UIT Report Vol. 12, pp.327~338, 1981 연구논문집 제12권 제2호 pp.327~338. 1981

有限要素法에 依한 曲線橋의 解析*

陳 致 燮
土木工學科
(1981. 4. 10 접수)

〈要 約〉

도로교 선형에 Curved box-girder를 사용하는 것은 구조적으로 큰 효과를 얻을 수 있다.

교량의 상하슬랩은 Sector plate 요소로, Web부분은 원통 Shell요소로 분할했다. 절점자유도는 12개씩이며 적합한 변위함수를 이용하여 각 요소의 강도행렬을 구하고 교량상판과 Web부분의 결합을 조사하였다

Analysis of Curved Bridges by Finite Element Method

Jin, Chi-Sub
Dept. of Civil Engineering
(Received April 10, 1981)

〈Abstract〉

Certain advantages accrue when curved box girders are used for bridges designed to fit curved highway alignments. In addition, if the structure is fitted to the alignment, certain structural efficiencies, such as longer span and shallow depths, are usually obtained.

This study is concerned with the analysis of horizontally curved box-girder bridges. The finite element method of analysis is used with sector and cylindrical shell elements for discretization of flanges and webs of the bridges. The elements have twelve degress of freedom at their nodes and have similar displacement functions which make them compatible. In particular, I investig ated the salient features of interaction between roadway slab and webs as they are important in the finite element method.

Ⅰ. 序 論

요즈음 도로교에서 곡선교의 이용이 급증하고 있는데 이것은 부재배치 및 架設의 단순함은 물론 교량 構造美에 관한 현대적 감각 때문이다.

지방도로의 수평곡선선형에 있어서는 곡률이 적어 開斷面 교량이 효과적이지만 도시에서는 공간의 제약으로 곡률이 자꾸 커짐에 따라 box 단면 교량이 보다 적합하게 된다. box 단면은 비틀림모멘트에 아주 유효하게 저항하고 특히 도시환경에도 개단면 교량보다 적당하다.(9)(10)

그러나 직선교의 해석에서는 유효하고 정확한 방법들이 많이 개발되었으나 곡선교에 관한 연구는 상대적으로 드물고 불완전하다. 사실상 교량시공과 해석에서 곡률 효과의 경험부족으로 설계에 많은 제한을 받아 부드럽고 효과적인 선형을 얻기는 난점이 많았다.

Mc Manus등(12)과 문헌(10)은 종래에 사용된 각 방법에 대하여 간단한 토의를 했고 이 분야에 관한 문헌들을 수록하고 있다. 지금까지의 연구는 주로 개단면을 가진 수평곡선교의 해석에 집중되었고 box 단면은 너무 거칠고 부정확한 근사적인 방법으로 해석되어 왔다.

* 이 논문은 1981년도 문교부 학술연구조성비에 의하여 연구되었음을 밝히고 감사드린다.

과거에 사용된 Curved box-grder교의 해석방법은 직선보근사법[13] 곡선보이론[12][14] 차분법[15] 유한대판법[11][16][19] 유한요소법[1][18][20]등이 있고 위의 이론적인 결과를 검토하기 위하여 model curved box에 관한 실험적 연구가 병행되었다. 직선보 근사법은 곡률효과를 무시할 수 있을때 근사적으로 사용해 왔으며, 곡선보이론은 단면치수가 지간길이에 비하여 아주 작다고 가정한 것으로 box 단면의 각 요소들을 이런 Slender beam으로 간주하는 것에는 문제가 많다. 이들에 비하여 차분법은 보다 발전된 단계라 볼 수 있는데 처짐각법에 의하였다.

다음으로 析板이나 曲板 Strip으로 분할하여 Fourier급수로 전개한 변위함수를 이용 강도행렬을구하는 유한대판법이 많이 연구되었는데 이는 경계조건에서 심한 제약을 받아 단순 지지되지 않을 경우 사용 불가능하다. 이에 반하여 유한요소법은 복잡한 구조물에 널리 적용되며 일반적으로 정확한 방법임은 물론 가장 융통성이 많다고 할 수 있다.

curved box-girder교의 유한요소해석을 위하여 많은 요소들이 개발되었는데 그중 Aneja와 Roll은 Sector plate를 곡선경계를 가지는 평판요소로 Web 부분을 평면 4각형 요소로 분할했기 때문에 정확한 것이 되지 못한다.

이러하여 이 주제에 관한 앞서의 연구가들은 결과가 정확하고 Computer Cost를 줄이기 위한 다른 형태의 요소들을 이용하도록 권장하고 있다.

본 연구에서는 Bogner[3][6]가 원통 Shell에 이용한 1차원, 2길, 1차 Hermite보간다항식의 곱의 합으로 표현되는 변위함수를 극좌표로 나타내어 Sector plate와 Web에 적용하였다. 각 요소들은 4개의 절점을 가지며, 자유도는 각 절점에 12개씩 48개이다. 이들 요소는 모든 수렴조건들을 만족시키는 Comforming type의 요소들이다.

또 diaphragm은 면내응력만을 받는 사각형요소로 분할했다.

Ⅱ. 橋梁의 分割

有限要素解析의 첫 단계는 構造物을 有限要素들로 分割하는 것이다. Box 단면 水平曲線橋는 일반적으로 路面슬랩, box-girder의 하부 플랜지, box-girder의 web와 diaphragm의 네부분으로 나누어 진다. 실제 교량에서의 diaphragm은 여러가지 형태를 가질 수 있는데 첫째 얇은 正方形板이나 矩形板으로 開口를 가진 것과 갖지않는 것이 있다. 開口의 형태도 矩形이나 圓形등 다양하다. 둘째 트러스형태를 갖춘것과 세째 직선보가 있다.

이들 diaphragm중 본 論文에서는 面內荷重에 저항하는 矩形開口가 있는 矩形板만 취급한다.

box-girder의 路面슬랩과 하부플랜지는 폭에 비하여 두께가 아주 작고 작용하중하에서 구조거인 거동이 작기 때문에 얇은 판으로 간주할 수 있다.

Ⅲ. 假定과 制限

(1) 上部床板은 cylindrically orthotropic하며 선형탄성인 균질재료로 되어있고 교량의 다른 부분은 등방성인 균질재료로 이루어졌다고 가정한다.

(2) 고전적인 thin plate이론과 thin shell이론이 sector plate요소와 shell요소를 개발하는데 이용 되었다.

(3) 變形率—變位關係의 線形부분만 이용하여 small deflection으로 이 연구를 제한한다.

(4) Box의 Web는 상부상판과 하부플랜지에 수직한 원통 shell로 취급한다.

(5) 支點은 半徑方向으로 위치한다.

Ⅳ. 좌 표 계

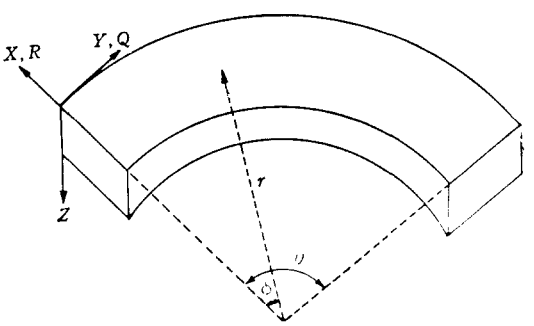


Fig.1 Global coordinate system

構造에 對한 전체좌표는 Fig. 1.에서와 같이 원통좌표 R,Q,Z이고 좌표의 원점은 교량의 상부상판의 곡률중심이다. R축은 곡률중심으로 부터 밖으로 向하는 方向이 +이고 Z축은 하향이 +이며 Q축은 R,Z로 우수 원통좌표계를 일으키는 方向이 ⊕이다.

R, Q, Z 축에 대응하는 전체변위는 각각 U, V, W로 이들의 ⊕方向은 대응축의 ⊕方向과 같다.

반경방향, 접선방향, 수직방향의 작용력이나 反力은 P_R, P_Q, P_Z이다.

Ⅴ. Sector Plate 요소

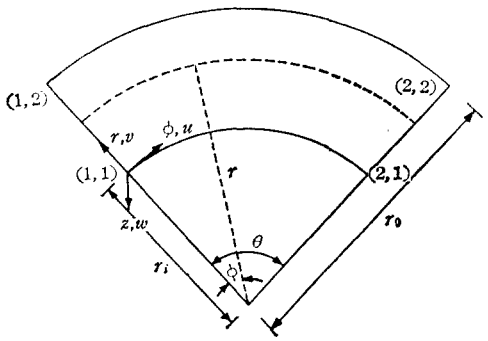


Fig.2 Sector plate element

상부슬랩과 하부플랜지는 Sector plate 요소로 분할한다. 이 요소의 변위함수는 극좌표로 표시한 1차원, 2점, 1차 Hermite 보간 다항식의 곱의 합으로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$w=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}[H_{0i}(\phi)H_{0j}(r)w_{ij}+H_{1i}(\phi)H_{0j}(r)w\phi_{ij}+H_{0j}(\phi)H_{1j}(r)wr_{ij}+H_{1i}(\phi)H_{1j}(r)w\phi r_{ij}] \quad (1)$$

변위 u, v에 대해서도 위와 마찬가지로 쓸수 있다. 여기서 u, v, w는 plate의 中面의 변위로서 각각 접선방향, 반경방향, 수직방향변위이다.

좌표계의 원점은 곡률중심이고 변위는 좌표계의 ⊕방향변위가 ⊕이다.

식 (1)에서 사용한 기호는 다음과 같다.

w_{ij} : 절점(i,j)의 수직변위

$w\phi_{ij}=\dfrac{1}{r_{ij}}\dfrac{\partial w_{ij}}{\partial\phi}$: 접선방향에 관한 수직변위의 1차 편도함수.

$wr_{ij}=\dfrac{\partial w_{ij}}{\partial r}$: 반경방향에 관한 수직변위의 1차 편도함수.

$w\phi r_{ij}=\dfrac{1}{r_{ij}}\dfrac{\partial^2 w_{ij}}{\partial\phi\partial r}$: 접선방향과 반경방향에 관한 수직변위의 2차 편도함수.

여기서 r_{ij}는 요소좌표계 원점에서 잰 절점(i,j)의 반경이다. 같은 정의가 u, v변위성분에도 적용되어 한절점에 12개의 자유도가 존재하며 Fig.2의 Sector plate 요소는 48개의 자유도를 갖는다.

각 절점 i의 12개의 자유도는 다음과 같다.

$$\{u\}^T=\left\{u,\ \frac{1}{r_i}u\phi,\ ur,\ \frac{1}{r_i}u\phi r,\ v,\ \frac{1}{r_i}v\phi,\ vr,\ \frac{1}{r_i}v\phi r,\ w,\ \frac{1}{r_i}w\phi,\ wr,\ \frac{1}{r_i}w\phi r\right\}$$

$H_{ij}(\phi)$, $H_{ij}(r)$ 등은 1차원, 2점, 1차 Hermite 보간 다항식으로서 극좌표를 표시하면 식 (2)와 같다.[4]

$$\left.\begin{aligned}
H_{01}(\phi)&=(2\phi^3-3\theta\phi^2+\theta^3)/\theta^3\\
H_{02}(\phi)&=-(2\phi^3-3\theta\phi^2)/\theta^3\\
H_{11}(\phi)&=\gamma(\phi^3-2\theta\phi^2+\theta^2\phi)/\theta^2\\
H_{12}(\phi)&=\gamma(\phi^3-\theta\phi^2)/\theta^2\\
H_{01}(\gamma)&=2(\gamma-\gamma_i)^3-3(\gamma_0-\gamma_i)(\gamma-\gamma_i)^2\\
&\quad+(\gamma_0-\gamma_i)^3\}/(\gamma_0-\gamma_i)^3\\
H_{02}(\gamma)&=-\{2(\gamma-\gamma_i)^3-3(\gamma_0-\gamma_i)(\gamma-\gamma_i)^2\}\\
&\quad/(\gamma_0-\gamma_i)^3\\
H_{11}(\gamma)&=\{(\gamma-\gamma_i)^3-2(\gamma_0-\gamma_i)(\gamma-\gamma_i)^2\\
&\quad+(\gamma_0-\gamma_i)^2(\gamma-\gamma_i)\}/(\gamma_0-\gamma_i)^2\\
H_{12}(\gamma)&=\{(\gamma-\gamma_i)^3-(\gamma_0-\gamma_i)(\gamma-\gamma_i)^2\}/(\gamma_0-\gamma_i)^2
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

위의 Hermite 보간 다항식은 다음과 같은 성질을 갖고 있다.

$$\left.\begin{aligned}
&\phi\text{에 관하여}\\
&H_{01}(0)=1 \qquad H_{01}(\theta)=0\\
&H_{02}(0)=0 \qquad H_{02}(\theta)=1\\
&H_{11}(0)=0 \qquad H_{11}(\theta)=0\\
&H_{12}(0)=0 \qquad H_{11}(\theta)=0\\
&\gamma\text{에 관하여}\\
&H_{01}(\gamma_i)=1 \qquad H_{01}(\gamma_0)=0\\
&H_{02}(\gamma_i)=0 \qquad H_{02}(\gamma_0)=1\\
&H_{11}(\gamma_i)=0 \qquad H_{11}(\gamma_0)=0\\
&H_{12}(\gamma_i)=0 \qquad H_{12}(\gamma_0)=0
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

강도행렬과 합응력행렬에 쓰일 변형률—변위관계는 Small deflection을 가정한 thin plate theory에 의한 것으로 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_\phi&=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial\phi}+\frac{v}{\gamma}-\left(\frac{z}{\gamma^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2}+\frac{z}{\gamma}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right)\\
\varepsilon_r&=\frac{\partial v}{\partial r}-z\frac{\partial^2 w}{\partial\gamma^2}\\
\gamma_{\phi r}&=\frac{\partial u}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial v}{\partial\phi}-\frac{u}{\gamma}\\
&\quad+2z\left\{-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial w}{\partial\phi}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

또 응력—변형률관계식은 앞서의 가정에 따라

$$\left\{\begin{matrix}\sigma_\phi\\ \sigma_\gamma\\ \tau_{\phi\gamma}\end{matrix}\right\}=\left[\begin{matrix}D_\phi & D_1 & 0\\ D_1 & D_\gamma & 0\\ 0 & 0 & D_{\phi\gamma}\end{matrix}\right]\left\{\begin{matrix}\varepsilon_\phi\\ \varepsilon_\gamma\\ \gamma_{\phi\gamma}\end{matrix}\right\} \quad (5)$$

여기서 $\sigma_\phi, \sigma_\gamma, \tau_{\phi\gamma}$는 각각 접선방향응력, 반경방향응력, 전단응력이며 $D_\phi, D_\gamma, D_1, D_{\phi\gamma}$는 다음과 같다

$$\left.\begin{aligned}D_\phi&=\frac{E_\phi^2}{E_\phi-\nu_{\phi\gamma}{}^2E_\gamma}\\ D_\gamma&=\frac{E_\phi E_\gamma}{E_\phi-\nu_{\phi\gamma}{}^2E_\gamma}\\ D_1&=\nu_{\phi\gamma}.D_\gamma\\ D_{\phi\gamma}&=\frac{E_\phi E_\gamma}{2(\sqrt{E_\phi E_\gamma}+\nu_{\phi\gamma}E_\gamma)}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

여기서 E_ϕ=접선방향 탄성계수

E_γ=반경방향 탄성계수

$\nu_{\phi\gamma}$=포와송비

또한 요소내의 변위를 요소의 절점변위의 항으로 표시할 수 있다.

$$\left\{\begin{matrix}u\\ v\\ w\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}\bar H & 0 & 0\\ 0 & \bar H & 0\\ 0 & 0 & \bar H\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}\bar u\\ \bar v\\ \bar w\end{matrix}\right\} \quad (7)$$

(3×1) (3×48) (48×1)

$\bar H$는 식 (1)의 16개의 Hermite 보간 다항식의 곱을 포함하는 변위함수이다.

즉

$$\begin{aligned}\bar H\ =\ (1\times16)\ &[H_{01}(\phi)H_{01}(\gamma),\ H_{11}(\phi)H_{01}(\gamma),\ H_{01}(\phi)H_{11}(\gamma),\ H_{11}(\phi)H_{11}(\gamma),\ H_{02}(\phi)H_{01}(\gamma),\\ &H_{12}(\phi)H_{01}(\gamma),H_{02}(\phi)H_{11}(\gamma),\ H_{12}(\phi)H_{11}(\gamma),\ H_{02}(\phi)H_{02}(\gamma),\ H_{12}(\phi)H_{02}(\gamma),\\ &H_{02}(\phi)H_{12}(\gamma),\ H_{12}(\phi)H_{12}(\gamma),\ H_{01}(\phi)H_{02}(\gamma),\ H_{11}(\phi)H_{02}(\gamma),\ H_{01}(\phi)H_{12}(\gamma),\\ &H_{11}(\phi)H_{12}(\gamma)] \quad (8)\end{aligned}$$

식 (7)을 식 (4)에 대입하면 변형률이 절점변위의 항으로 다음과 같이 표시된다.

$$\left\{\begin{matrix}\varepsilon_\phi\\ \varepsilon_\gamma\\ \gamma_{\phi\gamma}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{\gamma}\bar H_\phi & \frac{1}{\gamma}\bar H & -z\left(\frac{1}{\gamma_2}\bar H_{\phi\phi}+\frac{1}{\gamma}\bar H_2\right)\\ 0 & \bar H_\gamma & -z\bar H_{\gamma\gamma}\\ \bar H_\gamma-\frac{1}{\gamma}\bar H & \frac{1}{\gamma}\bar H_\phi & 2z\left(-\frac{1}{\gamma}\bar H_{\phi\gamma}+\frac{1}{\gamma_2}\bar H_\phi\right)\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\bar u\\ \bar v\\ \bar w\end{matrix}\right\} \quad (9)$$

(3×1) (3×48) (48×1)

여기서 $\bar H_\gamma$는 반경방향에 관한 $\bar H$ 행렬의 1차편도함수이고 $\bar H_\phi, \bar H_{\phi\phi}, \bar H_{\gamma\gamma}, \bar H_{\phi\gamma}$들도 유사한 정의가 된다.

식 (9)의 (3×48)행렬은 변형률행렬로 바로 $[B]$ 행렬이 된다. 요소강도행렬 K^e는

$$[K^e]=\int_{\gamma_i}^{\gamma_0}\int_0^\theta\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[B]^T[D][B]d_z,\gamma d_\phi,d\gamma \quad (10)$$

(48×48) (48×3)(3×3)(3×48)

여기서 $[D]$는 식 (5)의 (3×3) 행렬이다.

식 (10)의 행렬의 곱셈과 적분을 수행하면 다음과 같이 분할된다.

$$[K^e]=\left[\begin{matrix}K^{(U)} & K^{(UV)T} & 0\\ K^{(UV)} & K^{(V)} & 0\\ 0 & 0 & K^{(W)}\end{matrix}\right] \quad (11)$$

부분행렬은 모두 (16×16)이고 전체행렬은 대칭이 된다. 주대각선상의 부분행렬은 각 변위사이의 Uncoupling을 포함하며 대칭이지만 다른 부분행렬은 첨자로 표시된 바와같이 u,v 간의 Coupling을 포함하는 비대칭행렬이다.

요소합응력행렬은 면내응력부분과 휨응력부분으로 구성된다.

$$\{SR\}=[N_\phi, N_\gamma, N_{\phi\gamma}, \vdots M_\phi, M_\gamma, M_{\phi\gamma}, Q_\phi, Q_\gamma]^T \quad (12)$$

면내응력부분 $N_\phi, N_\gamma, N_{\phi\gamma}$는 식 (9)의 면내부분을 식 (5)에 대입하면 면내응력이 절점변위의 항으로 나타나고 이것을 요소두께에 걸쳐 적분하면 얻어진다.

마찬가지로 휨모멘트, 비틀림모멘트, 전단력들도 식 (9)의 휨부분을 식 (5)에 대입 적분하여 얻어진다.

Sector plate 요소내의 점 A에 ϕ, γ, z 방향으로 3가지 성분 p_ϕ, p_γ, p_z를 가진 집중하중에 대한 (48×1)의 등가절점력 벡타는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{F\}^e=\left\{\begin{matrix}\bar H^T p_\phi\\ \bar H^T p_\gamma\\ \bar H p_z{}^T\end{matrix}\right\}_A \quad (13)$$

예로써 점 $A(\theta,\gamma_i)$에 z 방향 성분만을 가진 집중하중 p가 작용할때의 등가절점력은 $F_{37}=p$이고 나머지는 모두 0이다.

요소에 수직방향으로 등분포하중 q가 작용할 때의 등가 휨절점력은

$$\{F\}^e=\int_{\gamma_i}^{\gamma_0}\int_0^\theta q\ \bar H^T\ \gamma d_\phi d\gamma \quad (14)$$

16×1

이고 예를 들어 $F_1=\int_{\gamma_i}^{\gamma_0}\int_0^\theta qH_{01}(\phi)H_{01}(\gamma)\gamma d\phi d\gamma$로

직접 적분하면 $q\theta(\gamma_0-\gamma_i)(3\gamma_0+7\gamma_i)/40$으로 된다.

Ⅱ. 원통 Shell 요소

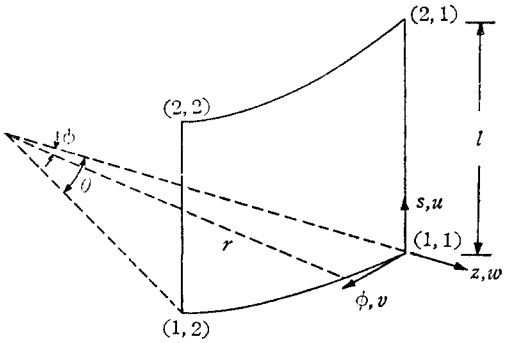


Fig. 3 Cylindrical shell element

box 단면의 Web는 원통 Shell 요소로 분할하는데 변위함수는 Sector plate 요소와 마찬가지로 1차원, 2점, 1차 Hermite 보간다항식의 곱의 합으로 전개되며 4절점에서 48개의 자유도를 가진다. 변위함수는 다음과 같다.

$$w=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}[H_{0i}(s)H_{0j}(\phi)w_{ij}+H_{1i}(s)H_{0j}(\phi)ws_{ij}+H_{0i}(s)H_{1j}(\phi)w\phi_{ij}+H_{1i}(s)H_{1j}(\phi)ws\phi_{ij}] \tag{15}$$

여기서 $w\phi_{ij}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial w_{ij}}{\partial\phi}$ 이고 $ws\phi_{ij}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial s\partial\phi}$ 이다.

변위 u,v에 대해서도 같은 식이 되어 각 절점자유도는

$$\left\{u,\ us,\ \frac{1}{\gamma}u\phi,\ \frac{1}{\gamma}u_{s\phi},\ v,v_s,\ \frac{1}{\gamma}v\phi,\ \frac{1}{\gamma}v_{s\phi},\ w,w_s,\ \frac{1}{\gamma}w\phi,\ \frac{1}{\gamma}w_{s\phi}\right\}$$

로 12개가 된다.

$H_{ij}(\phi)$는 식 (2)의 앞부분과 같고 $H_{ij}(s)$는 식 (2)의 뒷부분에서 $(\gamma-\gamma_i)$ 대신 s, $(\gamma_0-\gamma_i)$대신 l을 대입하면 얻어진다. 변형률—변위 관계식은

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_s&=\frac{\partial u}{\partial s}-z\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\\ \varepsilon_\phi&=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial v}{\partial\phi}+\frac{w}{\gamma}-\frac{z}{\gamma^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2}-\frac{\partial v}{\partial\phi}\right)\\ \gamma_{s\phi}&=\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial\phi}-\frac{2z}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\phi}-\frac{\partial v}{\partial s}\right)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

인데 변형률은 수직축 z 내에서 선형이고 u,v,w의 2차항을 무시한 thin shell theory에 의한 것이다.

또한 응력—변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_s\\ \sigma_\phi\\ \tau_{s\phi}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_s\\ \varepsilon_\phi\\ \gamma_{s\phi}\end{Bmatrix} \tag{17}$$

요소강도행렬등은 Sector plate 요소때와 같은 순서를 계산된다.

Ⅶ. 矩 形 板 요 소

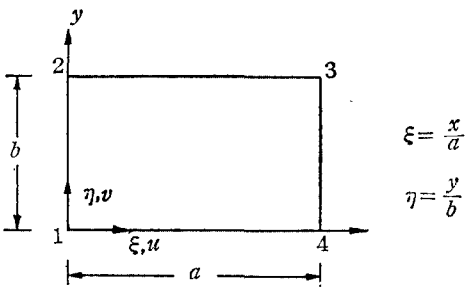


Fig. 4 Rectangular plate element

중간 diaphragm과 端 diaphragm은 구형판요소로 분할한다. 교량에서 diaphragm의 기능은 단면의 변형방지와 면내력에 대한 저항증진이므로 4개의 절점 각각에서 면내 자유도 u,v만 갖는 것으로 한다.

이 요소의 변위함수는

$$\left.\begin{aligned}u&=(1-\xi)(1-\eta)u_1+(1-\xi)\eta u_2+\xi\eta u_3+\xi(1-\eta)u_4\\ v&=(1-\xi)(1-\eta)v_1+(1-\xi)\eta v_2+\xi\eta v_3+\xi(1-\eta)v_4\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

여기서 $u_1,v_1,\cdots u_4,v_4$는 요소의 8개의 자유도이다.

이 요소는 이웃요소경계에서 변위의 연속이 보증되는 적합형의 변위함수이다. 사용재료는 등방성이고 선형탄성인 균질재료로 가정한다.

요소강도행렬등은 문헌 (7)에 상세히 수록되어 있다.

Ⅷ. 요소결합과 변환

각 절점에서 m개의 자유도를 가진 요소가 n개의 자유도를 가진 다른 요소와 연결될 때 두 요소의 공통절점에서는 $m+n$개의 종속자유도를 갖게 된다. 절점의 종속자유도 사이에 적합조건을 적용하면 p개의 관계가 생긴다. 이리하여 공통절점의 감소된

자유도의 수는 $m+n-p$ 개가 된다.

Fig.5는 각 요소들의 국소좌표와 구조전체좌표를 표시한 것이며 Sector plate 요소나 Shell 요소만으로 분할했을 때 연속체의 절점에는 $12k$ 개의 종속자유도가 존재한다. 여기서 k는 절점에 연결된 요소의 수이다.

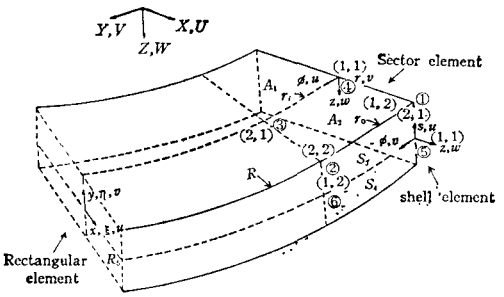


Fig.5 Global and Local coordinate system

요소 경계에서의 변위와 그 기울기의 연속을 요구하는 수렴기준으로 인한 적합조건과 절점에 연결된 요소들의 경계에서의 결합조건을 이용하면 이 연속체의 임의 절점들의 자유도들 사이에 $12(k-1)$개의 관계식을 얻을 수 있다.

그러므로 전점의 독립자유도의 수는 12개로 줄어든다.

1. Sector plate 요소들 사이의 결합

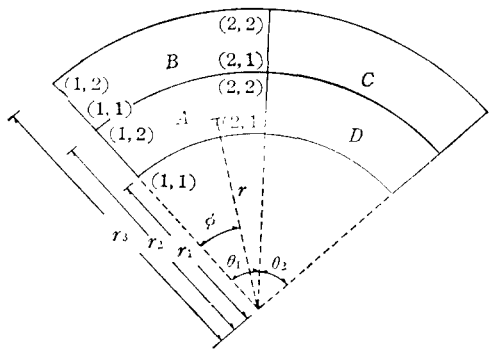


Fig.6 Connectivity of sector to sector

요소 A,B,C,D의 공통절점은 48개의 자유도를 갖고 있으나 이 자유도들은 모두 독립적은 아니다. 수렴기준으로 부터 요소 A와 요소 B사이에 다음 조건이 만족되어야 한다.

$$U^A(\phi,\gamma_2)=U^B(\phi,\gamma_2) \quad (a)$$
$$V^A(\phi,\gamma_2)=V^B(\phi,\gamma_2) \quad (b)$$
$$W^A(\phi,\gamma_2)=W^B(\phi,\gamma_2) \quad (c) \qquad (19)$$
$$\frac{\partial W^A(\phi,\gamma_2)}{\partial r}=\frac{\partial W^B(\phi,\gamma_2)}{\partial \gamma} \quad (d)$$

식 (1)을 식 (19c)의 양변에 대입하면 다음 관계를 얻는다.

$$W^A(\phi,\gamma_2)=H_{01}(\phi)W^A{}_{12}+H_{02}(\phi)W^A{}_{22}+H_{11}(\phi)W\phi^A{}_{12}+H_{12}(\phi)W\phi^A{}_{22} \quad (a)$$
$$W^B(\phi,\gamma_2)=H_{01}(\phi)W^B{}_{11}+H_{02}(\phi)W^B{}_{21}+H_{11}(\phi)^B{}_{11}+H_{12}(\phi)W\phi^B{}_{21} \quad (b) \qquad (20)$$

Hermite 보간다항식은 1차 독립이므로 식 (19c)의 수렴조건은 다음식이 성립하면 요소 A와 요소 B의 경계에서 만족된다.

$$W^A{}_{12}=W^B{}_{11}, \quad W^A{}_{22}=W^B{}_{21}$$
$$W\phi^A{}_{12}=W_\phi{}^B{}_{11}, \quad W\phi^A{}_{22}=W\phi^B{}_{21} \qquad (21)$$

마찬가지로 식 (1)을 식 (19.d)의 양변에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial W^A(\phi,\gamma_2)}{\partial \gamma}=H_{01}(\phi)W^A{}_{\gamma 12}+H_{02}(\phi)W^A{}_{\gamma 22}+H_{11}(\phi)W^A{}_{\phi\gamma 12}+H_{12}(\phi)W^A{}_{\phi\gamma 22} \quad (a)$$
$$\frac{\partial W^B(\phi,\gamma_2)}{\partial \gamma}=H_{01}(\phi)W^B{}_{\gamma 11}+H_{02}(\phi)W^B{}_{\gamma 21}+H_{11}(\phi)W^B{}_{\phi\gamma 11}+H_{12}(\phi)W^B{}_{\phi\gamma 21} \quad (b)$$

그러므로 식 (19.d)의 수렴조건은 다음 식이 성립하면 요소 A와 B의 경계에서 만족된다.

$$W^A{}_{\gamma 12}=W^B{}_{\gamma 11}, \quad W^A{}_{\gamma 22}=W^B{}_{\gamma 21}$$
$$W^A{}_{\phi\gamma 12}=W^B{}_{\phi\gamma 11}, \quad W^A{}_{\phi\gamma 22}=W^B{}_{\phi\gamma 21} \qquad (23)$$

마찬가지 방법으로 식 (19.a), (19.b)의 수렴조건들은 다음식들이 성립하면 요소들 경계에서 만족된다.

$$U^A{}_{12}=U^B{}_{11}, \quad U^A{}_{22}=U^B{}_{21}$$
$$U^A{}_{\phi 12}=U^B{}_{\phi 11}, \quad U^A{}_{\phi 22}=U^B{}_{\phi 21}$$
$$V^A{}_{12}=V^B{}_{11}, \quad V^A{}_{22}=V^B{}_{21}$$
$$V^A{}_{\phi 12}=V^B{}_{\phi 11}, \quad V^A{}_{\phi 22}=V_{\phi 21} \qquad (24)$$

식 (19)의 수렴조건을 만족시키는 것 뿐만 아니라 해석하려는 문제에 따라 구조거동을 살펴봄으로서 자유도의 수를 줄일 수 있다.

예를들면 평판문제의 해에서 변형률 $\varepsilon_\phi, \varepsilon_r, \gamma_{\phi r}$ 과 中面에 수직한 방향의 회전 θ_z는 요소 A와 요소 B의 공통경계에서 연속이어야 함을 알 수 있다.

$$U^A{}_{\gamma 12}=U^B{}_{\gamma 11}, \quad U^A{}_{\gamma 22}=U^B{}_{\gamma 21}$$
$$U^A{}_{\phi\gamma 12}=U^B{}_{\phi\gamma 11}, \quad U^A{}_{\phi\gamma 22}=U^B{}_{\phi\gamma 21}$$
$$V^A{}_{\gamma 12}=V^B{}_{\gamma 11}, \quad V^A{}_{\gamma 22}=V^B{}_{\gamma 21}$$

$$V^{A}_{\phi r12}=V^{B}_{\phi r11}, \qquad V^{A}_{\phi r22}=V^{B}_{\phi r21} \tag{25}$$

요소 A와 요소 B의 공통경계에서의 수렴조건과 추가적인 적합조건을 이용하여 Fig.6에 있는 요소 A,B,C,D의 공통절점의 자유도가 48개에서 36개로 줄어들었다.(식 21,23,24,25) 요소 $B-C$, $C-D$, $D-A$의 공통경계에서도 마찬가지여서 공통절점의 독립자유도는 12개로 된다.

이리하여 국소좌표계에서 두개의 Sector plate 요소사이의 공통절점에서 12개의 독립자유도는

$$\{U\}^{T}=\left\{U,\frac{1}{R}U_{\phi},U_{r},\frac{1}{R}U_{r\phi},V,\frac{1}{R}V_{\phi},V_{r},\frac{1}{R}V_{r\phi},W,\frac{1}{R}W_{\phi},W_{r},\frac{1}{R}W_{r\phi}\right\} \tag{26}$$

여기서 R은 절점의 반경이다.

전체 좌표계에서 이런 공통절점의 12개의 독립자유도는

$$\{U\}^{T}=\left\{U,\frac{1}{R}U_{Y},U_{X},\frac{1}{R}U_{XY},V,\frac{1}{R}V_{Y},V_{X},\frac{1}{R}V_{XY},W,\frac{1}{R}W_{Y},W_{X},\frac{1}{R}W_{XY}\right\} \tag{27}$$

국소좌표와 전체좌표계 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&U=V\\
&\frac{1}{R}U_{\phi}=\frac{1}{R}V_{Y}\\
&U_{r}=V_{X}\\
&\frac{1}{R}U_{r\phi}=\frac{1}{R}V_{XY}\\
&V=U\\
&\frac{1}{R}V_{\phi}=\frac{1}{R}U_{Y}\\
&V_{r}=U_{X}\\
&\frac{1}{R}V_{r\phi}=\frac{1}{R}U_{XY}\\
&W=W\\
&\frac{1}{R}W_{\phi}=\frac{1}{R}W_{Y}\\
&W_{r}=W_{X}\\
&\frac{1}{R}W_{r\phi}=\frac{1}{R}W_{XY}
\end{aligned} \tag{28}$$

그러므로 두개의 Sector plate 요소 사이에 공통되는 절점의 자유도를 전체 좌표계로 부터 국소좌표계로 변환시키는 변환행렬 $[T_1]$은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{u\}_{\text{local}}=[T_1]\{U\}_{\text{global}} \tag{29}$$

여기서

$$[T_1]=\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
\hdashline
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hdashline
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right] \tag{30}$$

2. Shell 요소들 사이의 결합

국소좌표계에서 두개의 Shell 요소에 공통인 절점의 12개의 독립자유도는

$$\{U\}^{T}=\left\{U,U_{s},\frac{1}{R}U\phi,\frac{1}{R}U_{s}\phi,V,V_{s},\frac{1}{R}V\phi,\frac{1}{R}V_{s\phi},W,W_{s},\frac{1}{R}W\phi,\frac{1}{R}W_{s\phi}\right\} \tag{31}$$

전체 좌표계에서 그 절점의 12개의 독립자유도는

$$\{U\}^{T}=\left\{U,\frac{1}{R}U_{Y},U_{Z},\frac{1}{R}U_{ZY},V,\frac{1}{R}V_{Y},V_{Z},\frac{1}{R}V_{ZY},W,\frac{1}{R}W_{Y},W_{Z},\frac{1}{R}W_{ZY}\right\} \tag{32}$$

그러므로 두개의 Shell 요소사이의 공통절점의 전체자유도를 국소좌표계로 변환시키는 변환행렬 $[T_2]$는 다음과 같다.

$$\{U\}_{\text{local}}=[T_2]\{U\}_{\text{global}} \tag{33}$$

여기서

$$[T_2]=\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
\hdashline
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
\hdashline
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right] \tag{34}$$

3. Sector 요소와 Shell 요소의 결합

국소좌표계에서 Sector 요소와 Shell 요소 사이의

공통절점에는 24개의 종속자유도가 있다.

Fig.5의 Sector 요소 A_2와 Shell 요소 S_3를 생각하자. 이 두 요소경계에서 수렴 기준에 의한 적합조건은 다음과 같다.

$$V^A(\phi, r_0)=W^s(\phi, l) \quad (a)$$
$$U^A(\phi, r_0)=V^s(\phi, l) \quad (b)$$
$$W^A(\phi, r_0)=-U^s(\phi, l) \quad (c)$$
$$\theta_\phi{}^A(\phi, r_0)=\theta_\phi{}^s(\phi, l) \quad (d) \qquad (35)$$

여기서 θ_ϕ는 ϕ축에 대한 회전을 의미한다.

또 $\theta_\phi{}^A$와 $\theta_\phi{}^s$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta_\phi{}^A=\frac{\partial W^A}{\partial r} \quad (a)$$

$$\theta_\phi{}^s=\frac{\partial W^s}{\partial S} \quad (b) \qquad (36)$$

그러므로 식 (35.d)는 plate와 Shell의 공통경계에서 Sector 요소의 수직방향경사와 Shell 요소의 수직방향 경사가 같음을 의미한다.

따라서 이 두 요소사이의 직각은 변형후에도 직각으로 남아 있게 될 것이다.

식 (1), 식 (15)와 1차 Hermite 보간다항식의 성질로 부터 요소의 한 경계상의 변위와 그 1차도함수는 같은 경계에서의 절점자유도에 의존할 것이다. 예를 들면

$$V^A(\phi, r_0)=\sum_{i=1}^{2}[H_{0i}(\phi)H_{02}(r_0)V_{i2}+H_{1i}(\phi)H_{02}(r_0)V_{\phi i2}+H_{0i}(\phi)H_{12}(r_0)V_{ri2}(\phi)H_{12}(r_0)V_{\phi ri2}]$$
$$=\sum_{i=1}^{2}[H_{0i}V^A{}_{i2}+H_{1i}(\phi)V^A{}_{\phi i2}] \quad (37)$$

$$W^s(\phi, l)=\sum_{j=1}^{2}[H_{02}(l)H_{0j}(\phi)W_{2i}+H_{12}(l)H_{0j}(\phi)W_{s2j}+H_{02}(l)H_{1j}(\phi)W_{\phi 2j}+H_{12}(l)H_{1j}(\phi)W_{s\phi 2j}]$$
$$=\sum_{j=1}^{2}[H_{0j}(\phi)W^s{}_{2j}+H_{1j}(\phi)W^s{}_{\phi 2j}] \quad (38)$$

식 (37), (38)을 식 (35.a)에 대입하고 Hermite 다항식이 1차독립임을 주목하면 식 (35.a)로 나타낸 기하학적 적합조건은 다음식이 성립될 때 전체 공통경계에 연하여 만족된다.

$$V_{12}{}^A=W_{21}{}^s, \qquad V_{22}{}^A=W_{22}{}^s$$
$$V^A{}_{\phi 12}=W^s{}_{\phi 21}, \qquad V^A{}_{\phi 22}=W^s{}_{\phi 22} \quad (39)$$

따라서 Sector 요소와 Shell 요소사이의 공통절점 i에서는

$$V_i{}^A=W_i{}^s \text{ 이고 } V^A{}_{\phi i}=W^s{}_{\phi i} \quad (40)$$

식 (1)과 식 (15)로 부터

$$\frac{\partial W^A(\phi, r_0)}{\partial r}=\sum_{i=1}^{2}[H_{0i}(\phi)W^A{}_{ri2}+H_{1i}(\phi)W^A{}_{\phi ri2}] \quad (a)$$

$$\frac{\partial W^s(\phi, l)}{\partial S}=\sum_{j=1}^{2}[H_{0j}(\phi)W^s{}_{s2j}+H_{1j}(\phi)W^s{}_{s\phi 2j}] \quad (b) \qquad (41)$$

따라서

$$W^A{}_{r12}=W^s{}_{s21}, \qquad W^A{}_{r22}=W^s{}_{s22}$$
$$W^A{}_{r\phi 12}=W^s{}_{s\phi 21}, \qquad W^A{}_{r\phi 22}=W^s{}_{s\phi 22} \quad (42)$$

공통절점으로 표현하면

$$W^A{}_{ri}=W^s{}_{si} \text{ 이고 } W^A{}_{r\phi i}=W^s{}_{s\phi i} \quad (43)$$

같은 방법으로 식 (35.b.c)에 있는 기하학적 적합조건은 다음 식들이 각 절점에서 성립될 때 전체공통 경계에서 만족된다.

$$U_i{}^A=V_i{}^s \text{ 이고 } U^A{}_{\phi i}=V^s{}_{\phi i} \quad (44)$$
$$W_i{}^A=-U_i{}^s \text{ 이고 } W^A{}_{\phi i}=-U^s{}_{\phi i} \quad (45)$$

식 (40), (43), (44), (45)은 Sector 요소와 Shell 요소사이의 공통절점의 24개의 종속자유도사이에 8개의 관계를 지어준다.

이리하여 각 절점의 자유도가 16개로 줄어든다. 또 다른 연결조건을 생각하면 즉 2개의 요소경계에서 다음 조건을 가진다고 가정하자.

$$\theta_r{}^A(\phi, r_0)=\theta_Z{}^s(\phi, l) \quad (46)$$
$$\theta_Z{}^A(\phi, r_0)=-\theta_s{}^s(\phi, l) \quad (47)$$

여기서 $\theta_r{}^A$를 Sector 요소의 국소좌표계에서 r축주위의 회전으로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\theta_r{}^A=-\frac{\partial W^A}{r\partial\phi} \quad (48)$$

또한

$$\theta_Z{}^s=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial\phi}-\frac{\partial V^s}{\partial S}\right) \quad (49)$$

$$\theta_Z{}^A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V^A}{\partial\phi}-\frac{\partial U^A}{\partial r}-\frac{U^A}{r}\right) \quad (50)$$

$$\theta_s{}^s=\frac{V^s}{R}-\frac{1}{R}\frac{\partial W^s}{\partial\phi} \quad (51)$$

식 (48), (49), (50), (51)을 식 (46), (47)에 대입하고 $r=R$로 놓으면 두 요소경계에서 다음 두가지 관계가 얻어진다.

$$\frac{1}{R}\frac{\partial U^s(\phi, l)}{\partial\phi}=-\frac{\partial V^s(\phi, l)}{\partial S} \quad (52)$$

$$\frac{\partial U^A(\phi, r_0)}{\partial r}=\frac{1}{R}U^A(\phi, r_0)-\frac{1}{R}\frac{\partial V^A}{\partial\phi}(\phi, r_0) \quad (53)$$

그러나 이런 관계는 공통경계에 연하여 모두가 만

족될 수 있는 것은 아니므로 경계의 공통절점 i에서만 만족된다고 하면

$$-\frac{1}{R}U\phi_i{}^s=-V^s{}_{si} \tag{54}$$

$$U^A{}_{ri}=\frac{1}{R}(U_i{}^A-V^A{}_{\phi i}) \tag{55}$$

정확히 옳은 것은 아니지만 또 다른 연결조건을 생각한다.

이것은 공통경계상의 Sector 국소좌표의 z축 방향. Shell 국소좌표의 S축방향의 변형률의 연속조건이다.

$$\varepsilon_Z{}^A(\phi,r_0)=\varepsilon_s{}^s(\phi,l) \tag{56}$$

$\varepsilon_Z{}^A(\phi,r_0)$를 plate theory에서 무시하므로 식 (56)은 다음 식으로 된다.

$$\varepsilon_s{}^s(\phi,l)=0 \tag{57}$$

식 (16)을 식 (57)에 대입하고 식 (15)를 이용하면 공통경계의 각 절점 i에서 다음 두가지 관계가 얻어진다.

$$U_{si}{}^s=0 \tag{58}$$

$$U_{s\phi i}{}^s=0 \tag{59}$$

식 (54),(55),(58),(59)에서 4개의 연결조건을 추가시켜 공통절점에서의 자유도는 12개가 된다.

전체좌표계에서 Sector 요소와 Shell 요소에 공통인 절점의 12개 자유도를 다음과 같이 가정한다.

$$\{U\}^T=\Big\{U,\frac{1}{R}U_Y,U_X,\frac{1}{R}U_{XY},V,\frac{1}{R}V_Y,\frac{1}{R}V_{ZY},$$
$$\frac{1}{R}V_{XY},W,\frac{1}{R}W_Y,W_X,\frac{1}{R}W_{XY} \tag{60}$$

식 (29)와 식 (33)의 좌표변환관계에 8개의 적합조건과 4개의 연결조건을 적용하면 각 요소을 국부좌표계로부터 전체좌표계로 변환할 수 있다.

$$\{U\}_{\text{sector}}=[T_3]\ \{U\} \tag{61}$$

$$T_3=\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&\frac{1}{R}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
\hdashline
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hdashline
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right] \tag{62}$$

여기서 $\{U\}_{\text{sector}}$는 식 (26)과 같으며 변환행렬 $[T_3]$는 식 (62)와 같다.

또

$$\{U\}_{\text{shell}}=[T_4]\{U\} \tag{63}$$

여기서 $\{U\}_{\text{shell}}$은 식 (31)과 같으며 변환행렬 $[T_4]$는 다음과 같다.

$$T_4=\left[\begin{array}{cccc:cccc:ccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hdashline
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
\hdashline
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right] \tag{64}$$

4. 矩形요소와 다른 요소와의 결합

Ⅶ에서 보인바와 같이 국소좌표계에서 矩形요소의 한절점의 자유도는 면내변위인 u,v이다. 그러나 전체좌표계에서 矩形요소의 한 절점의 자유도는 $\{U,V,W\}$이다. 그러므로 구조물의 반경방향으로 설치된 矩形의 한 절점에 대한 변환행렬은

$$\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U\\V\\W\end{Bmatrix} \tag{65}$$

(2×1) (2×3) (3×1)

즉 $\{u\}_{\text{rect}}=[T_5]\{U\}$ (46)

矩形요소의 한 절점이 자유도가 12개인 sector요소나 shell요소의 절점과 연결된 곳에서는 矩形요소의 변환된 요소강도행렬의 항을 조합된 전체행렬의 적당한 항 U,V,W에 더하여 사용하면 된다.

그것은 矩形요소가 다른 절점자유도에는 기여하지 않기 때문이다.

5. 矩形요소들 사이의 결합

반경방향으로 설치한 矩形요소의 공통절점에는 전체 자유도가 U와 W두개만 있을 뿐이다.

이런 종류의 절점에 대한 변환행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U\\W\end{Bmatrix} \tag{67}$$

즉 $\{U\}_{\text{local}}=[T_6]\{U\}_{\text{global}}$ (68)

6. 변환행렬

한 절점의 전체 자유도는 한 요소의 동일 절점의 국소자유도에만 의존하므로 n개의 절점을 가진 요소의 변환행렬은 다음과 같다.

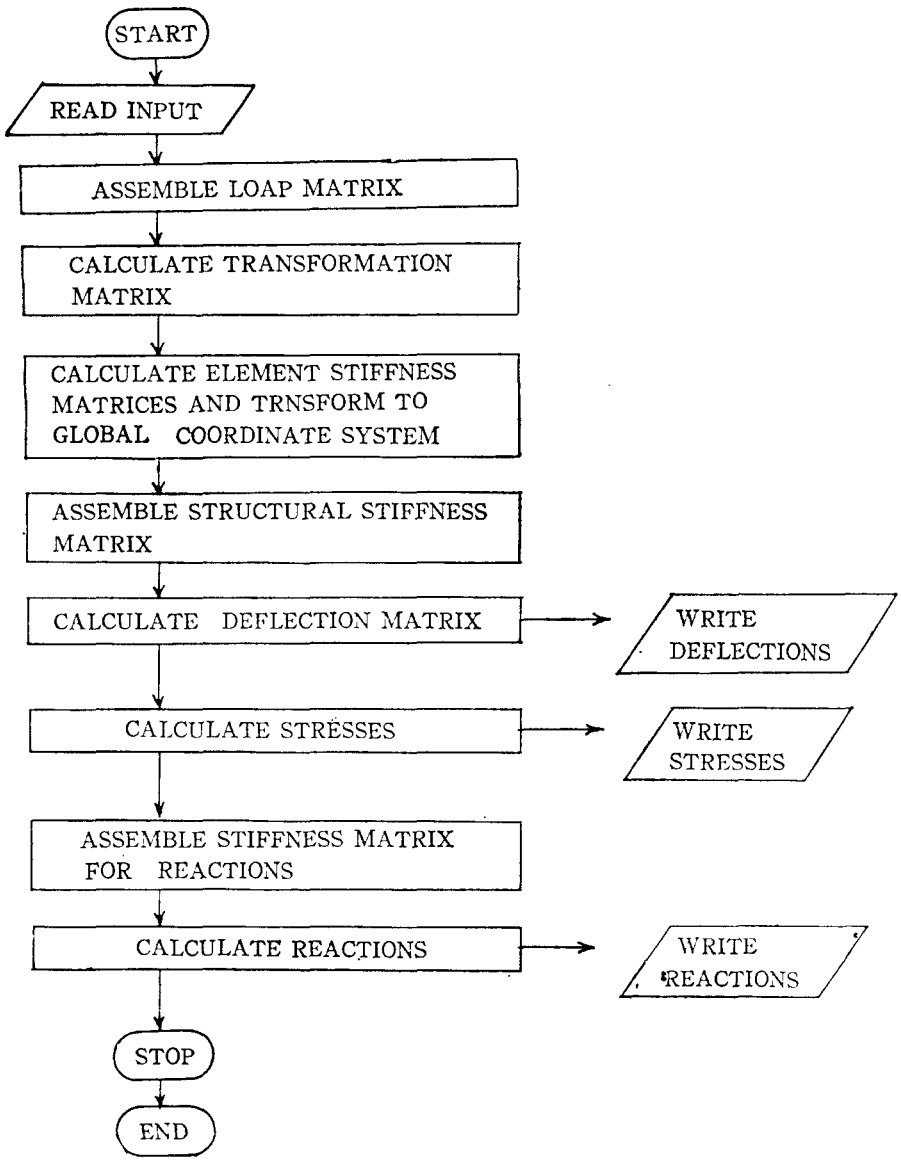
$$[T]=\begin{bmatrix}[T]_1 & & 0\\ & [T]_2 & \\ 0 & & [T]_n\end{bmatrix} \tag{69}$$

여기서 $[T]_i$는 요소의 절점 i에 대한 변환행렬이다.

각 요소의 변환행렬의 크기는 sector 요소가 (48×48), shell 요소가 (48×48), 矩形요소가 (8×12)이 된다.

Ⅸ. 계산방법

요소강도행렬과 등가절점력은 각 요소에 대하여 요소국소좌표로 계산되어 있어서 다음 식들을 이용 전체좌표계로 변환해야 한다.



$$[K]_G^e=[T]^T[K^e][T] \quad (70)$$

$$[F]_G^e=[T]^T\{F\}^e \quad (71)$$

여기서 $[T]$는 각 요소에 대한 국소 요소자유도를 다음식을 사용하여 전체 요소자유도로 변환하는 변환행렬이다.

$$\{\delta\}_G^e=[T]^T\{\delta\}^e \quad (72)$$

또는 $$\{\delta\}^e=[T]\{\delta\}_G^e \quad (73)$$

그리고 나서 모든 요소들의 전체 좌표계에서의 강도행렬을 구조강도행렬로 만들기 위하여 조합해야 한다. 이때 등가 절점력의 조합은 구조하중벡타가 된다. 그러므로 구조전체의 평형방정식은

$$[K]_s\{\delta\}_s=\{F\}_s \quad (74)$$

식(74)에서 기지의 값은 강도행렬과 규정된 자유도와 하중이고 미지의 값은 남은 자유도와 반력이다. 식(74)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_u \\ U_p \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} F_p \\ F_u \end{Bmatrix}_s \quad (75)$$

여기서 U_u는 미지 자유도이고 U_p는 규정된 자유도이며 F_p는 규정된 힘이고 F_u는 미지반력이다.

규정된 자유도의 값이 0이라면

$$[K_{11}]_s\{U_u\}_s=\{F_p\}_s \text{ (a)}$$

$$[K_{21}]_s\{U_u\}_s=\{F_u\}_s \text{ (b)} \quad (76)$$

이제 $[K_{11}]_s, \{U_u\}_s, \{F_p\}_s, \{F_u\}_s$를 각각 $[K], \{U\}, \{F\}, \{R\}$로 바꾸면

$$[K]\{U\}=\{F\} \text{ (a)}$$

$$[K_{21}]_s\{U\}=\{R\} \text{ (b)} \quad (77)$$

식(77.a)로 부터 미지 자유도 $\{U\}$를 계산하여 식(77.b)에 대입하면 미지반력 $\{R\}$가 구해진다.

식(77.a)에서 하중이 하나 이상인 일반적인 경우는

$$[K]\{U\}=[F] \quad (78)$$

로 $]F[$의 각 column은 하나의 loading case가 된다. 경계조건을 제거한 후의 구조전체의 강도행렬 $[K]$는 banded symmetric matrix 가 된다.

식(78)을 푸는 일반적인 두가지 방법은 직접법과 반복법이 있으나 여기서는 직접법중 computer time 에서 보다 경제적인 Cholesky 방법을 이용한다.(22)(23)

해석 프로그램의 Flow chart는 앞과 같다.

X. 結 論

Curved Box-Girder를 해석하는데 사각형 평면 plate 요소를 이용, folded plate 구조로 이상화하는 것은 요소의 수가 아주 많아야 정확한 해에 수렴하고 Curved strip을 사용할 경우 지지조건에 많은 제약이 있게 되다. 이러하여 노면슬랩, 內外의 web, 하부 플랜지와 diaphragm이 서로 연결된 복잡한 Curved Box-Girder 해석에는 절점자유도를 많이 채택, 모든 축 주위의 회전을 충분히 나타낼 수 있는 Geometry에 맞는 요소가 바람직하다. 여기서는 1차원, 2절, 1차 Hermite 보간다항식의 곱의 합으로 나타내는 변위함수를 극좌표로 표현, 슬랩과 Web들에 적용하고 이들 요소들 사이에 기하학적 적합조건과 연결조건을 고려 결합하였다. 요소강도행렬이(48×48)의 대형이므로 직접적분은 곤란하고 편미분하여 얻은 피적분함수를 수치적분하는 프로그램이 요구되며 실험적인 검증이 필요하다.

參 考 文 獻

1. Zienkiewicz, O.C. "The Finite Element Method" McGraw-Hill. 1977.
2. Bathe, K.L. and Wilson, E.L. "Numerical Methods in Finite Element Analysis "Prentice Hall, 1976.
3. Bongner, F.K. "Finite deflection, discrete element analysis of shells" Ph.D. dissertation, Case Institute of Technology Cleveland, Ohio, 1967.
4. Hildebrand, F.B. "Introduction to Numerical Analysis" 2nd ed. McGraw-Hill, pp.382—385, 1974.
5. Langhaar, H.L. "Energy methods in Applied methods in Applied Mechaniccs" John Wiley & Sons, New York, pp.159—200, 1967.
6. Bogner, F.K., Fox, R.L. and Schmit, L.A. "Cylindrical Shell Discrete Element" AIAA Journal, Vol.5, No.4 pp.745—750, 1967.
7. Przemieniecki, J.S. "Theory of Matrix Structural Analysis" McGraw-Hill, pp.89—102, 1968.
8. Goldberg, J.E. and Leve, H.L. "Thoery of Prismatic folded plate structures "International Association for Bridge and Structural

Engineering, Vol. 17, pp. 59—86, 1959.

9. Task Committee, Curved Box Girders of the ASCE-AASHTO Committee "Curved Steel Box-Girder Bridges: A Survey" ASCE, Vol. 104. No. ST 11, pp. 1697—1718, 1978.
10. Task Committee on curved Box Girders of the ASCE-AASHTO Committee, "Curved Steel Box-Girder Briders: State-of-The-Art" ASCE, Vol. 104. No. ST 11, pp. 1719—1739, 1978.
11. Meyer, C. "Analysis and Deign of Curved Box Girder Bridges" Ph. D. dissertation, University of California, Berkeley 1970.
12. McManus, P. F., Nasir, G. A. and Culver, C. G. "Horizontally Curved Girders-State of the Art" Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST 5, pp. 853—870, 1969.
13. Scordelis, A. C. "Analysis of Simply Supported Box Girder Bridges" Structural Engineering and Structural Mechanics Reported No. SESM 66—17, University of California, Berkeley, 1966.
14. Engel, S. "Structural Analysis of Circular Curved Beams" Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. ST1 pp. 221—234, 1967.
15. Heins, C. P. "Bending and Torsional Design in Structural Members" Lexington Books, pp. 1—262, 1975.
16. Chu, K. H. and Pinjarkar, S. G. "Analysis of Horizontally Curved Box-Girder Bridges "Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST 10, pp. 2481—2501, 1971.
17. Aneja, I. K. and Roll, F. "Model Analysis of Curved Box Beam Highway Bridges "Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST 12, pp. 2861—2878, 1971.
18. Bažant, Z. P. and Nimeiri, M. E. "Stiffness Method for Curved Box Girders at Initial Stress "Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST 10, pp. 2071—2090, 1974.
19. Cheung, M. S. and Cheung, Y. K. "Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method "Publications. International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 31—1, pp. 1—19, 1971.
20. Fam, A. R. M. and Turkstra, C. "Model Study of Horizontally Curved Box Girder "Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 102, No. ST 5, pp. 1097—9176.
21. Heins, C. P., Bonakdarpour, B. and Bell, L. C. "Multicell Curved Girder Model Studies "Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, NO. ST 4, pp. 831—843, 1972.
22. Kardestuncer, H. "Elementary Matrix Analysis of Structures" McGraw-Hill, 1974.
23. Cantin, G. "An Equation Solver of Very Large Capacity" International for Numerical Method in Engineering. Vol. 3, pp. 379—388, 1971.