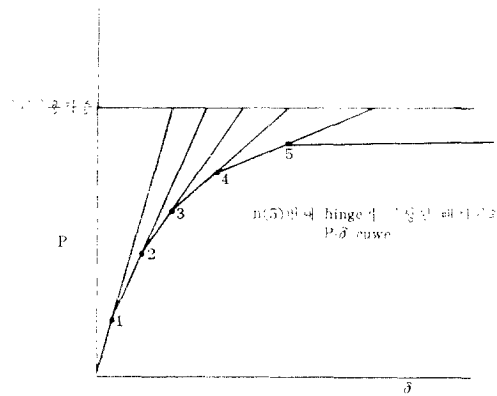
$$S_M = \begin{bmatrix} S_{Mjj} & S_{Mjk} \\ S_{Mkj} & S_{Mkk} \end{bmatrix} \quad (7)$$



(그림 5)



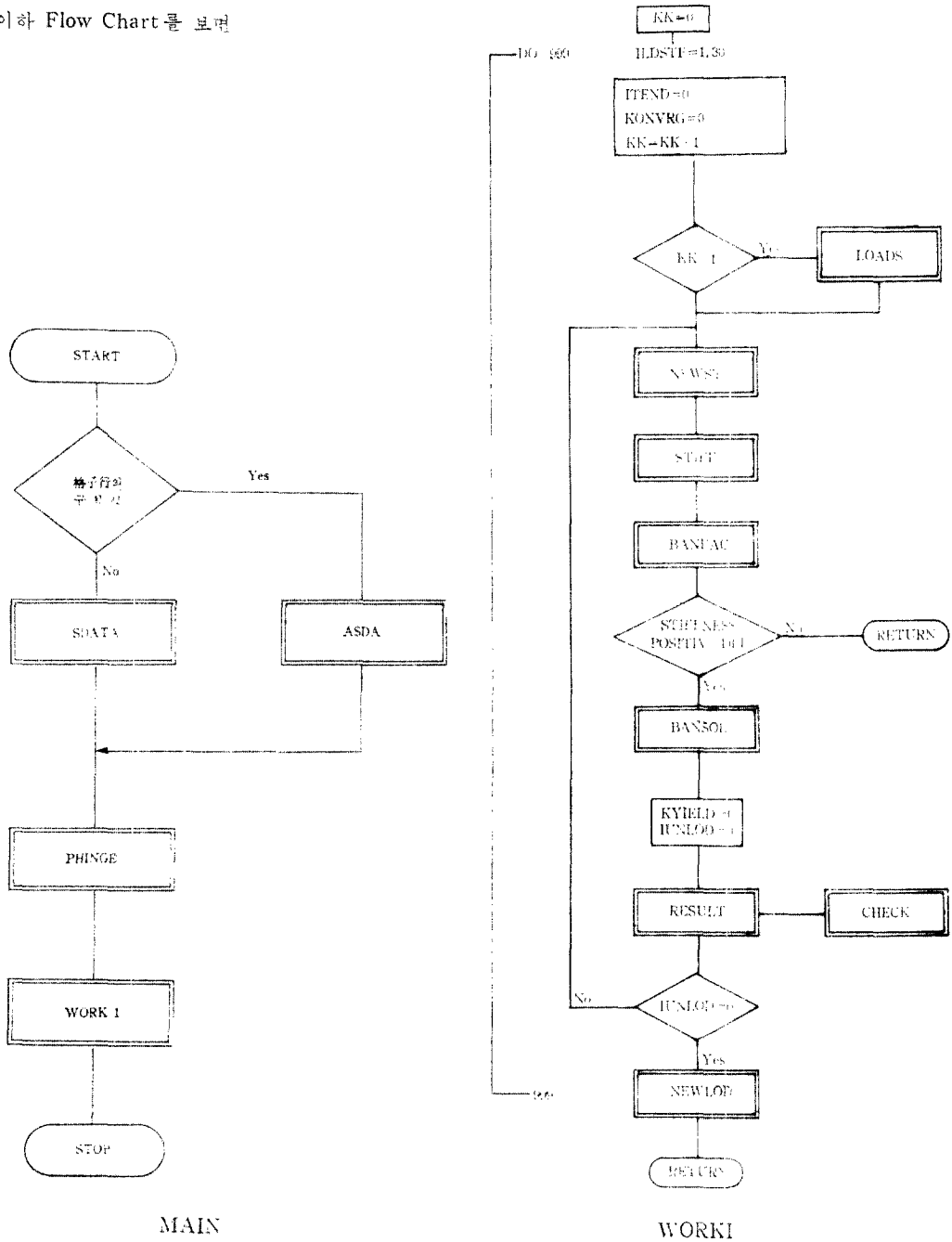
(그림 6)

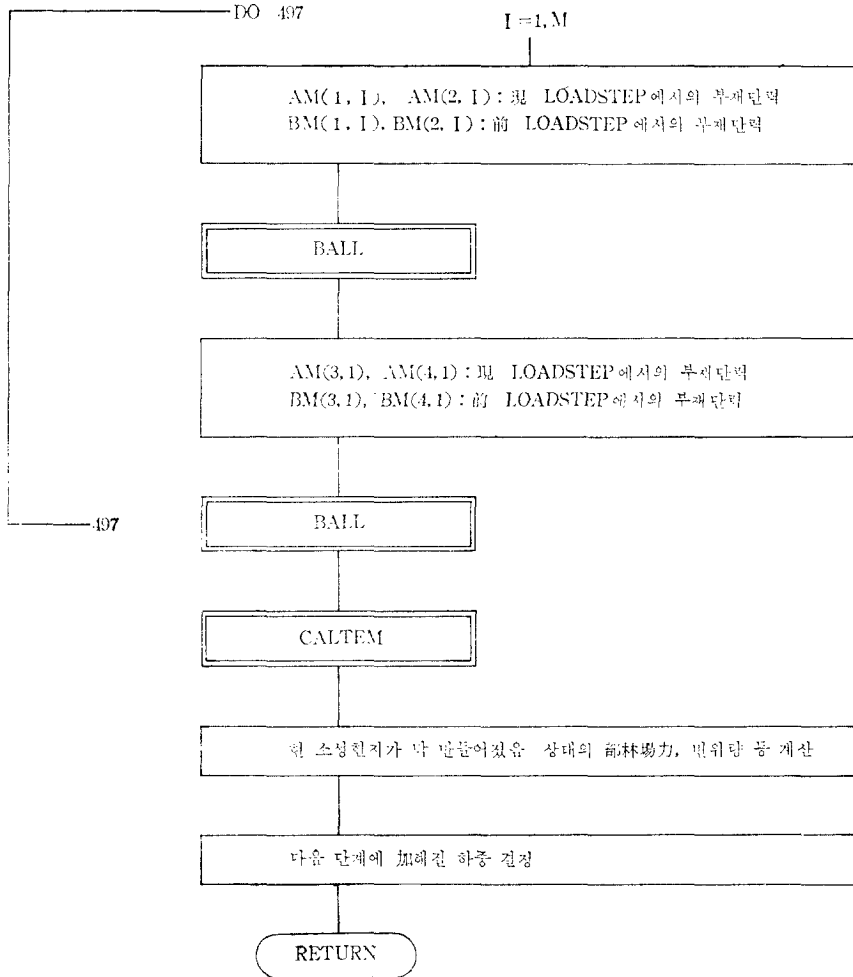


(그림 7)

Ⅱ. Flow Chart의 構成

이하 Flow Chart를 보면





NEWLOD

윗 Subroutine 들을 간단히 설명해 보면

ASDA, SDATA: 構造物의 기하적 조건 단항계수(E, G) 등의 決定

PHINGE: Plastic Hinge의 조건 決定(M_P, T_P)

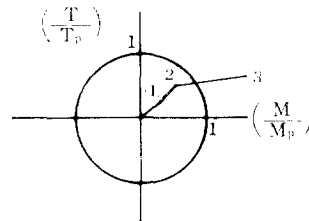
STIFF: 소성현지가 생겼거나 Unloading이 될 때 마다 Stiffness를 새롭게 구성

RESLUT: 부재단력(Member End Force)이나 Displacement 등을 구함.

CHECK: Unloading 여부와 이에 따른 기타 조건의 변경

BALL, CALTEM

②번에서 ③번 Load Step으로 넘어 가면 부재단이 소성현지가 구성되었다고 볼 때 그 소성현지가

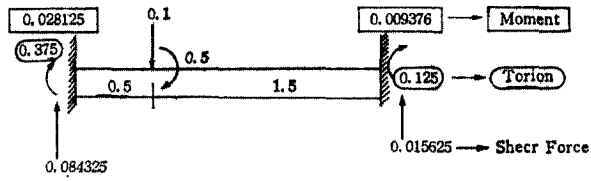


(그림 8)

바로 구성된 그 때의 M, T 값을 구하고 그 때에 가해진 하중량 등을 계산

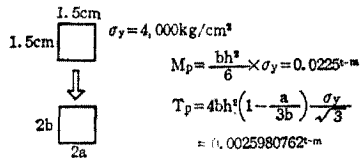
Ⅶ. 프로그램에 의한 계산결과

편산으로 계산이 가능한 예제들을 골라 본 프로

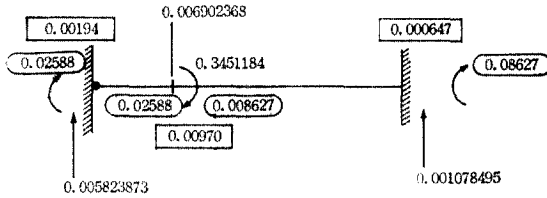


a. 종하중 작용시의 단성해적

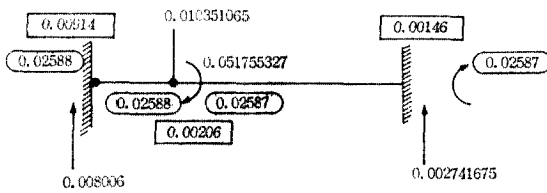
I: 0.421875cm²
J: 0.84375cm



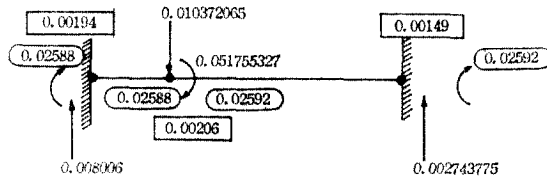
b. 단면 및 M_p , T_p



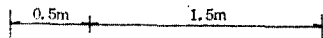
c. 첫 번째 소성형지 구성



d. 두 번째 소성형지 구성



e. 세 번째 소성형지 구성



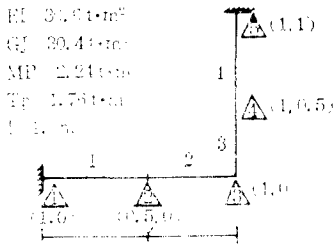
(그림 9)

그림의 다른 경우결과와 비교하였다.

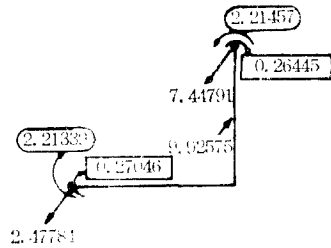
1) 양단고정보의 일쪽에서 $\frac{1}{4}$ 되는 지점에 집중 수직하중과 비틀림 모멘트에 의해 소성힌지가 최후까지 구동되며(3개 고정단) 좌하에 이르기까지 이 결과 보의 비틀림 비틀림이 유지되도록 하였다. 그 결

과 결과로 계산된 결과와 Computer 계산결과와 일치하는 것을 알았다(그림 9 참조).

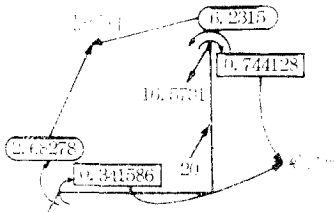
2) 원인으로 제작가능한 간단한 格子구조의 Mode 1 단층이 보았다(그림 10 참조). 이차 모드 결과값으로 계산된 결과와 잘 맞았다.



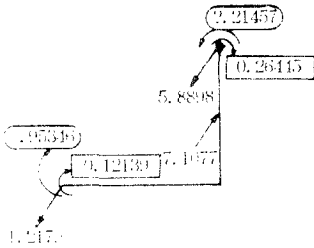
b. Sample Grid 1 (이차 모드 결과)



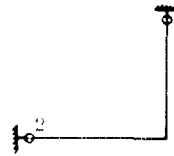
d. 1차 모드 결과(△)의 경우



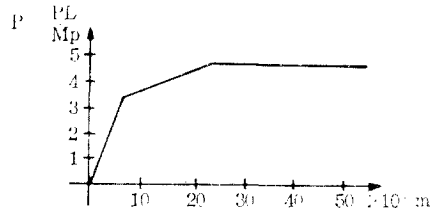
e. 2차 모드 결과(△)의 경우



e. 3차 모드 결과(△)의 경우



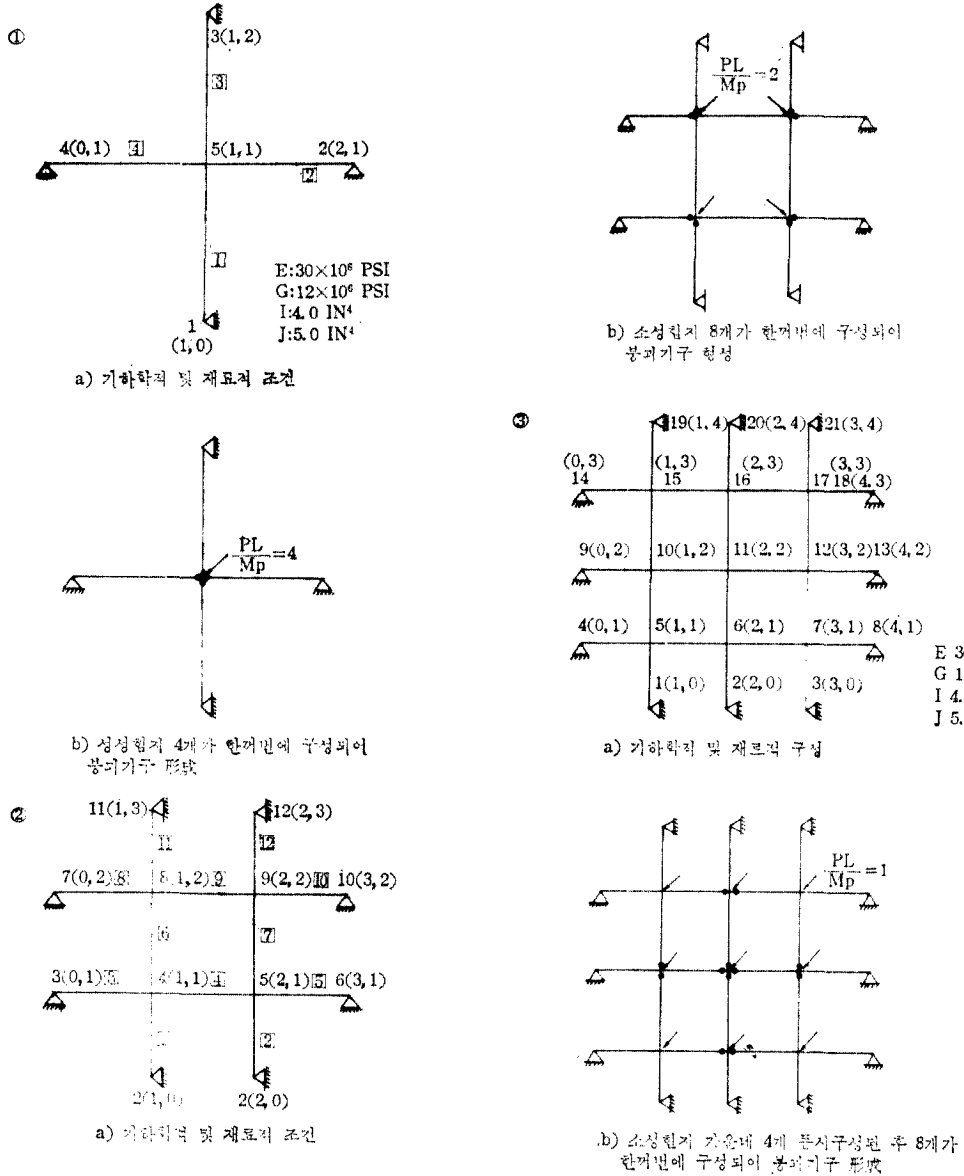
e. 1차 모드 결과(△)의 경우



f. 3 차 모드 결과와 하중의 변위

(그림 10)

3) Hodge⁽¹³⁾의 계산례와 비교해 보았다(그림 11 참조)

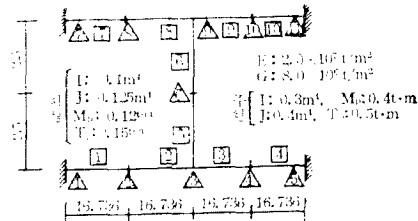


<그림 11>

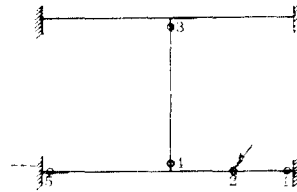
위 1), 2), 3)의 例에서 보듯이 필연으로 얻은 결과와 木프로그램에 의한 결과와 매우 일치하였다.

4) 다음은 木 프로그램을 이용하여 얻은 복잡한 예제를 풀어본 결과이다.

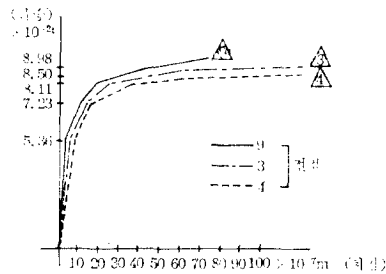
4)-2)의 예제(그림 13참조)는 4)-1)의 예제(그림 12참조)에 비교하면 格子桁 배치의 규칙성이 없고 지점(支點)도 불규칙하다.



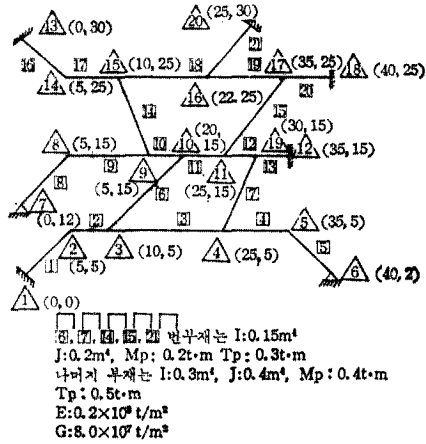
a. 4)-2)의 예제에 대한 木 프로그램의 출력



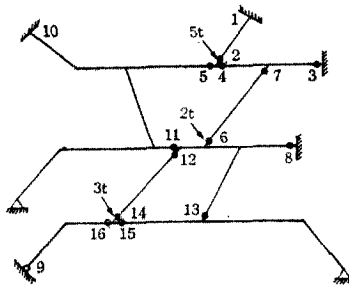
b. 4)-2)의 예제에 대한 木 프로그램의 출력



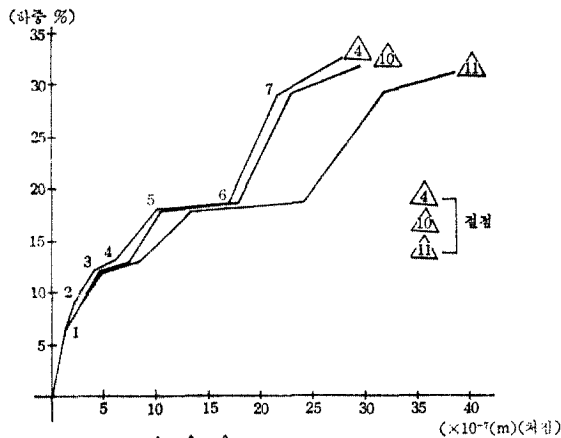
(그림 12)



a. 格子桁의 기하학적 및 재료적 조건



b. 총하중 작용시 원기구형 순서



c. 절점 (④, ⑩, ⑪) 처짐과 하중과의 관계

(그림 13)

Ⅷ. 結 言

1. 格子構造物의 양쪽부재단 마다에 Bending spring 과 Torsional spring 을 달아 새로운 강도 Matrix 를 구성하였다.

2. 구해진 강도매트릭스를 이용하여 전산기를 이용하여 格子構造物의 탄소성 해석을 할 수 있는 프로그램을 개발하였다.

3. 결산으로 의한 가능한 예제들을 골라 본 프로그램에 의한 결과와 비교하여 좋은 일치를 보였다.

4. 종래의 전산기를 利用하는 方法과 비교해서, 본 研究에서 개발된 program 을 사용하면 하중을 단계 단계 줄 필요없이 한꺼번에 줄 수 있고 unloading 을 고려할 수 있는 利點이 있다.

참 고 문 헌

- 1) Hill, R: "The MetheMatical Theory of Elasticity", oxford at the clarendon press, 1950.
- 2) Sokolovskiy, V.V: "塑性學(犬橋義夫譯)" 朝倉書店, 1959.
- 3) Yung Kee Shin: "LOAD CARRYING CAPACITY OF TRIANGULATED STRUCTURES", P. H. D. TOKYO UNIVERSITY 1968.
- 4) F. S. Shaw: "Limit Analysis of Grid Frameworks", Proc. ASCE. ST5, VOL89, 1963.
- 5) FOULKES, J, "Minimum Weight Design and Theory of Plastic Collapse", Quart. Appl. Math. 10, 1953.
- 6) 山田嘉昭: "塑性力學", 日刊工業新聞社, 82.
- 7) 横道英雄: "彈塑性新論", 技報堂, 79, 2.
- 8) 吳炳煥: "몬트카르토의 漸進的 破壞에 대한 非線型 構成 모델 考證研究", KSCE 제 4 권 제 1 호 1984. 3.
- 9) B. G. Neal: "The plastic Methods of Structural Analysis New York". John Wiley & Sons. Inc.
- 10) Jacques Heyman: "Plastic Design of Frames 2". Cambridge, 1971.
- 11) M. R. Horne and L. J. Morris: "Plastic Design of Low-Rise Frames", Granada, 1981.
- 12) Beedle, L. S.: "Plastic Design of Steel Frames", John Wiley & Sons, New York, 1958.
- 13) Hodge: "Plastic Analysis of Structures", Mcgraw-Hill, 1959.
- 14) K. I. MAJID: "Non-Linear Structures", London, Butter worths, 1972.
- 15) Livesley, R. K.: "Matrix Methods of Structural Analysis", Pergamon Press, Oxford, 1964.
- 16) Zienkiewicz, O. C.: "The Finite Element Method 3rd. ed", McGraw-Hill Book Company, London.
- 17) Dale G. Eyre, T. V. Galambos: "Shakedown Tests On Steel Bars And Beams", ASCE, July, 1970.
- 18) John D. Meyer, Kurt H. Gerstle: "Shakedown of Strain-Hardening Structures", ASCE, January, 1972.
- 19) Dale G. Eyre, Theodore V. Galambos, "Shake Down of Grids", ASCE, October, 1973.
- 20) Dale G. Eyre, Theodore V. Galambos, "Shake Down of Beams on Flexible Supports", ASCE, May 1976.
- 21) Irving J. Oppenheim: "Shakedown Under Elastic Support Conditions", ASCE, July 1980.
- 22) Jennings, A. and Majid, K.: "An Elastic Plastic Analysis By Computer for Framed Structures loaded up to Collapse", The Structural Engineer, DEC. 1965.
- 23) William Weaver, JR., James M. Gere: "Matrix Analysis of Framed Structures", D. Van Nostrand Company, 1980.
- 24) Dong Guen-Lee: Accurate and Simplified Models for Seismic Response prediction of Still Frame Structures", 美 Stanford 大學 學위논문(1984, 2).
- 25) D. R. J. Owen and E. Hinton: Finite Elements In Plasticity, Pineridge Press Limited, 1980.
- 26) Lansford C. Bell and Conard P. Heins: "Analysis of Curved Girder Bridges", Proc ASCE 1970, August.
- 27) Neil Jackson: "Plastic Analysis of Trans-

- versely Loaded Frames”, Proc. ASCE, August, 1971.
- 28) Glem A Morris and Steven J. Feves: “Elastic-Plastic Analysis of Frame works”, Proc. ASCE, May, 1970.
- 29) Sunduramorthy Rajasekaram and David W. Murray: “Finite element solution of unelastic Beam equations”, proc. ASCE, ST6, Vol. 99, 1973.
- 30) 太田俊昭・日野伸一 : 曲げとねじりモーメントを受ける一様な長方形 断面棒の彈塑性解析”, 日本土木學會論文報告集, 第285號, p. 37, 1979.
- 31) 宇佐美 勉: “軸力, 曲げおよび一様ねじりを受ける薄肉開断面の降伏後の舉動”, 日本土木學會 論文報告集, 第220號, p. 9, 1973.
- 32) 兒嶋弘行・平尾 潔, “平面剛滑節構造物 自動極限解析”, 日本土木學會 論文報告集, 第218號, 1973年 10月
- 33) Steele, M. C.: “The Plastic Bending and Twisting of Square Section Members”, Jour. Mech. Phys. Solids, Vol. 3, p. 156, 1954.
- 34) Imegwu, E. O.: “Plastic Flexure and Torsion”, Jour. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, p. 141, 1960.

∴ 後 記

本 研究는 現代研究費의 지원에 의해 수행되었습니다.
지면을 빌어 감사드립니다.