

Hysteresis 효과를 고려한 回轉機의 磁束分布

구태만
전기공학과

〈요 약〉

히스테리시스 효과를 고려하여 回轉機의 磁束分布를 효과적으로 해석할 수 있는 알고리즘을 개발하였다. 자성재료의 자기적 비선형 특성인 히스테리시스 효과를 고려할 수 있도록 磁化의 세기가 포함되는 지배방정식을 유도하고, 이를 Galerkin 이론을 적용한 유한요소법으로 해를 구하였다. 무부하 동기발전기의 磁束分布解析에서 透磁率 또는 磁氣抵抗率을 이용한 방법보다 이 방법에서 정도가 양호한 磁束分布를 얻을 수 있었다.

Magnetic Flux Distribution of Rotating Electric Machine Taken into Account Hysteresis Effect

Tae-Man Koo
Dept. of Electrical Engineering

〈Abstract〉

An algorithm for analysis of magnetic flux distribution of rotating electric machine taken into account hysteresis effect has been developed. The governing equation containing the magnetization strength is deduced to consider the hysteresis effect. The solution is obtained by the finite element method using Galerkin Criterion. In a model of no-load synchronous generator, analysis results by proposed algorithm show more reasonable flux distribution compared with those by the analysis method using permeability or reluctivity.

1. 서론

電氣機器의 자심재료로 사용되는 대부분의 강자성체에는 磁氣飽和 特性과 히스테리시스 현상이 있고 이것이 電氣機器의 磁束分布, 회전력, 誘起起電力, 손실, 소음, 진동 및 운전특성에 영향을 미칠수 있다^(1,2). 電磁界 解析에 유한요소법이 도입된 이래로 電氣機器의 磁束分布 규명에 괄목할 만한 진전이 있었다⁽³⁾. 그러나 불연속점을 갖는 磁氣抵抗率(또는 透磁率)이 포함되는 지배방정식을 사용하므로 히스테리시스 효과를 고려하기에는 어려운 점이 많아 히스테리시스 효과에 의한 磁界의 비선형 특성은 고려되지 않는 경우가 대부분이었다. 따라서 히스테리시스 효과를 고려할 수 있는 해석법에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다^(4,5). 본 연구에서는 回轉機에서 磁氣飽和 特性과 히스테리시스 효과를 고려한 磁束分布를 얻기 위하여 磁化의 세기가 포함되는 지배방정식을 유도하고, 이를 Galerkin 이론을 적용한 유한요소법으로 界方程式을 유도하고 반복법에 의하여 해를 얻었다. 무부하 동기발전기에 이 해석법을 적용하고 다른 해석법과 장단점을 고찰하였다.

2. 지배방정식⁽⁷⁻⁸⁾

전기 에너지 변환기인 回轉機와 變壓器에서 磁束의 통로인 자심은 대부분 얇은 규소강판을 층간 절연하며 적층한 적철심 또는 방향성 규소강대를 이용한 권철심이므로 2차원 해석을 통해서도 자기적 특성을 효과적으로 규명할 수 있어 많이 사용된다⁽⁹⁾. 본 고에서도 해석상의 편의를 위하여 2차원 해석을 한다. 히스테리시스 현상을 고려한 磁界解析을 위하여 다음의 Ampere의 주회적 분법칙을 이용한다.

$$\nabla \times H = J_0 \quad (2.1)$$

여기서 H는 磁界의 세기, J_0 는 電流密度이다.

磁界와 磁束密度의 관계를 나타내는 식은 다음과 같다.

$$B = \mu H \quad (2.2)$$

$$H = \nu B \quad (2.3)$$

그림 2.1과 같이 透磁率 μ 는 磁界 H가 0일 때, 磁氣抵抗率은 磁束密度 B가 0일 때 각각 불연속이 된다. 따라서 히스테리시스 현상을 고려하고자 할 때 ν 나 μ 를 사용하게 되면 해석이 곤란하게 된다. 그런데 다음 식과 같은 磁化의 세기 M을 사용하면

$$B = \mu_0(H + M) \quad (2.4)$$

전구간에서 M은 연속이 되므로 히스테리시스 효과를 효과적으로 고려할 수 있다.

식 (2.4)를 식 (2.1)에 대입하면 다음 식이 된다.

$$\nabla \times \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) = J_0 \quad (2.5)$$

또한 다음의 벡터포텐셜 A를 이용하면

$$B = \nabla \times A \quad (2.6)$$

식 (2.5)는 다음과 같이 된다.

$$\nu_0 \nabla \times \nabla \times A = J_0 + \nabla \times M \quad (2.7)$$

여기서 ν_0 는 공기의 磁氣抵抗率이다.

식 (2.7)을 2차원의 직각좌표계로 표현하면 다음 식이 된다.

$$\nu_0 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + J_0 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.8)$$

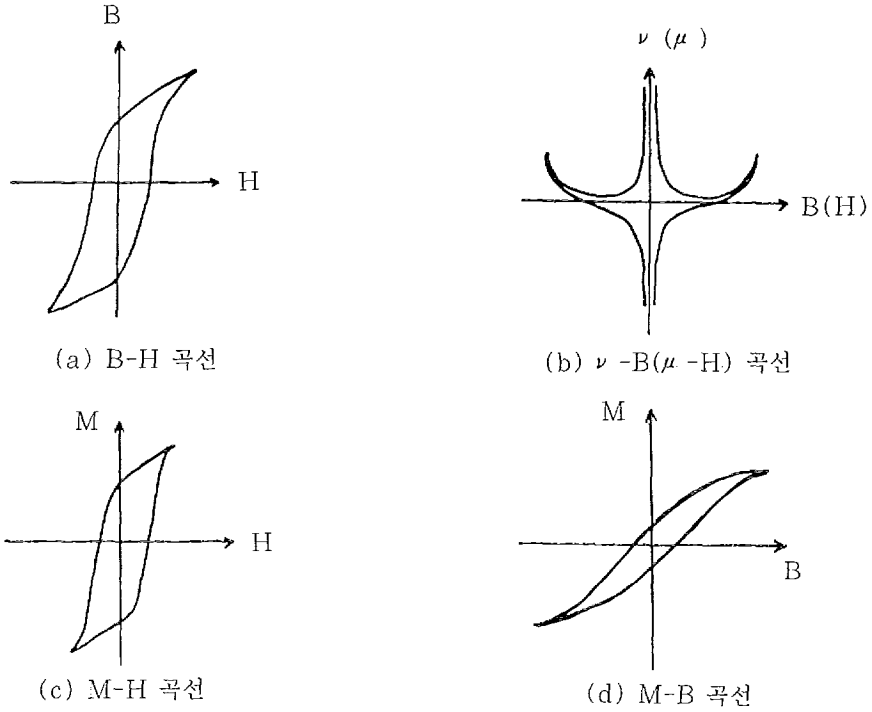


그림 2.1 자기특성곡선

Fig 2.1 Magnetic characteristic curve

식 (2.8)이 2차원 磁束分布 解析을 위한 磁界의 지배방정식이 된다. 여기서 A는 벡터포텐셜 A의 z축 방향성분이며, Mx, My는 磁化의 세기 M의 x 및 y의 방향성분이다.

3. 유한요소식⁽¹⁰⁻¹²⁾

식 (2.8)을 유한요소법에 의하여 해를 구하기 위하여 해석영역을 3각요소로 분할하고, 요소내에서 벡터포텐셜 A는 다음 식과 같이 1차함수로 근사화한다.

$$A^e(x,y) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e y \quad (3.1)$$

여기서 e는 요소를 의미한다.

식 (3.1)을 形狀函數 N_i 와 절점치 A_i 로 나타내면 다음 식과 같다.

$$A^e = \sum_{i=1}^3 N_i^e A_i^e$$

$$N_i^e = (a_i^e + b_i^e x_i + c_i^e y_i) \frac{1}{2\Delta^e} \quad (3.2)$$

여기서 a_i, b_i, c_i 는 식 (3.1)을 이용하여 구한다.

식 (2.8)에 Galerkin 이론을 적용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$G_j = \sum_{e=1}^{N_T} G_j^e = 0 \quad (3.3)$$

$$G_j^e = \int_{\Delta^e} N_j \left\{ \nu_0 \left(\frac{\partial^2 A^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^e}{\partial y^2} \right) + J_0^e + \left(\frac{\partial M_y^e}{\partial x} - \frac{\partial M_x^e}{\partial y} \right) \right\} ds \quad (3.4)$$

여기서 N_r 는 해석영역의 전 요소수이고, 식 (3.4)는 각 요소에 대한 G_j 이다. 각 요소에 대한 G_j 를 구하고, 이를 전 요소에 대해 조합하여 식 (3.3)과 같은 방정식을 만들면 식 (3.3)은 전체 절점의 벡터포텐셜에 대한 대수방정식이 되고 이로 부터 각 절점에서의 벡터포텐셜 A_i 를 구할 수 있다. 식 (3.4)에서 우변 첫째항에 Gauss-Green 정리를 적용한 후 정리하면 다음 식이 된다.

$$-\nu_0 \int_{\Delta^e} \left(\frac{\partial A^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial A^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds \quad (3.5)$$

또 식 (3.4)의 우변 둘째항에 Gauss-Green 정리를 적용한 후 정리하면 다음 식이 된다.

$$-\int_{\Delta^e} \left(M_y^e \frac{\partial N_j}{\partial x} - M_x^e \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds \quad (3.6)$$

따라서 식 (3.4)은

$$G_j^e = \nu_0 \int_{\Delta^e} \left(\frac{\partial A^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial A^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds - \int_{\Delta^e} \left(M_x^e \frac{\partial N_j}{\partial y} - M_y^e \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) ds - \int_{\Delta^e} N_j J_0^e ds \quad (3.7)$$

$$\frac{\nu_0}{4\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ M_x^e \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} - M_y^e \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\} - \frac{J_0^e \Delta^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

로 표현되며, 식 (3.2)의 근사화 식을 식 (3.7)에 대입하면

$$G_j^e = \sum_{i=1}^3 \left\{ \nu_0 \int_{\Delta^e} \left(\frac{b_i}{2\Delta^e} \cdot \frac{b_j}{2\Delta^e} + \frac{c_i}{2\Delta^e} \cdot \frac{c_j}{2\Delta^e} \right) A_i ds \right\} - \int_{\Delta^e} \left(M_x^e \frac{c_j}{2\Delta^e} - M_y^e \frac{b_j}{2\Delta^e} \right) ds - J_0^e \int_{\Delta^e} N_j ds \quad (3.8)$$

이 된다. 식 (3.8)에서 요소의 면적분은 삼각함수의 면적이고, 보간함수 N_j 는 면적좌표계에서 면적좌표이므로 Eigenberg-Malvern의 적분공식을 이용하면 식 (3.8)은 다음 식이 된다.

$$G_j^e = \frac{\nu_0}{4\Delta^e} \left\{ \sum_{i=1}^3 (b_i \cdot b_j + c_i \cdot c_j) A_i \right\} - \frac{1}{2} \left(c_j M_x^e - b_j \cdot M_y^e \right) - \frac{\Delta^e}{3} J_0^e \quad (3.9)$$

식 (3.9)를 행렬로 표현하면 식(3.10)과 같다.

식 (3.10)은 磁化의 세기 M 을 사용한 1차 3각 요소 e 에 대한 요소 매트릭스 식이다. 각 요소에 대한 요소 매트릭스 식인 식 (3.10)을 해석영역의 전 요소에 대해 조합하면 식(3.11)과 같은 界方程式을 얻을 수 있다.

$$[S](A) = \{F_m\} + \{F_c\} = \{F\} \quad (3.11)$$

4-1. 해석모델

각 요소의 磁束密度는 식 (2.6)으로 부터

$$B^c = i \frac{\partial A^c}{\partial y} - j \frac{\partial A^c}{\partial x} \quad (3.12)$$

으로 표시된다.

식 (3.11)에 식 (3.2)를 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$B_x^c = \frac{\partial A^c}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2\Delta^c} c_i A_i$$

$$B_y^c = -\frac{\partial A^c}{\partial x} = -\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2\Delta^c} b_i A_i \quad (3.13)$$

그리고 磁化의 세기 M 은 식 (2.4)에 의하여 다음 식과 같다.

$$M_x = \nu_0 B_x - H_x$$

$$M_y = \nu_0 B_y - H_y \quad (3.14)$$

4. 해석모델과 계산과정

해석모델인 동기발전기의 제원은 표 4.1과 같으며 그 해석모델은 그림 4.1이다. 본고에서는 무부하시 磁束分布를 다루었으며, 그림 4.2와 같이 해석모델을 절점수 161개, 요소수 291개로 요소분할하였다. 회전자의 直流勵磁 電流密度는 한 슬롯(Slot) 영역 내에서 균일하다고 가정하고 電流密度는 $J_r = 1.33 \times 10^6$ [A/m²]이다.

표4.1 해석모델의 제원
Table 4.1 Rating and dimension of model

용량	12,000 (kVA)
정격 전압	11,000 (V)
주파수	60 (Hz)
극수	2
상수	3
공극 길이	2 (cm)
회전자 반경	28 (cm)
회전자 슬롯 폭	2 (cm)
회전자 슬롯 깊이	11 (cm)
고정자 반경	30 (cm)
고정자 슬롯 깊이	10.8 (cm)
고정자 슬롯 폭	2.6 (cm)

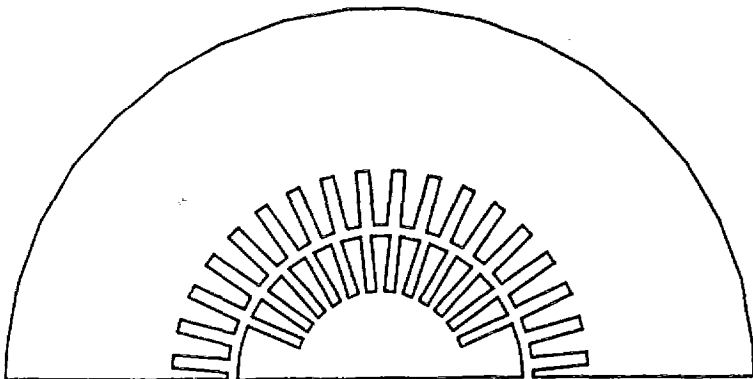


그림 4.1 해석 모델
Fig. 4.1 Model for analysis

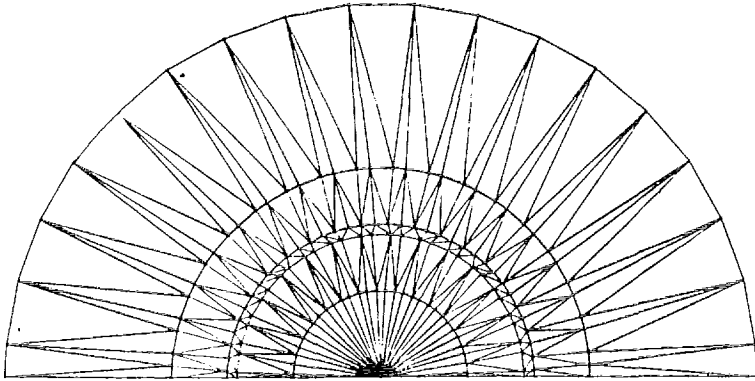


그림 4.2 해석모델의 요소망
Fig. 4.2 Finite element mesh

4-2. 계산과정

지배방정식으로부터 벡터포텐셜 A 를 구하기 위해서는 磁化의 세기 M 을 알아야 하고 磁化의 세기를 구하기 위해서는 식 (3.13)과 같이 磁束密度 B 를 알아야 하며, 또 磁束密度를 구하기 위해서는 식 (3.12)와 같이 벡터포텐셜을 알아야 한다. 벡터포텐셜의 초기치는 임의의 값을 사용할 수 있으므로 처음에는 초기치의 벡터포텐셜 값으로 철심의 比透磁率을 7000으로 선형 해석한 값을 취하였으나, 磁化의 세기를 이용한 본 해석법은 해의 精度는 높으나 계산 반복회수가 매우 많아 계산시간이 많이 소요되는 반면에, 磁氣抵抗率을 이용한 해석법은 반복회수가 상대적으로 적어 계산소요시간은 짧으나 해의 精度가 떨어지므로, 계산시간을 절약하기 위하여 磁氣抵抗率을 이용하여 얻어진 벡터포텐셜을 초기치로 이용하였다. 이렇게 하면 계산시간이 50% 이상 크게 절약된다. 계산과정의 흐름도는 그림 4.3과 같다. 수렴의 판정은 磁化의 세기를 얻는데 사용된 벡터포텐셜과 계산 후 얻어진 벡터포텐셜의 편차의 평균에 의하여 판정하였

다. B-H 곡선으로부터 磁化의 세기 M 을 구하는 방법은 B-H 곡선을 20개의 일정한 磁束密度 간격으로 구분하고 한 구간 내에서 B 와 H 의 관계는 선형인 것으로 하였다. 同期機 내의 磁束密度의 변화 양상은 영역에 따라 다르므로 이에 적합한 B-H 곡선을 적용시켜야 한다. 무부하에서 界子인 회전자의 磁束密度는 일정하므로 DC 값으로 볼 수 있어 界子에 적용되는 B-H 곡선은 그림 4.4의 곡선 a를 여기에 적용시키는 것이 타당하다. 한편 고정자인 電機子에서의 磁束密度의 변화는 히스테리시스 현상을 나타낸다. 즉, 회전자의 N극(또는 S극)에 인접한 電機子 부분은 磁束密度의 증가비율이 비교적 큰 부분이고 나머지 부분은 磁束密度가 완만히 감소하는 부분으로 볼 수 있다. 磁束密度가 증가하는 부분은 磁束密度가 감소하는 부분과 비교할 때 그 면적이 상당히 작으므로 무시하고 電機子 전체 영역의 磁束密度가 완만히 감소하는 영역으로 보아 그림 4.4의 곡선 b를 여기에 적용시켰다.

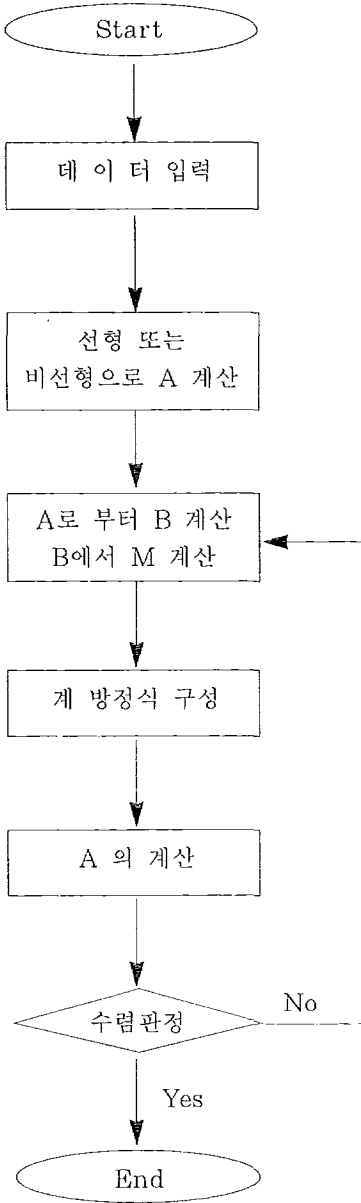


그림 4.3 계산과정 흐름도
Fig. 4.3 Flow chart

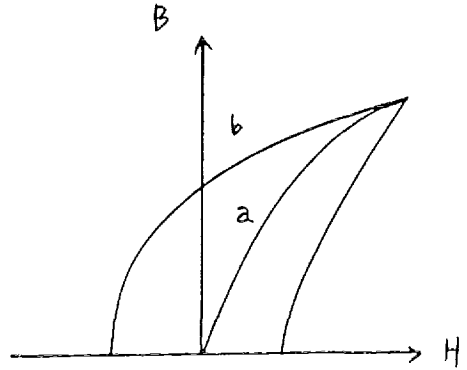


그림 4.4 B-H 곡선
Fig. 4.4 B-H 곡선

5. 해석 결과 및 검토

磁氣飽和가 비교적 작은 범위에서는 磁氣抵抗率 ν (또는 透磁率 μ)를 사용한 해석 결과와 磁化의 세기 M 을 이용한 해석 결과는 그림 5.1(a)에서와 같이 별 차이가 없었다. 磁氣抵抗率을 이용한 비선형 해석방법은 수렴의 속도는 비교적 빠르나 B-H 곡선의 형태에 따라 수렴이 불안정한 경우가 있었다. 또한 磁氣抵抗率에는 불연속인 점이 있어 히스테리시스 효과를 적절히 고려하기는 매우 어렵고, 불연속 점을 제외시키는 방법을 이용하여 이를 고려할 경우에는 수렴이 매우 불안정하면서 수렴오차도 크게 나타났다. 이에 비하여 磁化의 세기를 이용한 해석은 수렴 속도는 제법 느리나 B-H 곡선의 형태에 상관 없이 수렴이 비교적 안정되게 이루어져 수렴의 범위를 결정하기도 용이하였고, 磁氣抵抗率을 이용할 때보다 수렴오차의 범위를 매우 작게 할 수 있었으며, 인접요소 간의 磁束密度의 변화 등이 상대적으로 적게 나타났다. 특히 히스테리시스 효과를 무리없이 적용시킬수 있었고 결과도 양호하게 나타났다. 그림 5.1은 磁氣抵抗率을 이용한 결과(가는 선)와 磁化의

세기를 이용한 결과(굵은 선)를 비교한 것이다. 磁氣飽和가 작은 그림 5.1(a)의 경우에는 그 차이가 작아 그림으로 식별할 수 없으나 磁氣飽和가 큰 그림 5.1(b)와 (c)의 경우는 뚜렷한 차이가 있음을 볼 수 있다. 즉, 磁氣飽和가 클수록 두 해석법에 의한 해석 결과의 차이는 크게 나타난다. 磁氣飽和가 큰 경우 磁氣抵抗率을 이용한 해석 결과는 수렴

이 불안정하여 수렴이 제대로 이루어지지 않은 결과이고 磁化의 세기를 이용한 해석 결과는 수렴이 안정되게 이루어진 결과이므로 磁化의 세기 M 을 이용한 해석 결과가 타당성이 있을 것으로 사료된다. 이것은 공극에서 얻을 수 있는 磁束密度의 크기를 비교함으로써도 알 수 있다. 철심에서도 공극에서와 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

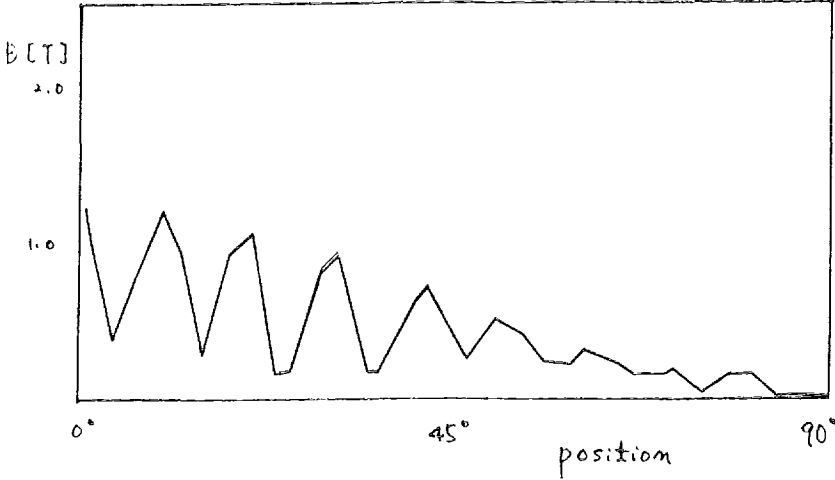


그림 5.1(a) 공극의 磁束密度 ($I_r=1$ pu)
 Fig. 5.1(a) Air-gap flux density ($I_r=1$ pu)

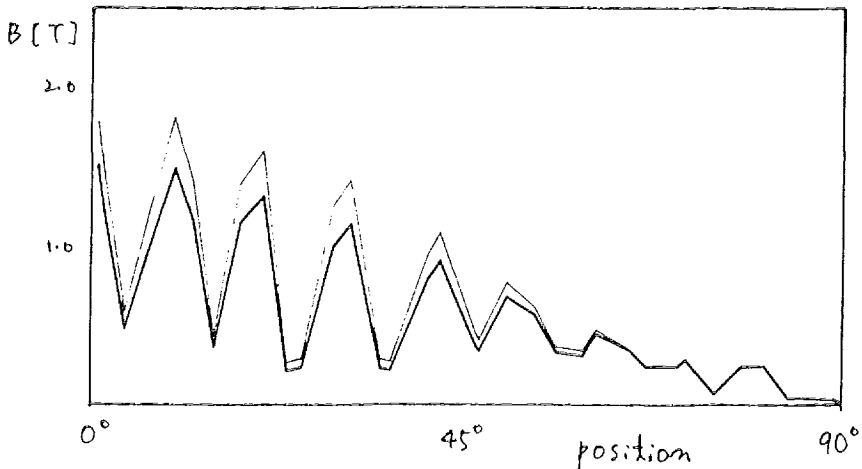
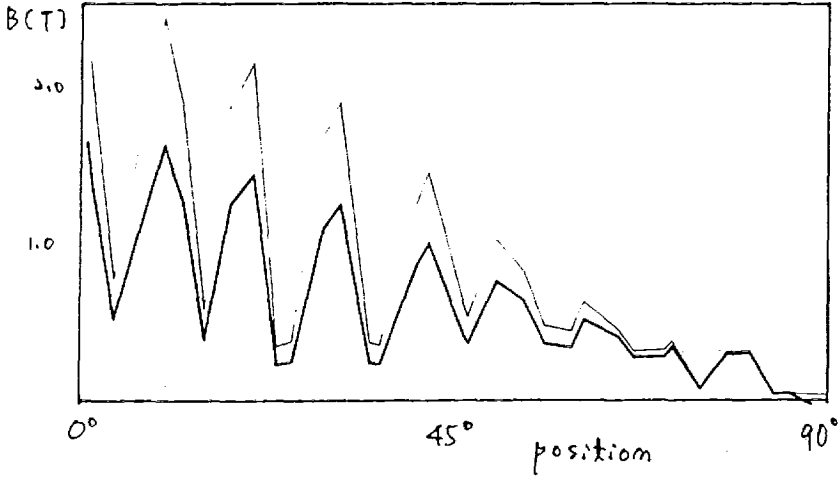


그림 5.1(b) 공극의 磁束密度 ($I_r=1.5$ pu)
 Fig. 5.1(b) Air-gap flux density ($I_r=1.5$ pu)

그림 5.1(c) 공극의 磁束密度 ($I_f=2$ pu)Fig. 5.1(c) Air-gap flux density ($I_f=2$ pu)

5. 결 론

磁氣飽和特性和 히스테리시스 효과를 고려할 수 있는 磁界解析 알고리즘을 제시하였다. 磁化의 세기를 이용하는 본 방법은 透磁率이나 磁氣抵抗率을 이용한 해석법보다 精度가 높은 磁束分布를 얻을 수 있었다. 또한 종래의 透磁率이나 磁氣抵抗率을 이용한 해석법에서는 고려하기 어려운 히스테리시스 효과를 고려해서 해석할 수 있다. 回轉機 내에서는 영역에 따라 磁束의 변화 양상이 다양한데, 磁束 변화 양상에 가장 적절한 B-H 곡선을 각 부분에 적용시킨다면 더 정확한 磁界解析이 가능할 것이다.

참 고 문 헌

1. M.V.K. Chari, 'Finite element analysis of electrical machinery and devices', IEEE vol. MAG-16, no.5, pp.1014-1019, Sept. 1980.
2. P.Rupanagunta, J.S.Hsu, and W.

F.Weldon, 'Determination of iron core losses under influence of third-harmonic flux component', IEEE vol. MAG-27, no.2, pp.768-777, Mar. 1991.

3. 임달호, '전자장 해석에의 유한요소법 응용', 대한전기학회지 vol.39, no.3, pp.9-14, Mar. 1990.
4. A. Savini, 'Modelling hysteresis loops for finite element magnetic field calculations', IEEE vol. MAG-18, no.2, pp.552-557, Mar. 1982.
5. T. Nakata, N. Takahashi and Y. Kawase, 'Finite element analysis of magnetic fields taking into accounting hysteresis characteristics', IEEE vol. MAG-21, no.5, pp.1856-1858, Sept. 1985.
6. David L. Atherton, and J.R. Beattie, 'A mean field Stoner-Wohlfarth hysteresis model', IEEE vol. MAG-26, no.6, pp.3056-3063, Nov. 1990.

7. S.A. Nasar, 'Electromagnetic Energy Conversion Device and Systems', Prentice-Hall Inc., 1970.
8. S. Ratnajeevan H. Hoole, 'Computer-Aided Analysis and Design of Electromagnetic Device', Elsevier Science Publishing Co., 1989.
9. 신홍교, '유한요소법에 의한 인덕턴스의 산정법에 관한 연구', 박사학위논문, 한양대학교, 1990.
10. M. V. K. Chari, and P. P. Silvester, 'Finite elements in electrical and magnetic field problems', John Wiley & Sons, 1980.
11. Larry J. Segerlind, 'Applied finite element analysis', John Wiley & Sons, 1976.
12. Kenneth H. Huberner, 'The finite element method for engineers', John & Wiley & Sons, 1975.