

유한요소법에 의한 流線網 解析

金 聲 得
土 木 工 學 科

〈요 약〉

종래에는 流線網을 作圖함으로써만 얻어질 수 있었던 침투 유출량이나 지하수의 임의의 지점의 유속 등을 流線網에 관한 기본 방정식인 Laplace 방정식에 Galerkin 방법을 사용하여 유한요소기법으로 수치해석하였다. Computer Program은 Y.K. Cheung과 I.P. King에 의해 개발된 구조해석 Program을 본 문제에 적합하도록 변형하여 사용하였다.

Analysis of Flow Net Using the Finite Element Method

Kim, Seoung Deuk
Dept. of Civil Eng.

〈Abstract〉

Seepage problems were usually analyzed by drawing flow nets, but this paper analyzed the problem by applying the finite elements method to the Galerkin's form of the Laplace equation which is basic equation of the flow net. Calculation was done by the finite elements computer program, which was developed by Y.K. Cheung and I.P. King for structural problem, being modified to fit this object.

I. 서 론

유한 요소법의 공학에의 응용은 이제 상당히 보편화 되었고 토목 분야에서도 구조 분야를 필두로 하여 토질, 유체 등 거의 모든 분야에 이용되고 있다.

본 논문에서 다룬 Seepage 문제에 대한 유한 요소법의 적용은 河野⁽⁶⁾, Finn⁽⁶⁾, Desai⁽⁷⁾, Zienkiewicz⁽⁸⁾ 등의 논문에 취급되었으며 多孔體 속을 흐르는 유체 문제로서 최근 많은 논문들이 발표되고 있다.⁽⁹⁾ 우리나라에서도 지하수 흐름에 대한 유한 요소법의 적용에 관한 논문이 몇편 발표되고 있으나⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ 아직은 개발단계에 불과하여 실제에의 이용은 미흡한 상태이다. 따라서 본 논문에서는 구조 분야에서 개발되어 활발히 이용되고 있는 computer program system을 이용하여 이를 약간 수정 see-

page에 관한 이론을 적용함으로써 그 土層의 모양이나 透水係數 k 의 값이 어떻게 주어지더라도 쉽게 임의의 지점의 유속이나 유량 등을 구할 수 있는 방법을 제시하였다.

II. 기본방정식의 유한요소화

1. 流線網의 基本方程式

흙 속을 흐르는 물은 일반적으로 Darcy의 법칙이 성립하고 또 연속방정식을 만족시킴으로써 그 흐름 상태를 알 수가 있다. 즉

$$v_x = k_x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = k_y \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

여기서

v_x, v_y ; x 와 y 방향의 유속

u ; 水頭(potential)

k_x, k_y ; x 와 y 방향의 투수계수

上記式 ①②를 종합하면 다음과 같은 Laplace 방정식이 얻어지고 흐름을 흐르는 물의 상태를 알려고 하면 이 방정식을 풀면 된다.

$$k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

만약 어떤 흐름이 있는 중에 降雨等 기타의 원인에 의하여 물이 침투해 들어온다거나 어떤 半透水層等을 통하여 漏水가 되어진다고 하면 上記 ③式보다 좀더 일반적인 다음 ④式을 쓸 수가 있는데 이 式을 보통 확장된 harmonic equation이라고 한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda u = p \quad (4)$$

③④式에서 그 경계조건들은 어떤 A 라는 폐 영역의 경계 S_1 과 S_2 에서 다음과 같이 주어진다.

$$u = \bar{u} \quad \text{on } S_1$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{on } S_2 \quad (5)$$

여기서 $u = u(x, y)$, $\lambda = \text{constant}$, h, p, \bar{u}, \bar{q} 등은 x, y 의 함수이다. $S = S_1 + S_2$ 는 全境界(total boundary)이다.

본 논문에서는 보통 Seepage 문제에서 다루어지는 ③式을 Galerkin 방법에 따라 유한요소법을 사용하여 電算化 하였으나 ④式에 나타난 마와 같은 일반적인 경우로 확장하는 것도 어렵지 않을 것이다

2. 유한요소법의 적용

④式으로 주어지는 확장된 harmonic eq.이 ⑤式과 같은 경계조건을 가질 경우 Galerkin의 form으로 다시 쓰보면 다음 ⑥式과 같다.

$$\delta F = \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda u - p \right\} \delta u \, dA + \int_{S_2} \left(k_n \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} \right) \delta u \, dS = 0 \quad (6)$$

⑥式을 부분적분하면 다음과 같다.

$$\delta F = \iint_A \left\{ k_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta u + k_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta u - \lambda u \delta u + p \delta u \right\} dA - \int_{S_2} \bar{q} \delta u \, dS \quad (7)$$

주어진 영역 A 를 그림 (1)과 같이 삼각형 요소로 분할하였을 때 전체 요소에 대해서 u 에 관한 근사함수(approximate function)을 ⑧式으로 잡으면 다음 ⑨式을 얻을 수가 있다.

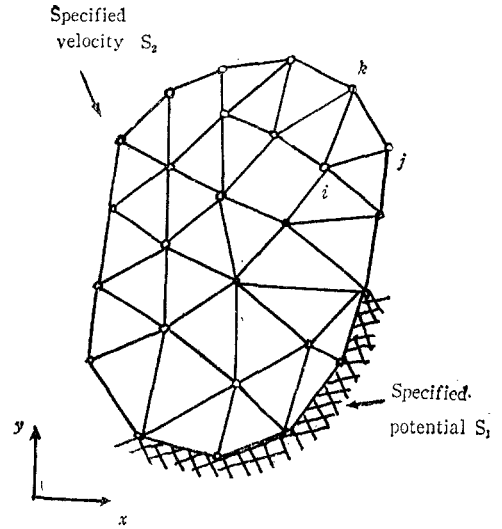


그림 1. Finite Element Discretisation.

$$u = \phi^T u^n \quad (8)$$

여기서

$$u^n = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$$

$$\phi^T = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s\}$$

$i = 1, 2, \dots, s$; 전체 요소에 대한
절점번호

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \dots = \phi_x^T u^n \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \dots = \phi_y^T u^n$$

⑧式과 ⑨式을 ⑦式에 代入하여 적분을 행하면 다음과 같이 된다.

$$\delta u^{n,T} K u^n - \lambda \delta u^{n,T} M u^n - \delta u^{n,T} P = 0$$

$$\text{즉 } (K - \lambda M) u^n = P \quad (10)$$

여기서 K, M, P 요소 matrix들은 다음과 같다

$$\left. \begin{aligned} K &= \iint_{Ae} (k_x \phi_x \phi_x^T + k_y \phi_y \phi_y^T) dA \\ M &= \iint_{Ae} \phi \phi^T dA \\ P &= \iint_{Ae} -P \phi dA + \int_{S_1} \bar{q} \phi dS \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

⑩式을 i, j, k 를 절점으로 가지는 한 삼각형 요소에 대해서 Laplace 방정식에 적용해 보면 다음과 같다. 함수 u 를 다음 ⑫式으로 놓는다면

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (12)$$

이를 각 절점에 대해서 다시 쓰면 ⑬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

즉 $u^n = c\alpha$ (13)

(12)식은 삼각형 요소내에서는 선형이고 매 요소마다 세개의 미지수(α_i)들을 가지게 되는데 이러한 미지수들은 절점 i, j, k 에 있는 절점값과 관계 지을 수 있다. (13)식을 inverse 하면 이러한 미지수 α_i 를 절점값 u_i 로 풀 수 있다. 즉

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_i^0 & 2A_j^0 & 2A_k^0 \\ b_i & b_j & b_k \\ a_i & a_j & a_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

혹은 $\alpha = c^{-1}u^n$ (14)

u 의 미분항들은 (12)식과 (14)식에서 다음과 같이 구해진다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha_j = \frac{1}{2A} \{b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k\} \\ &= \frac{1}{2A} b^T u^n \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \alpha_k = \frac{1}{2A} \{a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k\} \\ &= \frac{1}{2A} a^T u^n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(15)식으로부터 i, j, k 절점을 가지는 삼각형 요소내에서의 유속 v_x 와 v_y 는 Darcy 법칙에서 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} v_x &= k_x \frac{\partial u}{\partial x} = k_x \cdot \frac{1}{2A} b^T u^n \\ v_y &= k_y \frac{\partial u}{\partial y} = k_y \cdot \frac{1}{2A} a^T u^n \end{aligned} \quad (16)$$

(12)식과 (14)식을 가지고 함수 u 를 (8)식과 같은 형으로 고쳐보면

$$u = \phi_i u_i + \phi_j u_j + \phi_k u_k = \Phi^T u^n \quad (17)$$

여기서

$$\phi_i = \frac{1}{2A} (2A_i^0 + b_i x + a_i y)$$

$$\phi_j = \frac{1}{2A} (2A_j^0 + b_j x + a_j y)$$

$$\phi_k = \frac{1}{2A} (2A_k^0 + b_k x + a_k y)$$

(17)식을 (11)식에 대입하면 K, M, P matrix는 다음과 같이 된다.

$$K = \frac{1}{4A} \left\{ k_x \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ & b_j^2 & b_j b_k \\ \text{sym.} & & b_k^2 \end{bmatrix} + k_y \begin{bmatrix} a_i^2 & a_i a_j & a_i a_k \\ & a_j^2 & a_j a_k \\ \text{sym.} & & a_k^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (18)$$

$$M = 0$$

$$P = \int_{s_1} \bar{q} \phi dS$$

삼각형 ijk 요소에 대해서 그림 (2)와 같이 S_2 경계가 j, k 변에 있다고 한다면

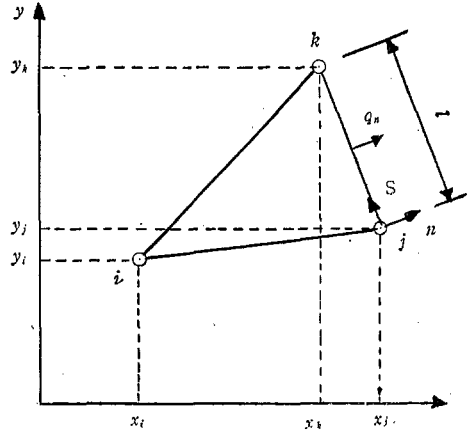


그림 2. Triangular Element.

P 의 적분은 $j-k$ 변을 따라 $x-y$ 좌표계를 $s-n$ 좌표계로 회전하여 적분하면 다음과 같다. 즉 그림 (2)의 $s-n$ 축과 $x-y$ 축의 관계로부터 (9)식을 얻는다.

$$P = \int_{s_1} \bar{q} \phi dS = \frac{1}{2A} \int_0^1 \begin{Bmatrix} 2A_i^0 + b_i x + a_i y \\ 2A_j^0 + b_j x + a_j y \\ 2A_k^0 + b_k x + a_k y \end{Bmatrix} \bar{q}_n dS \quad (19)$$

이상의 관계를 요소삼각형 ijk 에 적용하면 (20)식을 얻을 수 있고 이를 요소 전체에 대해 중첩 (superimpose)하면 각 절점에서의 u 값을 얻을 수가 있다.

$$K \quad u^n = P \quad (20)$$

(3×3) (3×1) (3×1)

III. 電算 Programing

본 연구의 computer program은 Y.K. Cheung 과 I.P. King에 의해 개발된 구조해석 program을 수정 이용하였다. 실제 적용 例의 계산은 본 대학 IBM 3777 Bach Terminal을 이용하였고 main program의 flow chart는 그림 3과 같다.

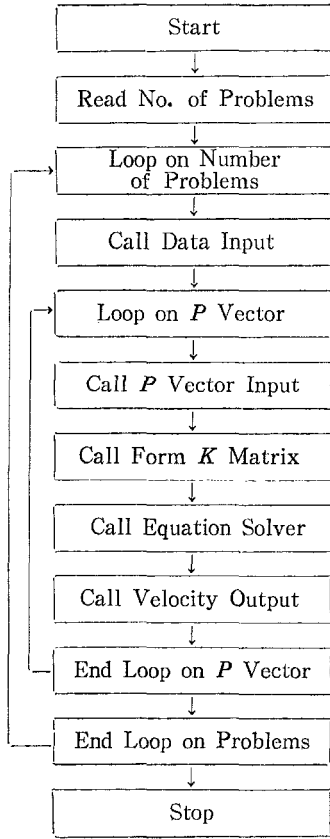


그림 3. Flow Chart of Main Program.

Ⅳ. 적 용 례

Seepage 문제에 대한 종래의 해법은 等水頭線과 流線의 성질이 따른 圖式的 방법으로 이는 土層의 모양이나 성질이 일정하지 않는 경우에는 불가능하다. 본 연구에서 적용하여 본 토층의 모양은 보통 圖式的 해법에서도 많이 나타나는 (그림 4)와 같게 하여 다음 세가지 경우에 대해서 계산해 보았다(表 1 참조).

표 1. 적용례의 종류 및 계산결과

흡의종류 계산종류	I		II		침 투 유출량 ms/day
	k_x	k_y	k_x	k_y	
Case 1	m/day 2.59	m/day 2.59	m/day 2.59	m/day 2.59	2.951
Case 2	m/day 2.59	m/day 1.30	m/day 2.59	m/day 1.30	2.126
Case 3	m/day 2.59	m/day 2.59	m/day 0.26	m/day 0.26	0.686

Case 1은 x 와 y 방향의 투수계수가 같은 경우로 이는 간단한 단면에는 도식적 해법이 간단할 수도 있다.

Case 2는 x 와 y 방향의 투수계수가 다른 例를 보이고 Case 3은 矢板아래의 II의 부분에 투수계수가 다른 흡으로 채웠을 경우의 例이다.

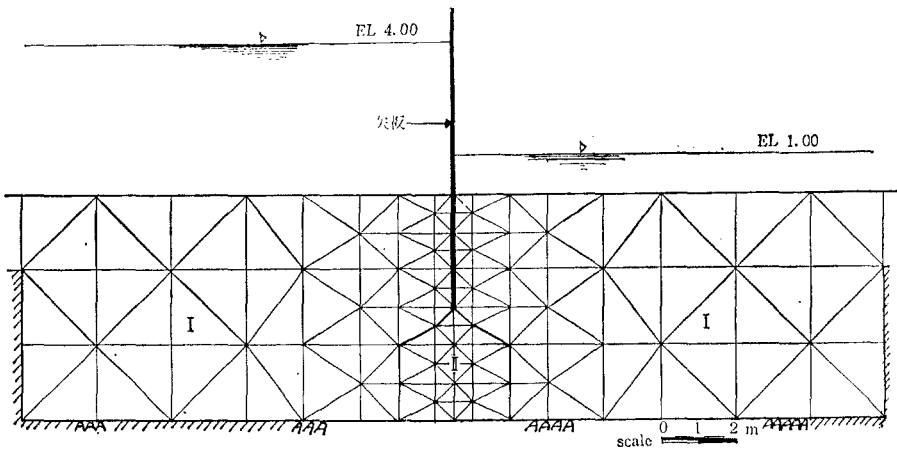


그림 4. 토층 단면도

이러한 세가지 경우에 대한 等水頭線은 (그림 5)에 보이는 바와 같으며 이때 계산된 침투 유출량은 (表 1)에 나타내었다.

본 program의 계산 결과는 (그림 4)에 나타낸 모든 절점에서 水頭(potential)가 주어지고 모든 요소들에서 속도가 주어지도록 되어있다. 이때 흡의

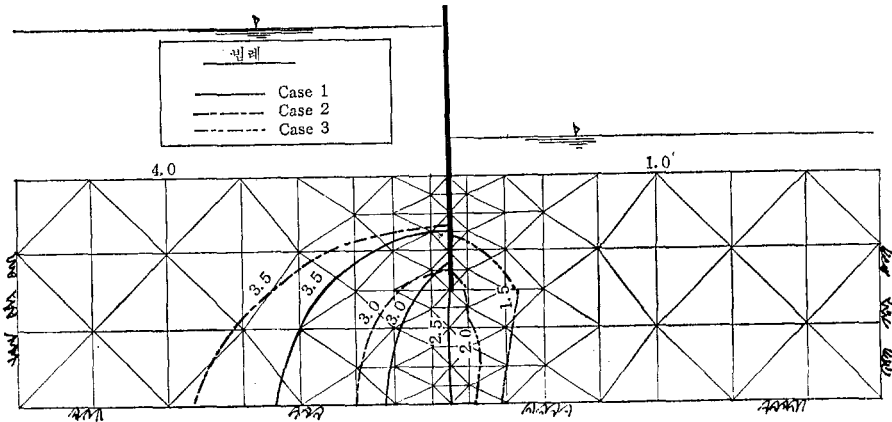


그림 5. 各 Case別 等水頭線

투수계수의 값은 모든 요소(element)마다 (k_x, k_y)로 주어지도록 되어 있으므로 어떠한 종류의 흙으로 되어지더라도 그리고 어떠한 단면형상을 가지고 있더라도 임의의 점에서의 水頭와 速度를 쉽게 구할 수가 있다.

본 계산에서의 경계 조건은 역시 (그림 4)에서 보인 바와 같이 빗금친 부분은 불 투수층으로 하여 그 경계에 수직인 속도성분 $q_n=0$ 으로 하였다. 矢板의 왼쪽 부분에 주어진 水頭(potential)은 4m이고 오른쪽 부분에 주어진 水頭는 1m로 하였다.

V. 결 론

본 논문은 2次元 場에서 확장된 harmonic equation을 Galerkin 방법에 따라 유한 요소법으로 해석하였으며 그 중의 한 특수한 경우인 Laplace 방정식을 유한 요소법으로 電算化하여 실제에 적용하여 보았다. 본 program을 이용하면 어떠한 土層 단면이나 성질에 구애받음 없이 토층내의 임의의 점에서의 水頭나 流速 등을 구할 수 있음을 알았다

참 고 문 헌

1. Zienkiewicz, O.C.; The Finite Element Method in Engineering Science, 2nd Ed., McGraw-Hill, London, 1971.
2. Conner, J.J. and Brebbia, C.A.; Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes-Butterworths, 1975.

3. Zienkiewicz, O.C.; The Finite Element Method in Engineering Science, 3rd Ed. McGraw-Hill, London, 1977.
4. Desai, C.S. and Abel, J.F.; Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold company, 1972.
5. 河野伊一郎; 有限要素法による堤體浸透問題解析土と基礎, Aug., 1973.
6. Finn, W.D.; Finite Element Analysis of Seepage through Dams, SM6, Proc of ASCE, 1972.
7. Desai, C.S.; Seepage Analysis of Earth Banks under Drawdown, SM1, ASCE, 1972.
8. Zienkiewicz, O. C. and Mayer, P. and Cheung, Y.K.; Solution of Anisotropic Seepage by Finite Element, EM1, Proc. of ASCE, 1966.
9. "Finite Elements in Water Resources" edited by W.G. Grey, G. F. Pinder and C.A. Brebbia, Proceedings of the 1st Int. Conf. on F.E. in Water Resources, Pentech Press, 1976.
10. 윤 태훈, 진 병익; 유한 요소법에 의한 제체 침투해석의 개발연구, 대한토목학회지, 제23권 제4호, 1975.
11. 안 수환, 이 정규, 김 동룡; 지하수 해석에 관한 유한요소법의 응용, 대한토목학회지, 제27권 제4호, 1979.
12. Lambe, T.W. and Rovert, V.W.; Soil Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., 1968.