UOU Report Vol. 16. No. 2. pp. 273~281. 1985 연구논문집 제16권 제 2 호 pp. 273~281. 1985

비틂과 휨모멘트를 同時에 받는 均一斷面棒의 降伏條件에 관한 小考

이 종 석
토목공학과
(1985. 4. 30 접수)

〈요 약〉

一般的으로, 프레임(骨組構造物)의 材料的 非線形解釋을 하는 데는 降伏條件을 決定하는데 중요한 의미가 있다.

단일한 應力상태, 예컨대 축방향력, 휨모멘트, 비틂, 전단력들중 하나만 작용할 때는 降伏條件을 決定하기가 쉽지만, 특히 이들이 2개이상 組合되어 作用할 때는 降伏條件을 決定하는 것이 쉽지 않다.

本 논문에서는 휨모멘트와 비틂을 동시에 받는 骨組構造物에 있어서의 降伏條件에 대해서 變形硬化를 고려하여 연구하였다.

A Study on Yield Criteria of Uniform Bars Subjected to Twisting and Bending Moment.

Lee, Jong-Seok
Dept. of Civil Eng.
(Received April 30, 1985)

〈Abstract〉

Determination of the yield criteria generally becomes the major problems in material nonlinear analysis of the framed structures.

However determination of yield criteria under combined internal forces—axial force, bending moment, torsion, shearforce—is very defficult.

In this paper, the yield criteria of the framed structures under bending and twisting moment is studied considering the strain hardening effect.

I. 序 言

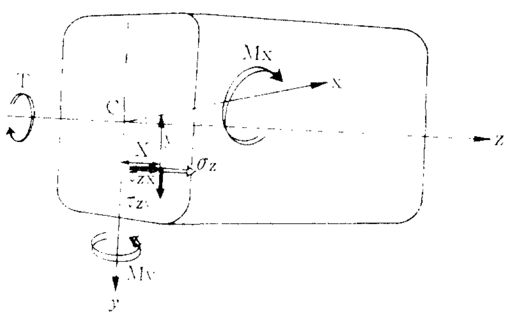
人間이 만드는 構造物들이 그 規模가 커지고 多樣化되면서, 土木工學에 있어서도 이와 같은 構造物들을 設計하고 解析하기 위한 塑性學이 發達되고 있다. 構造工學에 있어서 塑性力學의 범위는 構造物의 材料的非線型을 주로 다룬다.

塑性理論의 역사를 간략히 살펴보면 Tresca (1864), Saint-Venant(1870), 및 Von Mises 등에 의해 塑性理論의 기본인 降伏條件과 應力變形率關係式 등의 基本公式이 일반화 되었고, 1950년대에 Hill · R, Sokolovsky, Prager와 Hodge에 의해 塑性體의 應力場과 速度場에 있어서의 불연속이 일반화되고, 變分원리가 적용되었으며, 1960년대 이후에는 Computer의 대중적인 이용과 더불어 塑性力學의 이론도 많은 발전을 보이고 있다.

본 논문에서는 格子桁(Grid)의 彈塑性解析의 선결 조건인 비틂과 휨모멘트를 동시에 받는 균일 단면봉의 항복조건에 관하여 속이 꽉차있는 경우와 속이 비어 있는 경우, 각각 변형경화를 고려하여 연구하여 보았다.

Ⅱ. 휨모멘트와 비틂을 동시에 받는 속이 꽉찬 均一斷面棒에서의 降伏條件

균일하고 속이 꽉찬 斷面部材가 (그림 1)과 같이 휨모멘트 $M_x(M_y)$와 비틂 T를 동시에 받는 경우를 생각해 보자.



(그림 1)

部材의 斷面에 생기는 應力은 Z軸方向의 垂直應力 σ_z와 비틂의 剪斷應力 τ_{zx}, τ_{zy}가 支配的이기 때문에 σ_x, σ_y, τ_{xy}는 無視할 수 있다고 보자 이런 경우 σ_z, τ_{zx} 및 τ_{zy}의 組合應力에 對해서, 降伏條件과 Plastic Flow Rule에 기준한 解析을 行할 필요가 있다. 그러나 휨 모멘트와 비틂을 동시에 받는 中實斷面에서는 一般的으로 彈塑性境界가 複雜하게 2次元的으로 확대되어가고, 또 塑性域에 있어서의 剪斷應力分布가 균일하지 않기 때문에, 그 解析解를 얻는다는 것은 조금 困難하다. 理論전개의 편의상 휨모멘트와 비틂을 각각 따로 받는다고 생각하자.

1. 휨모멘트만 받는 경우

먼저 휨모멘트에 대해서 생각해 보면 그림 1에서 보이는 쪽 단면에 있어서 x, y軸 주위의 휨모멘트 增分 dM_x, dM_y와 斷面 圖心點에서의 軸力 增分 $dN(=0)$의 평형조건에서 다음 식을 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} dN &= \int d\sigma_z dA_0 = 0 \\ dM_x &= \int y d\sigma_z dA_0 \\ dM_y &= -\int x d\sigma_z dA_0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 座標(x, y, z)의 原點은, 斷面의 圖心 C에 設置하고, x, y軸을 主軸으로 한다. 圖心點 C의 변형율 增分을 $d\varepsilon_{ce}$, x, y軸주위의 曲率場分을 $d\phi_x$, $d\phi_y$로 하면, 斷面의 任意點(x, y)의 변형율 增分 $d\varepsilon_z$는, 近似的으로 平面保持의 假定을 이용하여

$$d\varepsilon_z = d\varepsilon_{ce} + y d\phi_x - x d\phi_y \quad (2)$$

또 Reuss의 應力 변형율 式은[1),4)]

$$d\sigma_z = E d\varepsilon_z - \frac{2}{3} E \sigma_z d\lambda \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} d\tau_{zx} &= 2G dr_{zx} - 2G\tau_{zx} d\lambda \\ d\tau_{zy} &= 2G dr_{zy} - 2G\tau_{zy} d\lambda \end{aligned}\right] \quad (4)$$

로 표현된다. 여기서 降伏條件으로써 硬化形의 Mises의 降伏條件[1),6)]을 採用하면

$$\sigma_z^2 + 3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \sigma_{eq}^2 \quad (5)$$

Plastic Flow가 존재 할때는 윗 式의 增式形이 成立하기 때문에

$$\sigma_z d\sigma_z + 3(\tau_{zx} d\tau_{zx} + \tau_{zy} d\tau_{zy}) = \sigma_{eq} d\sigma_{eq} \quad (6)$$

硬化係數 H'를 이용하면, $d\sigma_{eq}$는

$$d\sigma_{eq} = \frac{2}{3} H' \sigma_{eq} d\lambda) = H' d\varepsilon_{eq}^p) \quad (7)$$

式(6)에 式(7)을 대입하고, 또 式(3), (4)을 이용하면 Plastic Flow 존재시의 $d\lambda$의 算定式이 다음과 같은 式으로 구해진다.

$$d\lambda = \frac{3\{E\sigma_z d\varepsilon_z + 6G(\tau_{zx} d\gamma_{zx} + \tau_{zy} d\gamma_{zy})\}}{2\{H'\sigma_{eq}^2 + E\sigma_z^2 + 9G(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)} \quad (8)$$

式(1)에 式(3), (2)을 代入하고 圖心條件 $\int y dA_0 = 0$, $\int x dA_0 = 0$ 및 主軸條件 $\int xy dA_0 = 0$을 考慮하면, 다음 式이 얻어진다.

$$\begin{aligned} dN &= EA_0(d\varepsilon_{ce} - d\varepsilon_{ce}^{(p)}) = 0 \\ dM_x &= EI_x(d\phi_x - d\phi_x^{(p)}), \\ dM_y &= EI_y(d\phi_y - d\phi_y^{(p)}) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$d\varepsilon_{ce}^{(p)} = \frac{2}{3A_0} \int_{A_0} \sigma_z d\lambda dA_0, \quad d\phi_x^{(p)} = \frac{2}{3I_x} \int_{A_0} y\sigma_z d\lambda dA_0$$

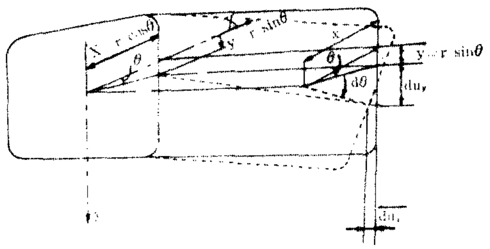
$$d\phi_y^{(p)} = \frac{2}{3I_y} \int_{A_0} (-x)\sigma_z d\lambda dA_0 \quad (10)$$

$$\left(\therefore\ (7)\text{式에서 보면}\ d\varepsilon_{eq}^{(p)} = \frac{2}{3}\sigma_{eq} dx\right)$$

또, A_0는 斷面積, I_x, I_y는 x, y軸에 관한 斷面 2次 모멘트이고 $d\varepsilon_{ce}^p$ 및 $d\phi_x^p$, $d\phi_y^p$는 각각 圖心點의 塑性變形率 增分 및 x, y軸에 관한 塑性曲率 增分으로서, 彈性時에는 0가 되지만 塑性域의 發生時에는 斷面分割法으로 數値積分에 의해 算定되는 量이다.

2. 비틂만 받는 경우

다음에 비틂만을 받는경우에 대해 생각해 보자.



(그림 2)

變形이 微小한 範圍에서는 비틀角의 增分을 $d\theta$로 하면, (그림 2)에서(2軸對稱斷面에서는, 비틀의 중심은 도심에 一致한다).

$$\left.\begin{aligned} du_x &= dx = -(r\sin\theta)d\theta = -yd\theta \\ du_y &= dy = (r\cos\theta)d\theta = xd\theta \end{aligned}\right] \quad (11)$$

비틀율(Rate of Twist)의 增分을 dw로 하면

$$dw = \frac{d\theta}{z} \quad (12)$$

가 되기 때문에, 式(11)은

$$du_x = -dwzy,\ du_y = dwzx \quad (13)$$

또, z軸方向의 斷面의 變位增分 du_z가, 뒴(Warping)의 增分 $d\Psi$로서 주어진다.

$$du_z = d\Psi \quad (14)$$

式 (13),(14)의 斷面의 변형을 增分에 의해 생기는 剪斷변형율은 일반적인 變位增分의 적합조건으로부터

$$\left.\begin{aligned} 2d\gamma_{zx} &= \frac{\partial du_z}{\partial x} + \frac{\partial du_x}{\partial z} = \frac{\partial d\Psi}{\partial x} - dwy \\ 2d\gamma_{zy} &= \frac{\partial du_z}{\partial y} + \frac{\partial du_y}{\partial z} = \frac{\partial d\Psi}{\partial y} + dwx \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

으로 나타나진다. 式(4)에 式(15)의 $d\gamma_{zx}$, $d\gamma_{zy}$를 代入하면

$$\left.\begin{aligned} G\left(\frac{\partial d\Psi}{\partial x} - dw_y\right) &= d\tau_{zx} + 2d\lambda G\tau_{zx} \\ G\left(\frac{\partial d\Psi}{\partial y} + dw_x\right) &= d\tau_{zy} + 2d\lambda G\tau_{zy} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

式 (16)의 第 1式을 y로서, 第 2式을 x로 偏微分해서 빼면, 다음 式을 얻는다.

$$-2dwG = \frac{\partial d\tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial d\tau_{zy}}{\partial x} + 2G\frac{\partial}{\partial y}(d\lambda\tau_{zx}) - 2G\frac{\partial}{\partial x}(d\lambda\tau_{zy}) \quad (17)$$

여기서, 비틀의 應力函數(Stress Function)를 다음과 같이 가정하면,

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y},\ \tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (18)$$

(17),(18)에서, 結局, 다음과 같은 $d\Phi$에 關한 非線形偏微分方程式이 얻어진다.

$$-2dwG = \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2G\frac{\partial}{\partial y}\left(d\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2G\frac{\partial}{\partial x}\left(d\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \quad (19)$$

式(19)에 있어서, $d\lambda=0$로 놓으면, 周知의 彈性비틀應力函數에 關한 基礎式이 된다.

$$-2dwG = \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial x^2} \quad (20)$$

式(19)는, 직접적으로 풀기가 곤란하기 때문에, 이것을 Matrix 형태로 고치면 一般的으로 다음과 같이 표현된다.

$$-2dwG[1] = [A][d\Phi] + G[dB] \quad (21)$$

여기서, $[A]$는 係數行列, $[dB]$는, 式(19)의 $d\lambda$와 Φ를 포함하는 列行列, $[1]$은 要素가 1이 되는 列行列(상세한 것은, 文獻 15를 參照)이 된다.

式(21)에서,

$$[d\Phi] = -2dwG[A]^{-1}[1] - G[A]^{-1}[dB] \quad (22)$$

즉, 비틀 增分 dT는, z軸에 關한 모멘트의 평형조건 式에 의해

$$dT = \iint(xd\tau_{zy} - yd\tau_{zx})dxdy \quad (23)$$

式(23)에 式(18)을 대입한 뒤에 部分積分 하면,

$$\begin{aligned} dT &= -\iint\left(x\frac{\partial d\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial d\Phi}{\partial y}\right)dxdy \\ &= -\iint\frac{\partial}{\partial x}(xd\Phi)dxdy - \iint\frac{\partial}{\partial x}(yd\Phi)dydx \\ &\quad + 2\iint d\Phi dxdy \\ &= -\int(x_2d\Phi_2 - x_1d\Phi_1)dy - \int(y_2d\Phi_2 - y_1d\Phi_1) \\ &\quad + 2\iint d\Phi dxdy \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, $d\Phi_2$, $d\Phi_1$는 任意의 y(혹은 x)에 對한 斷面兩端의 x(혹은 y) 값이, x_2, x_1(혹은 y_2, y_1)가 되는 點의 $d\Phi$의 값이며, 비틀 應力에 無關係한 定數로서, 通常 0으로 놓을 수가 있으므로 dT는 結局, 다음과 같이 나타난다.

$$dT = 2\iint d\Phi dxdy \quad (25)$$

따라서 dT는 $d\Phi$의 曲面과 $x-y$平面에 둘러쌓인 體積의 2倍인 것을 알 수 있다. 式(25)를 行列로써 表示하면

$$dT = [C][d\Phi] \quad (26)$$

式(26)에 式(22)를 代入하면, 비틀剛性(torsional

rigidity) GJ_0를 이용하여 dT와 dw에 關한 式이 다음과 같이 구해진다.

$$dT=GJ_0(dw-dw^{(p)}) \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} J_0&=-2[C]\,[A]^{-1}[1] \\ dw^{(p)}&=[C]\,[A]^{-1}[dB]/J_0 \end{aligned}\right] \tag{28}$$

3. 휨모멘트와 비틂을 동시에 받는 경우

여기서, x軸에 대한 휨모멘트 M_x와 T가 동시에 작용하는 경우 x軸에 대한 곡률증분 $d\phi_x$와 비틂율증분 dw에 관하여 관계식을 유도해보면, 式(5) 즉 硬化形 Mises의 降伏條件과, 式(18)에서

$$\sigma_z=\pm\sqrt{\sigma_{eq}^2-3(\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2)}$$

$$=\pm\sqrt{\sigma_{eq}^2-3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2-3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2} \tag{29}$$

式(29)가 성립하고

式(3)과 式(19)에서, E, G, 값이 보통의 경우 다른 값들에 비해 크므로 각각

$$dx=\frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_z}{\sigma_z} \tag{30}$$

$$-dw=\frac{\partial}{\partial x}\left(d\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(d\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \tag{31}$$

이 성립하고, 式(31)에 式(30)을 代入하면

$$-dw=\frac{3}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varepsilon_z}{\sigma_z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varepsilon_z}{\sigma_z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right. \tag{32}$$

또 式(2)에서 $d\varepsilon_{c\bullet}=0$, $d\phi_y=0$ 이므로

$$d\varepsilon_z=yd\phi_x \tag{33}$$

式(33)과 式(29)를 式(32)에 代入하면 다음 式이 구해진다.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{y\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{eq}^2}{3}-\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{eq}^2}{3}-\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}\right\}=\pm\frac{2dw}{\sqrt{3}\,d\phi_x} \tag{34}$$

즉, M_x와 T가 일정한 비율을 유지하면서 증가하는 동안 $d\phi_x$, dw 및 σ_{eq} 사이에는, 式(34)가 성립해야 한다는 조건하에서 式(9) 및 式(27)을 有限要素法이나 有限差分法을 이용하여 풀 수있다. 즉휨모멘트와 비틂을 同時에 받는 속이 꽉찬 부재의 변형경화를 고려한 解析이 가능하다. 그런데, 여기서 變形硬化率이 Mild Steel의 경우 $H'=0.01$ 즉 근사적으로 0으로 볼 수 있다는 조건과 式(21), 式(22)등을 이용하면 다음에 나오는 式(43)이 나오는데, 변형경화율을 무시한다면 위방법 보다는 M, M_I, T, T_p 사이에 간단한 관계를 다음과 같이 발견할 수 있다

純비틂을 받는 경우에서 $\sigma_z=0$이 되기 때문에 $d\lambda$와 σ_{eq}는, 각각 式(5), (8)에 의해

$$d\lambda=\frac{3G(\tau_{zx}d\gamma_{zx}+\tau_{zy}dz_{zy})}{(H'+3G)(\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2)},$$

$$\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2=\frac{1}{3}3\sigma_{eq}^2 \tag{35}$$

가되고, 여기서 $H'=0$가 되는 完全彈塑性材料를 假定하므로

$$d\lambda=\frac{3}{\sigma_y^2}(\tau_{zx}d\gamma_{zx}+\tau_{zy}d\gamma_{zy}),\quad \tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2=\frac{1}{3}\sigma_y^2 \tag{36}$$

가 되고, (36)의 第2式에 式(18)을 代入하면, 다음의 관계식이 얻어진다.

$$|\tau|=\sqrt{\tau_{yx}^2+\tau_{zy}^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}$$

$$=|\mathrm{grad}\Phi|=\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}=\tau_y \tag{37}$$

즉, 塑性域에 있어서 合剪斷力은 一定値 τ_y가 되고, 또, 應力函數는 一定勾配 τ_y의 曲面으로 주어지는 것을 알 수 있다.

여기서, 이와 같은 非硬化材料의 部材가, 全斷面이 完全塑性應力狀態가 된 경우를 생각해보자. 全斷面에서 式(31)이 成立하기 때문에, 例를 들면 長方形斷面의 應力函數 Φ는, 4周邊에서 一定勾配를 가지는 (그림 3-c)와 같은 지붕의 形狀이 된다.

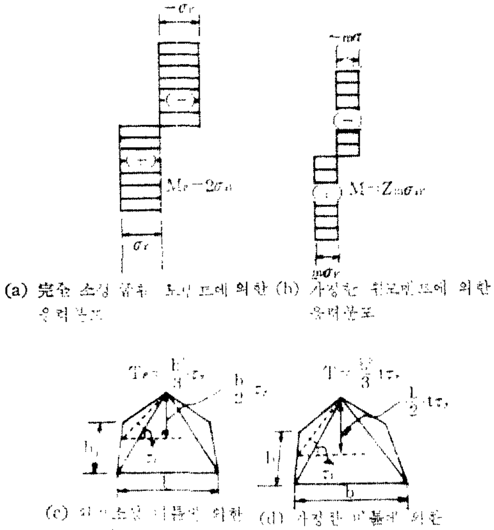
이때 完全塑性 비틂 T_p는 지붕과 底面에 둘러 쌓인 體積의 2倍$\left(v_o=\frac{1}{2}\times\frac{b\tau_y}{2}\times b\times(h-b)+\frac{1}{3}\times\frac{b\tau_y}{2}\times b\times b\right)$로서 주어진다. 즉,

$$T_p=2v_o=\frac{1}{2}hb^2\left(1-\frac{b}{3h}\right)\tau_y \tag{38}$$

여기서, M, T, M_p, T_p와의 관계를 보다 간단한 과정을 통해서 알기 위해서, M에 의해서 $\sigma_z(=m\sigma_y)$ T에 의해서 $\tau_R(=t\tau_Y)$를 동시에 받고 있는 正方形斷面을 생각하고 그 應力 상태를 알아보기 쉽게 하기 위해서 (그림 3)을 보면, 여기서 合剪斷應力 $\tau_R^2=\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2$이 斷面에 沿하여 一樣하게 分布하는 것으로 하고, 각각의 값을 어떤 一定 파라메타 m, t를 이용하여

$$\sigma_z=m\sigma_zY,$$

$$\tau_R=t\tau_y=\frac{t}{\sqrt{3}}\sigma_y \tag{39}$$



(a) 完全 소성 굽힘 모멘트에 의한 응력분포 (b) 가정한 휨모멘트에 의한 응력분포

(c) 완전소성 비틀림에 의한 Φ—분포 (d) 가정한 비틀림에 의한 Φ—분포

(그림 3)

로 하면, 假定한 σ_z, τ_R 은 非硬化材料에서의, Mises의 降伏條件을 滿足한다.

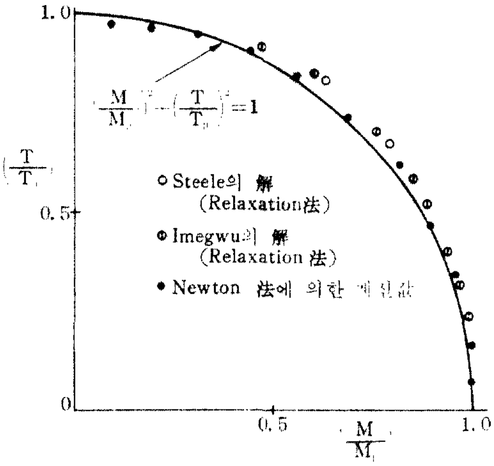
즉,

$$\sigma_z^2+3\tau_R^2 \leqq \sigma_{zy}^2 \qquad (40)$$

式(39), (40)에서 다음과 같은 無次元式을 얻는다.

$$m^2+t^2 \leqq 1 \qquad (41)$$

式(33)에서 假定한 應力分布에서 얻어진 휨 모멘트(그림-3(b))와 비틀(그림-3(d))과, 純塑性 모멘트



(그림 4)

및 純塑性비틀 T_p 와의 關係는, 각각

$$M=mM_p$$
$$T=tT_p \qquad (42)$$

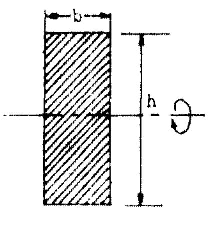
式(41)에 式(42)를 代入하면 다음과 같은 式(37)이 유도 된다는 것을 쉽게 알 수 있다.

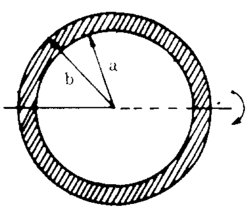
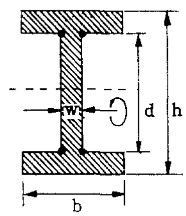
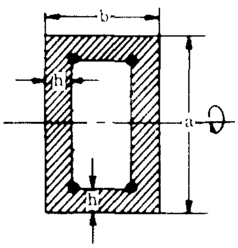
$$\left(\frac{M}{M_p}\right)^2+\left(\frac{T}{T_p}\right)^2=1 \qquad (43)$$

(그림 4)는 差分法에 의해 正方形斷面(9×9分割)에 對한 Steele 이나 Imegwu의 Relaxation 法에 의한 解 및 Newton 法에 의해 구한 結果를 각각 보인 것이다. 이로써 正解値(黑點)과 잘 一致 하는 것을 알 수 있다.

이상에 의거하여 다음과 같은 表를 만들수 있다.

(表 1) 各種斷面의 T_y, T_p 値

斷 面 形	$\frac{T_Y}{\tau_Y}$	$\frac{T^d}{\tau_Y}$
	$h \geqq b$ 일때 k_1b^2h (注) $\frac{h}{b}=1$일때 $k_1=1.67$ $\frac{h}{b}=2$일때 $k_1=1.96$ $\frac{h}{b}=5$일때 $k_1=2.32$	$\frac{b^2h}{2}\left(-1\ \frac{b}{3h}\right)$

斷 面 形	$\dfrac{T_Y}{\gamma_Y}$	$\dfrac{T_P}{\tau_Y}$
		$\dfrac{\pi(b^4-a^4)}{2b}$	$\dfrac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$
	(注) 偶角部에 應力集中이 생김, 彈性限界는 明確하지 않음.	$\dfrac{w^3}{6}\ln\dfrac{h-d}{w}+\dfrac{5w^3}{36}+\dfrac{b}{4}(h-d)^2+\dfrac{dw^2}{2}-\dfrac{(h-d)^3}{24}$
	(注) 偶角部에 應力集中이 생김, 彈性限界는 明確하지 않음	$2h^2\left(a+b-\dfrac{8}{3}h\right)-4h(a-2h)(b-2h)$ 薄肉斷面에서는, 윗식은 $2h[ab-h(a+b)]\approx 2abh$

Ⅲ. 휨모멘트와 비틀음을 받는 얇고 속이빈 均一斷面棒에 있어서의 降伏條件

鋼管과 같은 얇은 圓管斷面에 있어서는, 斷面에 따라서 생기는 剪斷應力이 두께 方向에 따라 一樣하다고 볼 수 있으므로, 解析은 다음과 같이 행할 수 있다.

그림 5에 보인 바와 같은 圓管斷面部材에서는 圓周方向의 剪斷변형율 增分 $d\gamma_\theta$는 斷面의 Warping 함수(뒴)를 ϕ로 하면, 式 15에 準한 다음 式을 얻는다.

$$2d\gamma_\theta=\frac{\partial d\phi}{\partial s}+dw\tilde{a} \tag{44}$$

단, $\tilde{a}$는 圓管두께中心의 半徑, S는 圓周에 沿하는 座標軸이고 dw는 비틀율의 增分이다. 圓管斷面에서 생각해야 할 應力成分은, 圓周方向의 剪斷應力 τ_θ와 垂直應力 σ_z뿐으로서, Reuss의 應力변형율 式[1,4] 및 Mises의 降伏條件式은, 각각

$$d\sigma_z=Ed\varepsilon_z-\frac{2}{3}\sigma_z Ed\lambda,$$
$$d\tau_\theta=2Gd\gamma_\theta-2G\tau_\theta d\lambda, \tag{45}$$
$$\sigma_z^2+3\tau_\theta^2=\sigma_{eq}^2 \tag{46}$$

표, $d\lambda$는 式(8)에 準하는 다음 式으로 주어진다.

$$d\lambda=\frac{3(E\sigma_z d\varepsilon_z+6G\tau_\theta d\gamma_\theta)}{2(H'\sigma_{eq}^2+E\sigma_z^2+9G\tau_\theta^2)} \tag{47}$$

수, 圓管斷面의 휨 모멘트와 曲率의 關係式에 대해서는, 式(2), 式(9)가 그대로 성립한다.

한편, 비틀과 비틀율의 關係式은 다음과 같이 簡單히 유도된다. 즉, 뒴함수 ϕ의 圓周方向의 s의 全積分이 0이라는 條件에서

$$2\oint d\gamma_\theta ds=\frac{\oint\partial d\phi}{\partial s ds}+dw\tilde{a}\oint ds=dw(2\pi\tilde{a}^2) \tag{48}$$

式(48)의 左邊에 式(45)의 第 2式을 代入함으로써

$$\oint\left(\frac{d\tau_\theta}{G}+2\tau_\theta d\lambda\right)ds=dw(2\pi\tilde{a}^2)$$

두께가 一樣하다고 하면, 應力의 평형조건에서 剪斷應力 τ_θ 는 管의 全周에 沿하여 一樣하기 때문에, 塑性비틂을 增分 $dw^{(p)}$를 이용하여

$$dw=\frac{d\tau_\theta}{G\tilde{a}}+\frac{\tau_\theta}{\pi\tilde{a}^2}\oint d\lambda ds=\frac{d\tau_\theta}{G\tilde{a}}+dw^{(p)} \quad (49)$$

또, 비틂 增分 dT 는, Z 軸에 關한 평형조건 式에서

$$dT=\oint d\tau_\theta\tilde{a}hds=d\tau_\theta\tilde{a}h\oint ds=d\tau_\theta(2\pi\tilde{a}^2h) \quad (50)$$

式(50)에 式(49)을 代入하여 純비틂의 경우 彈性비틂강성 $GJ_0=2\pi\tilde{a}^3hG$ 을 이용하면, $dT\sim dw$ 式이 다음과 같이 구해진다.

$$dT=GJ_0(dw-dw^{(p)})$$

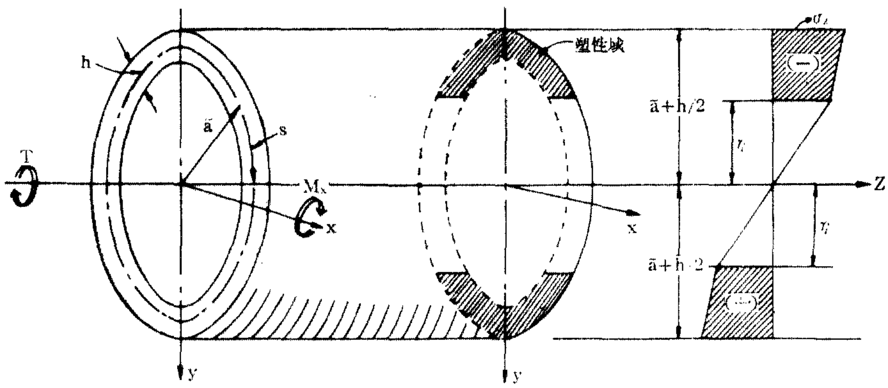
$$dw^{(p)}=\frac{\tau_\theta}{\pi\tilde{a}^2}\oint d\lambda ds \quad (51)$$

材料가 非硬化材料의 경우에는, τ_θ 가 管의 全周에 沿하여 一樣하게 된다.

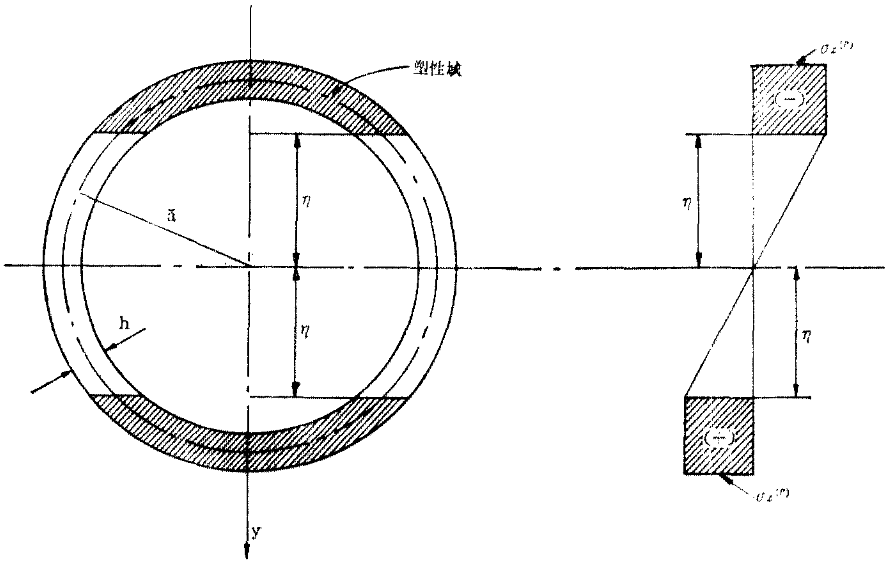
따라서, 塑性域의 垂直應力 $\sigma_z^{(p)}$도, Mises 條件에서,

$$\sigma_z^{(p)}=\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{\tau_y^2-\tau_\theta^2}=\text{const}$$

가 된다. 이때, 彈塑性境界를 $y=\pm\eta$ 로 하면, 그림 6에서,



(그림 5)



(그림 6)

$$\left.\begin{array}{l} |y| \leqq \eta: \ \sigma_z = \sigma_z^{(p)} \dfrac{y}{\eta} \\ |y| \geqq \eta: \ \sigma_z = \sigma_z^{(p)} = \pm\sqrt{3}\sqrt{\tau_y^2 - \tau_\theta} \end{array}\right\} \quad (52)$$

휨 모멘트 M 과 비틀 T 는

$$M = \frac{2\sigma_z^{(p)}}{\eta}\int_{(e)} y^2 dA_0 + 2\sigma_z^{(p)}\int_{(p)} y dA_0 \quad (53)$$

$$T = \int \tau_\theta \tilde{a} h ds = 2\pi\tilde{a}^2 h\tau_\theta \quad (54)$$

特히, 完全塑性應力狀態일때는, $\eta \to 0$으로 놓으면, 式(10)의 塑性斷面係數를 이용하여

$$M = \sigma_z^{(p)} z = \sigma_y z \frac{\sigma_z^{(p)}}{\sigma_y} = M_p \frac{\sigma_z^{(p)}}{\sigma_y} = M_p \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_\theta}{\tau_y}\right)^2} \quad (55)$$

와 같이, 完全塑性 비틀이 $T_p = 2\pi\tilde{a}^2 h\tau_y$ 로 나타나기 때문에, 式(52)는

$$T = 2\pi\tilde{a}^2 h\tau_y \frac{\tau_\theta}{\tau_y} = T_p \frac{\tau_\theta}{\tau_y} \quad (56)$$

式(55)에 式(56)을 代入하면, 圓管斷面에 對한 휨모멘트와 비틀이 동시에 작용할 때의 항복조건식이 다음과 같이 간단히 된다.

$$\left(\frac{M}{M^p}\right)^2 + \left(\frac{T}{T^p}\right)^2 = 1 \quad (57)$$

Ⅳ. 結 言

1. 휨모멘트와 비틀이 同時에 작용하는 축이 각각 일정단면이 아니라도, 有限差分法이나 有限要素法으로 降伏條件을 판정할 수 있는 式(9) 및 式(27)을 유도해 보았다.

2. 축이 작은 균일 단면봉이 휨모멘트와 비틀을 동시에 받을 때 Mild Steel 처럼 變形硬化率을 근사적으로 0으로 볼 수 있다.

이때, σ_z 와 τ_θ 로 표현되는 Von Mises 의 降伏條件式을 휨모멘트 M 과 비틀 T 의 관계식으로 유도할 수 있는데, 본 논문에서는 비틀($T < T_p$)만이 작용할때의 응력(σ_{zx}, σ_{zy}) 분포(Roof Analngy)와 휨모멘트($M < M_p$)만이 작용할때의 응력(σ_z)분포와의 상호관계를 그 합성으로써 유도해 보았다.

3. 圓管과 같은 閉斷面 均一斷面棒이 휨모멘트와 비틀을 同時에 받는 경우는 變形硬化率을 0으로 보면 式(57)과 같은 式으로 나타난다는 것을 Reuss의 소성변형율 방정식을 이용하여 유도해 보았다.

4. 본 논문에서 유도된 式(9) 및 式(27)을 利用하여 strain hardenning 을 고려할 때의 降伏條件의 문제를 실제적으로 해결할 수 있는 computer program의 개발이 필요하다.

참 고 문 헌

1. Hill. R: "The MetheMatical Theory Elasticity", Oxford at the Clarendon Press 1950.
2. Sokolovsky, V.V: "塑性學(大橋義夫譯)" 朝倉書店, 1959.
3. FOULKES. J, "Minimum Weight Deisgn and Theory of Plastic collapse", Quart. Appl Math. 10. 1953.
4. 山田嘉昭: "塑性力學", 日刊工業新聞社, 82.
5. 横道英雄: "彈塑性新論", 技報堂, 79. 2.
6. B.G. Neal: "The Plastic Methods of Structural Analysis", New York. John Wiley & Sons. Inc.
7. Jacques Heyman: "Plastic Design of Frames 2", Cambridge 1971.
8. M.R. Horne and L.J. Morris; "Plastic Design of Low-Rise Frames", Granada 1981.
9. Beedle, L.S.: "Plastic Design of Steel Frames", John Wiley & Sons, New York. 1958.
10. Hodge; "Plastic Analysis of Structures", Mcgraw-Hill, 1959.
11. K.I. Majid: "Non-Linear Structures", London Butter worths, 1972.
12. Livesley, R.K.; "Matrixs Methods of Structural Analysis", Pergamon Press, Oxford, 1964.
13. Zienkiewicz, O. C; "The Finite Element Method 3rd. ed"., McGraw-Hill Book Company London.
14. Jennings, A. and Majid, K.; "An Elastic Plastic Analysis by Computer for Framed structures loaded up to collapse", The Structural Engineer, DEC. 1965.
15. 太田俊昭・日野伸一: "曲げとねじりモーメントを受ける一様な長方形断面棒の弾塑性解析", 土木學會論文報告集, 第285號, p.37, 1979.
16. 宇佐美勉: "軸力, 曲げおよび一様ねじりを受ける薄肉開断面の降伏後の擧動", 土木學會論文報告集, 第220號, p.9, 1973.
17. 児島弘行・平尾潔・平面剛, "骨節構造物 自動極限

解析", 土木學會論文報告集, 第218號 1973. 10.

18. Steele, M.C.; "The Plastic Bending and Twisting of Square Section Members", Jour. Mech. Phys. Solids, Vol. 3, p. 156, 1954.

19. Imegwu, E.O.; "Plastic Flexure and Torsion Jour. Mech. Phys. Solids. Vol. 8, p. 141 1960.

∴ 後 記

本 研究는 現代研究費의 지원에 의해 이루어 졌읍니다.

지면을 빌어 감사의 말씀을 전합니다.