

電磁레일건의 磁界 및 電流分布解析

具 泰 萬

電氣 및 電子工學科

(1985. 9. 23 겸수)

〈要 約〉

電磁레일건에서는 레일과 電機子사이의 相對速度에 따라 磁界 및 電流分布가 달라지는데 本論文에서는 레일과 電機子 사이에 일정한 相對速度가 있는 경우, 레일과 電機子에서의 電流와 磁界分布를 解析的으로 紛明하였다. 解析된 磁界 및 電流分布는 相對速度에 의한 二次元的 表皮効果를 잘 說明해 주고 있다.

Magnetic Field and Current Distribution Analysis in an Electromagnetic Railgun.

Koo, Tae-Man

Dept. of Electrical and Electronic Engineering

(Received September 23, 1985)

〈Abstract〉

The magnetic field and current distributions in the rails and armature of an electromagnetic railgun change according to the velocity of the relative motion between the rails and the armature. This paper deals with the magnetic field and current distributions analytically for the steady state velocity. The solutions account fully for the two dimensional electromagnetic skin effect caused by the relative motion.

I. 序 論

에너지저장, 스위칭, 電磁氣 및 超電導技術의 발달은 레일건의 실용화를 가능케 하고 있다. 레일건은 구조가 간단하고 加速能力이 매우 우수하기 때문에 현재는 병기개발의 목적으로 주로 연구되고 있으나 장차 다른 산업분야에서도 유용하게 사용될 것으로 전망된다⁽¹⁾⁽²⁾. 레일건은 $10^5 \sim 10^6 A$ 이상의 大電流가 수 msec 이하 동안 흐르므로 電流는 레일의 모든 면을 충분히 침투하지 못하고 導體의 표면 가까이에 주로 흐르게 된다⁽³⁾. 이러한 現象은 레일 및 電機子의 한 부분에 집중적으로 抵抗熱을 발생시켜 순간적으로 融點에까지 이르도록 할 수 있다. 또한 電流가 相對速度에 따라 집중되는 정도가 다르게 될

것이므로 速度에 따른 시스템의 實效抵抗과 인덕턴스도 다르게 된다⁽⁴⁾. 이러한 現象을 紛明하기 위해서는 相對速度와 磁界的 表皮効果를 고려한 導體內의 電流와 磁界分布의 解析이 바람직하다. 本論文에서는 相對速度가 일정한 定常狀態에서의 電流와 磁界分布를 二次元的으로 解析하므로서 諸般現象을 紛明하고자 한다.

II. 레일건에 대한 理論

레일건은 근본적으로 線型直流電動機라 할 수 있다. 레일건의 구조는 Fig. 1과 같이 2개의 레일, 電機子, 에너지저장코일과 電源으로 되어 있고, 레일에 흐르는 電流와의相互作用(Lorentz Force)에 의하여 短絡體인 電機子가 두 레일 사이를 나그리쳐 나

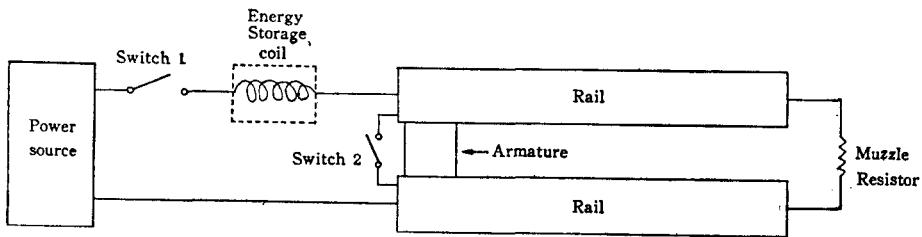


Fig. 1. Schema of railgun.

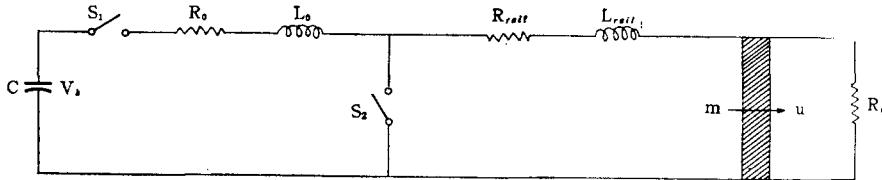


Fig. 2. Electrical equivalent circuit of railgun.

간다. 電源은 大容量의 커페시터 또는 單極發電機가 되어지며 수 그램 정도의 電機子를 수 km/s의 速度로 加速시키는데 約 0.1 MJ 정도의 에너지가 필요하다.

에너지저장코일은 大容量의 인덕터로 大電流를 일정시간 동안 유지시켜주므로서 짧은 페일로 빠른 速度를 얻도록 한다. Fig. 1의 페일건을 等價回路로 나타내면 Fig. 2와 같다.

Fig. 2의 等價回路에서 페일건의 動特性을 解析的으로 純明할 수 있는 回路方程式은 다음 식으로 표현된다.

$$V_s + L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} + IR = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2m} I^2 \frac{\partial L}{\partial x} \quad (2)$$

여기서 V_s 는 電源電壓, L 은 인덕턴스, R 은 抵抗, m 은 電機子의 질량이다.

電源이 電流를 공급하면 식(2)에 의하여 電機子가 힘을 받아 加速되며 電機子가 움직이면 시스템의 抵抗, 인덕터 및 電流에 변화가 생긴다. 위 回路에서 抵抗이나 인덕터가 時間(速度)의 線型變數가 되면 解析이 간단하나 電機子와 페일의 큰 相對速度(수 km/s)에 의한 表皮效果 등의 영향으로 抵抗과 인덕터가 非線型的으로 변화되므로 解析이 복잡하게 되고 이를 해결하기 위한 수단으로서 電流가 흐르는 경로에 대한 연구가 필요하게 된다.

III. 解析을 위한 數學的 모델

二次元 모델로 다음과 같은 가정을 둔다.

- (1) 페일과 電機子의 내부표면 磁界는 일정하나.
- (2) 페일과 電機子의 외부표면 磁界는 零이다.

Fig. 3은 페일과 電機子의 내면 교차점은 기준점으로 한 좌표계의 구성을 나타낸 것이다.

실제 電機子는 U 의 速度로 +방향(왼쪽에서 오른쪽으로)으로 움직이거나 電機子를 기준으로 하면 페일이 U 의 速度로 -방향으로 움직이는 것이다. U 의 速度로 움직이는 回路에 적용되는 일반 磁界方程式은 다음 식과 같다^{(5), (6)}.

$$\frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 B = \frac{\partial B}{\partial t} - \nabla \times U \times B \quad (3)$$

여기서 σ 은 導電率, μ 는 透磁率이며 $k = \frac{1}{\sigma\mu}$ 로 두면 電機子에서는

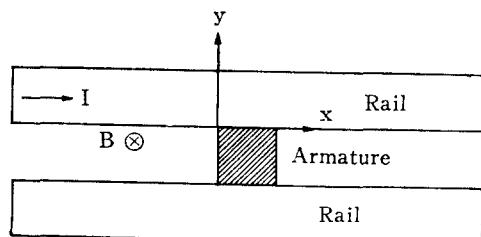


Fig. 3. Armature-rail configuration.

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (4)$$

테일에서는

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial B}{\partial t} - U \frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (5)$$

이 적용된다.

定常状態의 解를 구하고자 하므로 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 는 무시할 수 있어 식(4), 식(5)는 각각 식(6), 식(7)로 표현된다.

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = -\frac{U}{k} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (7)$$

또 테일에서 $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ 항은 $\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$ 항에 비하여 매우 적을 것이므로 이를 무시하면 테일에서는 다음 식이 적용된다.

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = -\frac{U}{k} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (8)$$

問題解析을 위한 境界條件은 電機子에서

$$B_s(0, y) = B_0 \quad (9)$$

$$B_s(x_0, y) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial y} \left(x, -\frac{1}{2} y_w \right) = 0$$

테일에서

$$B_r(x, 0) = B_0 \quad x < 0$$

$$B_r(x, y_0) = 0$$

$$B_r(x_0, y) = 0 \quad (10)$$

$$B_r(x \rightarrow -\infty, y) = B_0 \cdot \frac{y_0 - y}{y_0}$$

이 되며, 여기서 y_w 는 두 테일의 간격(電機子의 폭), y_0 는 테일의 폭, x_0 는 電機子의 질이이다.

테일과 電機子의 境界面($0 < x < x_0, y = 0$)에서 電界의 漸近성분은 연속이어야 하고⁽⁷⁾⁽⁸⁾, 옴(Ohm)의 법칙에 의하여

$$E_{xx}(x, 0) = E_{xx}(x, 0) = \frac{J_{xx}}{\sigma_s} \Big|_{y=0} = \frac{J_{xx}}{\sigma_r} \Big|_{y=0} \quad (11)$$

으로 표현된다.

여기서 σ_s 는 電機子의 導電率, σ_r 은 테일의 導電率이다.

또한 $\nabla \times H = J$ 로 부터

$$J_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_s}{\partial y} \quad (12)$$

이 되고 식(12)에 의하여 식(11)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{\sigma_s} \frac{\partial B_s}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sigma_r} \frac{\partial B_r}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (13)$$

그런데 식(13)은 x 값에 따라 다르게 될 것이므로 境界條件式을 결정하기 위하여 사용되는 실제 条件式은 식(14)가 된다.

$$\int_0^{x_0} \frac{1}{\sigma_s} \frac{\partial B_s}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \int_0^{x_0} \frac{1}{\sigma_r} \frac{\partial B_r}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \quad (14)$$

또 境界面에서 磁束密度도 연속이어야 하므로 다음 식이 성립해야 한다.

$$B_s(x, 0) = B_r(x, 0) \quad (15)$$

境界面에서 磁束密度 B_s 는 指數函數의으로 변화될 것이 기대되고 $B_s(0, 0) = B_0, B_s(x_0, 0) = 0$ 가 되는 境界條件을 적용하면 B_s 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$B_s = B(x, 0) = \frac{B_0(e^{-ax} - e^{-ax_0})}{1 - e^{-ax_0}} \quad (16)$$

여기서 a 는 結合條件을 나타내는 變數이다.

IV. 모델의 解

電機子에서는 식(6), 식(9) 및 식(15)을 만족하는 함수 B_s 를 구하여야 하고 테일에서는 식(8), 식(10), 식(15)를 만족하는 함수 B_r 을 구하여야 한다. 테일에 적용되는 식(8)에 변수를 치환하므로 서一次元의 热方程式과 같은 형태의 수식으로 변환할 수 있다. 즉, $t = \frac{x_0 - x}{u}$ 로 치환하므로서 테일에 적용되는 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial y^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial B_r}{\partial t} \\ B_r(t, 0) = B_0 \frac{e^{-at_0}}{1 - e^{-at_0}} (e^{at_0} - 1) \\ 0 < t < \frac{x_0}{u} \quad (17)$$

$$B_r(t, 0) = B_0 \quad t > \frac{x_0}{u} \\ B_r(0, y) = 0 \\ B_r(t, y_0) = 0 \\ B_r(t \rightarrow \infty, y) = B_0 \cdot \frac{y_0 - y}{y_0}$$

식(17)을 만족하는 함수를 구한 후에 t 를 x 로 치환하므로서 구하고자 하는 解를 얻을 수 있고 이것과 電機子에서 만족하는 함수 B_s 를 식(14)에 대입하므로서 結合條件을 나타내는 變數 a 를 구해낼 수 있다.

먼저 電機子에 적용되는 함수 B_s 를 구하기 위하여 $B_s = X(x) \cdot Y(y) + X_0(x)$ 로 두고 여기에 음수

를 이용하여 전개하면 B_s 는 다음과 같이 된다(부록 참조).

$$\begin{aligned} B_s(x, y) &= B_0 \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_0(e^{-\alpha} \cdot \cos n\pi - 1)}{(1-e^{-\alpha})n\pi \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right]} \\ &\times \sin \frac{n\pi}{x_0} x \frac{\cosh n\pi \left(\frac{1}{2}\delta + y/x_0\right)}{\cosh(n\pi \frac{\delta}{2})} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{단, } \alpha = ax_0, \delta = \frac{y_0}{x_0}.$$

레일에 적용되는解를 구하는 것은 측면이 절연된 마대의 온도분포를 구하는 것과 유사하며 相乘定理를 이용한다. 먼저 境界條件이 $B_s(t, 0) = 1$ 인 경우의 解 $B_s(t, y)$ 를 구한 후 다음 식에 의해서 $B_r(t, y)$ 를 구한다.

$$B_r(t, y) = \int_0^t [B_s(t, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{B_s(t-\tau, y)\}] d\tau \quad (19)$$

또 $B_s(t, 0) = 1$ 인 경우의 解는 다음 식과 같다(부록 참조).

$$\begin{aligned} B_s(t, y) &= \left(1 - \frac{1}{y_0}\right)y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{y_0}\right)kt} \\ &\cdot \sin \frac{n\pi}{y_0} y \end{aligned} \quad (20)$$

$0 < x < x_0$ 에서 적용되는解는 식(17)의 해당 境界條件와 식(20)을 식(19)에 대입하여 적분한 후 변수를 치환하면 다음 식이 얻어 진다.

$$\begin{aligned} B_r(x, y) &= \frac{B_0}{1-e^{-\alpha}} \left[(1-y/y_0)(e^{-\alpha x} - e^{-\alpha}) \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n\pi} \left. \frac{\sin \left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \{e^{-\alpha} \cdot e^{(n\pi)^2 \left(\frac{k}{u}, \frac{x}{y_0}\right) \left(\frac{x}{y_0} - \epsilon\right)} - e^{-\alpha x}\}}{\alpha + (n\pi)^2 \epsilon} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{단, } \epsilon = \frac{k}{u} \frac{x_0}{y_0}.$$

또 $x < 0$ 인 경우, 즉, $t > \frac{x_0}{u}$ 인 경우는 $t' = t - \frac{x_0}{u}$ 로 두고 식(20)을 구하는 방법을 도입하여 아래 적용되는境界條件은 식(17)과 식(21)에서 얻어 진다.

$$\begin{aligned} B_r(t', y) &= (1-y/y_0)B_0 + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\alpha B_0}{n\pi} \frac{\sin \frac{n\pi}{y_0} y \{e^{-\alpha} - (n\pi)^2 \epsilon - 1\}}{(1-e^{-\alpha}) \{\alpha + (n\pi)^2 \epsilon\}} e^{-\left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2 k t'} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)는 t' , y 로 주어지는 解이며 변수를

t , y 로 치환한 후 다시 x , y 로 치환하면 식(23)이 된다.

$$\begin{aligned} B_r(x, y) &= (1-y/y_0)B_0 + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha B_0}{1-e^{-\alpha}} \frac{\sin \frac{n\pi}{y_0} y \{e^{-\alpha} - (n\pi)^2 \epsilon - 1\}}{n\pi \{\alpha + (n\pi)^2 \epsilon\}} e^{\left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2 \frac{k}{u} x} \end{aligned} \quad (23)$$

$0 < x < x_0$ 에서 B_s 와 B_r 이 구해졌으므로 이를 식(14)에 대입하면 境界變數 a 를 결정할 수 있는 식(24)가 얻어진다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x_0}{y_0} (e^{-\alpha} - 1) + \frac{4\sigma_r}{\sigma_s} (1+e^{-\alpha}) \cdot \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(n-1/2)\pi\delta}{(2n-1)\pi \left[1 + \left\{\frac{(2n-1)\pi}{\alpha}\right\}^2\right]} + 2 \frac{x_0}{y_0} e^{-\alpha} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2\alpha e^{-\alpha} \cdot u \cdot y_0}{(n\pi)^2 k} (1-e^{-(n\pi)^2 \epsilon}) + 2 \frac{x_0}{y_0} (e^{-\alpha} - 1)}{\alpha + (n\pi)^2 \epsilon} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

境界變數 a 가 구해지면 식(18)로부터 電機子, 식(21), 식(23)으로부터 레일의 磁束分布를 결정할 수 있으며 電流密度는 $\nabla \times H = J$ 에 의해서 다음 식으로부터 얻어진다.

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ J_x &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (25)$$

V. 解析結果 및 考察

本論文의 사례에 적용한 레일과 電機子의 차수, 電機子의 速度 및 導體의 導電率은 다음과 같다.

$$y_0(\text{레일의 폭}) = 0.01 \text{ m}$$

$$x_0(\text{電機子의 길이}) = 0.01 \text{ m}$$

$$y_u(\text{레일간의 간격, 電機子의 高さ}) = 0.01 \text{ m}$$

$$u(\text{基準速度}) = 1,000 \text{ m/sec}$$

$$\sigma_s(\text{電機子의 導電率}) = 5.68 \times 10^7 \Omega/\text{m}$$

$$\sigma_r(\text{레일의 導電率}) = 5.68 \times 10^7 \Omega/\text{m}$$

위의 값에서 얻어진 電流分布를 나타내는 等磁束密度線은 Fig. 4와 같다. $B/B_0 = 0.1$ 과 $B/B_0 = 0.5$ 는 각각 全電流의 90%, 50%가 흐르는 경계선을 의미한다. Fig. 4-(a)에서 보는 바와 같이 레일과 電機子後面 境界面에서의 電流集中度는 매우 크다. 즉, 電機子 길이의 1%에서 全電流의 50%가, 또 電機子 길이의 2.7%에서 全電流의 90%가 흐른다. 이러한 電流集中現象은 境界面 부근에 있는 레일에서도 본

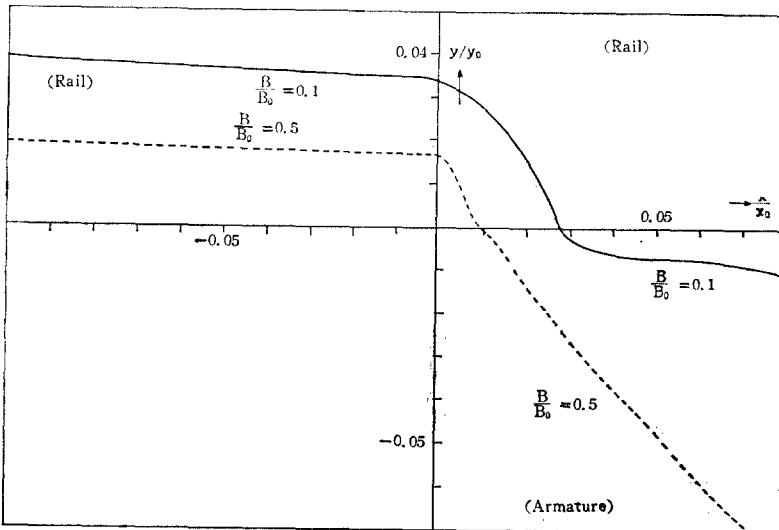


Fig. 4-(a) Current distribution in the rail and armature.

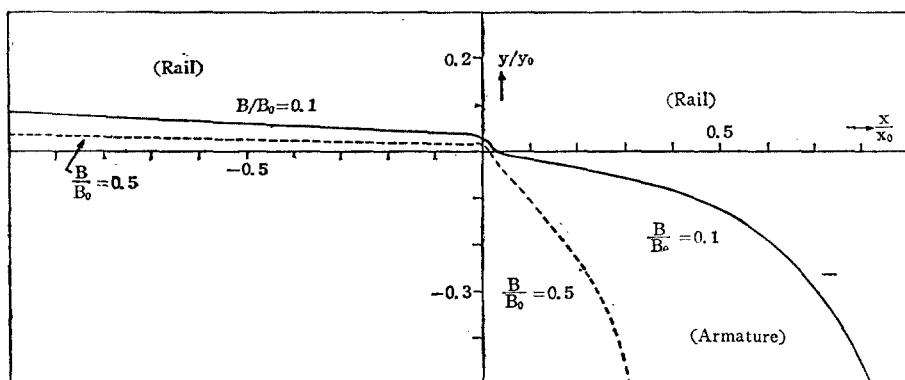


Fig. 4-(b) Current distribution in the rail and armature.

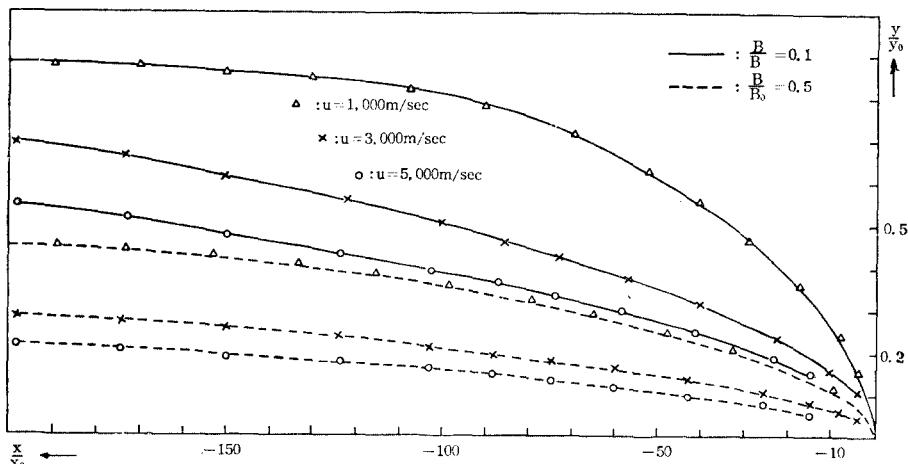


Fig. 4-(c) Current distribution in the rail.

수 있다. 즉, 레일쪽의 3.4%에서 全電流의 90%가 레일쪽의 1.7%에서 全電流의 50%가 흐르는 것을 알 수 있다. Fig. 4-(c)는 레일의 表皮效果를 잘 나타내고 있다. $u=1,000\text{m/sec}$ 에서는 $x/x_0=-200$ 에서 電流分布가 비교적 균일했으나 $u=3,000\text{m/sec}$ 에서는 같은 지점에서 全電流의 90%가 $y/y_0=0.7$ 이내에서, 또 $u=5,000\text{m/sec}$ 에서는 全電流의 90%가 $y/y_0=0.55$ 이내에서 흐르고 있었다. 이것은 速度가 빠를수록 表皮效果가 현저함을 입증한다.

Fig. 5는 速度에 따라 레일과 電機子境界面에서의 B/B_0 값을 나타낸 것이다. 여기서도 速度가 빠를수록 電流集中度가 현저함을 알 수 있다. $u=5,000\text{m/sec}$ 에서 99%이상의 電流가 電機子길이의 2%이내에서, 90%이상의 電流가 電機子길이의 1%이내에서 흐르고 있다.

電流의 集中度는 速度에 의해서만 결정되는 것이 아니라 電機子와 레일의 導電率에 의해서도 달라지는데 특히 電機子와 레일의 導電率比에 의하여 크게 달라진다. Fig. 6은 $\sigma_a=\sigma_r$, $\sigma_a=\frac{1}{3}\sigma_r$, $\sigma_a=\frac{1}{10}\sigma_r$ 일때 境界面에서의 磁束密度分布를 나타낸 것이다. 따라서 境界面부근에서 電流의 集中度를 완화시키기 위해서는 電機子의 導電率을 레일의 導電率보다 낮게 해야함을 알 수 있다. 또 電機子의 길이와 폭의 비율에 따라서도 電流集中度가 달라진다. 電機子길이가 길어지면 境界面에서 電流密度는 다소 낮아지나 電流의 集中現象은 더욱 심하다. 즉, 電機子 길이가 길어져도 電流는 대부분 電機子後面에 흐르기 때문이다.

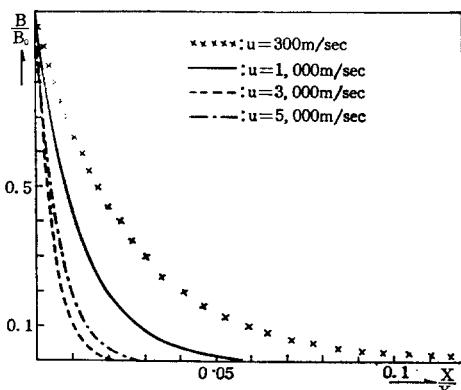


Fig. 5. Current distribution according to the velocity at the interface between rail and armature.

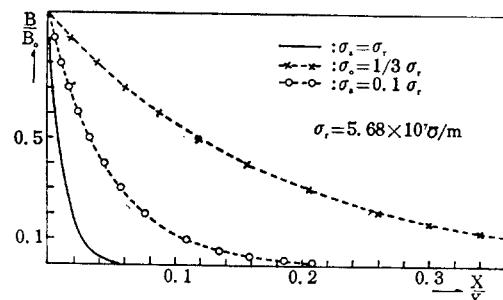


Fig. 6. Current distribution according to the conductivity at the interface.

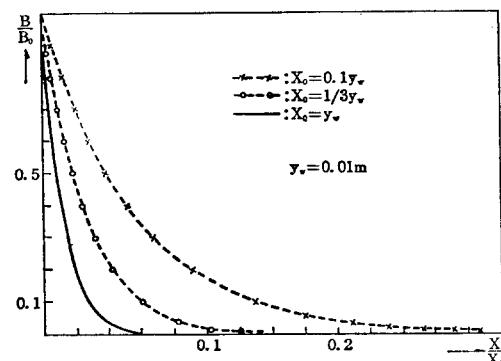


Fig. 7. Current distribution according to the armature dimension at the interface.

Fig. 7은 길이와 폭의 비가 1 , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$ 일때의 境界面에서의 電流分布를 나타낸 것이다. 이것으로부터 電機子길이가 폭에 비하여 긴 것은 별의미가 없음을 도출해 볼 수 있다.

VI. 結論

레일건에서 일정한 相對速度가 있는 定常狀態의 레일과 電機子의 電流 및 磁束分布를 二次元의 으로 解析하였다. 電機子後面과 레일이 만나는 부근의 電流集中現象은 電機子의 速度, 두께, 길이에 따라 큰 차이를 나타내었으며, 레일과 電機子의 相對速度가 적을수록, 레일의 導電率에 비하여 電機子의 導電率이 적을수록, 電機子의 두께가 폭에 비하여 얕을수록, 電流集中現象이 적어짐을 밝혔다. 또한 電機子에서는 境界面에 인접한 곳에서만 電流集中現象이 크게 나타났으나 레일에서는 비교적 폭넓게 나타난다.

한 현상이 나타났다. 이러한 현상은 레일에서의 表皮效果를 잘 설명해 주는 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

1. Henry Kolm, "Electromagnetic launchers", IEEE MAG vol. MAG-16, pp. 719-721, 1980.
2. William F. Weldom, "Pulsed power packs a punch," IEEE Spectrum, pp. 59-66, Mar. 1985.
3. Richard A. Marshall, "Current flow patterns in railgun rails", IEEE MAG vol. MAG-20, pp. 243-244, 1984.
4. F. J. Deadrick, "MAGRAC-A railgun simulation program," IEEE MAG vol. MAG-18, pp. 94-104, 1982.
5. S. A. Nasar, "Linear motion electric machines", John Wiley & Sons, Inc., pp. 262-268, 1976.
6. S. A. Nasar, "Electromagnetic energy conversion devices and systems", Prentice-Hall, Inc., pp. 9-48, 1970.
7. R. L. Ferrari, "An introduction to electromagnetic field", Van Nostrand Reinhold Co., pp. 24-36, 1975.
8. L. V. Bewley, "Two-dimensional fields in electrical engineering", Dover Publications, Inc., pp. 16-19, 1963.

<부 록>

1. 식(18)의 유도

변수분리법을 적용하여

$$B_s = X(x) \cdot Y(y) + X_0(x)$$

$$X'_0(x) = 0$$

라 두고 이를 식(6)에 대입하면 $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$ 가 되는데 $\frac{X''}{X} = \lambda^2$ 라 두면

$$X = A \sin(\lambda x)$$

$$Y = B \cosh(\lambda y + b)$$

가 될 수 있다.

또 식(9)의 경계조건을 적용하면

$$B_s = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cdot \sin \frac{n\pi}{x_0} x \cdot \cosh \frac{n\pi}{x_0} \left(y + \frac{1}{2} y_w \right) \right] + B_0 (1 - x/x_0)$$

가 되고 또 $y=0$ 일 때의 경계조건 식(16)을 적용하여 C_n 을 결정하면 식(18)i 된다.

2. 식(19)의 설명

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{A-1})$$

$$B(t, 0) = f(t) \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$B(0, y) = 0$$

식(A-1)은 Laplace 변환하면 $B(s, y) = F(s) \cdot G(s, y)$ 로 표시할 수 있다. 그리고 $F(s)$ 는 $y=0$ 일 때의 값이라 하면, $f(t) = 1$ 이므로

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s}$ 이 된다. 또 $\mathcal{L}^{-1}\{B(s, y)\} = B(t, y)$, $\mathcal{L}^{-1}\{G(s, y)\} = g(t, y)$ 라 하면

$$B(t, y) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau, y) d\tau = \int_0^t g(t-\tau, y) d\tau \quad (\text{A-2})$$

i) 된다. 그런데 $f(t) = 1$ 일 때 해를 $B_1(t, y)$ 라 하면 $B_1(t, y) = \int_0^t g(\tau, y) d\tau$ 가 된다.

즉, $g(t, y) = \frac{d}{dt} \{B_1(t, y)\}$ 가 된다. 그러므로 $f(t) \neq 1$ 일 때의 해는 식(19)과 같아 된다.

3. 식(20)의 유도

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} &= -\frac{1}{k} \frac{\partial B}{\partial t} \\ B(t, y_0) &= B(0, y) = 0 \\ B(t, 0) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

먼저

$$\begin{aligned} v(t, y) &= B(t, y) - \phi(y) \\ v(t, y_0) &= v(t, 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

인 함수 $v(t, y)$ 를 생각한다.

식(A-3), 식(A-4)에 의하여

$$\phi(y) = -y/y_0 + 1 \quad (\text{A-5})$$

이 될 수 있고 변수분리법에 의하여

$$v(t, y) = T(t) \cdot Y(y)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

$$T' + k\lambda T = 0$$

라 두고 $Y(0) = Y(y_0) = 0$ 일 조건을 고려하면

$$v(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{y_0}\right)t} \sin \frac{n\pi}{y_0} y \quad (\text{A-6})$$

가 얻어지고 식(A-6)에 식(A-3)의 조건과 식(A-4)를 대입하면 $c_n = -\frac{2}{n\pi}$ 가 얻어지므로 식(A-4), 식(A-5), 식(A-6)에 의하여 식(20)이 얻어진다.